



UNIVERSITETI I PRISHTINËS

FAKULTETI I SHKENCAVE
MATEMATIKE NATYRORE

RAMADAN LIMANI

MATEMATIKA ELEMENTARE

Prishtinë, 2025

Recensentë:

1. Dr.sc. Muhib Lohaj, profesor i rregullt në Universitetin e Prishtinës
2. Dr.sc. Menderes Gashi, profesor i asocuar në Universitetin e Prishtinës
3. Dr.sc. Edmond Aliaga, profesor asistent në Universitetin e Prishtinës

Kryetar i Këshillit Botues:

Dr.sc. Naim Jerliu, profesor i asocuar në Universitetin e Prishtinës

Redaktor profesional:

Dr.sc. Bujar Fejzullahu, profesor i rregullt në Universitetin e Prishtinës

Redaktore përgjegjëse:

Dr.sc. Hazbije Sahiti, profesoreshë e asocuar në Universitetin e Prishtinës

Botues:

Universiteti i Prishtinës

Këshilli Botues i Universitetit të Prishtinës lejoi botimin dhe përdorimin
e këtij teksti me Vendimin nr. _____ të datës ____ . ____ . _____.

PËRMBAJTJE

| | |
|---|----|
| Parathënie | 5 |
| Kapitulli I | |
| Bashkësitë, pasqyrimet dhe gjykimet | 7 |
| 1.1 Kuptimi i bashkësisë dhe nënbashkësisë | 7 |
| 1.2 Veprimet me bashkësi | 12 |
| 1.2.1 Unioni i dy bashkësive | 12 |
| 1.2.2 Prerja e dy bashkësive | 13 |
| 1.2.3 Diferenca e dy bashkësive | 14 |
| 1.2.4 Diferenca simetrike e dy bashkësive | 15 |
| 1.2.5 Produkti kartezian (i drejtpërdrejtë) i dy bashkësive | 15 |
| 1.2.6 Bashkësia partitive e një bashkësie | 16 |
| 1.3 Pasqyrimet (funksionet) dhe llojet e tyre | 20 |
| 1.3.1 Kuptimi i pasqyrimet (funksionit) | 20 |
| 1.3.2 Llojet e pasqyrimeve | 21 |
| 1.3.3 Kompozimi i pasqyrimeve | 22 |
| 1.3.4 Pasqyrimi invers | 23 |
| 1.4 Disa funksionet karakteristike | 25 |
| 1.4.1 Vlera absolute | 25 |
| 1.4.2 Funksioni i shenjës (signum) | 25 |
| 1.4.3 Pjesa e plotë | 26 |
| 1.4.4 Funksioni karakteristik i një bashkësie | 27 |
| 1.5 Gjykimet dhe kuantifikatorë | 30 |
| 1.5.1 Gjykimet dhe veprimet me gjykime | 30 |
| 1.5.2 Formulatat e gjykimeve. Tautologjitë | 32 |

| | |
|---|-----|
| 1.5.3 Kuantifikatorët | 34 |
| Kapitulli II | |
| Polinomet dhe shprehjet racionale algjebrike | 37 |
| 2.1 Fuqizimi | 37 |
| 2.2 Rrënjëzimi | 40 |
| 2.3 Kuptimi i polinomit | 43 |
| 2.3.1 Mbledhja dhe zbritja e polinomeve | 44 |
| 2.3.2 Shumëzimi i polinomeve | 44 |
| 2.3.3 Pjesëtimi i polinomeve | 45 |
| 2.4 Faktorizimi i polinomeve | 47 |
| 2.5 Thjeshtimi i shprehjeve racionale algjebrike | 58 |
| Kapitulli III | |
| Sistemet e ekuacioneve dhe inekuacioneve lineare | 77 |
| 3.1 Ekuacionet lineare me një të panjohur | 77 |
| 3.1.1 Zbatime të ekuacioneve lineare me një të panjohur | 81 |
| 3.2 Sistemet e ekuacioneve lineare | 84 |
| 3.2.1 Zbatime të sistemeve të kuacioneve lineare | 92 |
| 3.3 Proporcionet dhe zbatimet e tyre | 93 |
| 3.4 Inekuacionet lineare | 98 |
| Kapitulli IV | |
| Ekuacioni kuadratik dhe funksioni kuadratik..... | 105 |
| 4.1 Ekuacioni kuadratik..... | 105 |
| 4.2 Ekuacioni bikuadratik..... | 117 |
| 4.3 Funksioni kuadratik..... | 122 |
| 4.4 Shenja e trinomit kuadratik $ax^2 + bx + c$ | 137 |
| Kapitulli V | |
| Ekuacionet dhe inekuacionet irracionale | 149 |
| 5.1 Ekuacionet irracionale..... | 149 |
| 5.2 Inekuacionet irracionale..... | 156 |
| Kapitulli VI | |
| Funksionet eksponenciale dhe ato logaritmike | 159 |

| | |
|--|-----|
| 6.1 Ekuacionet dhe inekuacionet eksponenciale | 159 |
| 6.2 Funkzionet eksponenciale | 170 |
| 6.3 Funkzionet logaritmike dhe vetitë e tyre | 178 |
| 6.4 Ekuacionet dhe inekuacionet logaritmike | 187 |
| Kapitulli VII | |
| Trigonometria në rafsh | 205 |
| 7.1 Funkzionet trigonometrike të këndeve të ngushta | 205 |
| 7.2 Funkzionet trigonometrike të këndeve të çfarëdoshme | 207 |
| 7.3 Formulatat e adicioneve dhe rrjedhimet e tyre | 212 |
| 7.4 Barazimet (ekuacionet) trigonometrike | 219 |
| 7.5 Jobarazimet (inekuacionet) trigonometrike | 230 |
| 7.6 Grafikët e funksioneve trigonometrike | 236 |
| 7.7 Funkzionet inverse trigonometrike | 239 |
| 7.8 Teorema e sinusit dhe kosinusit për trekëndëshin e çfarëdoshëm | 244 |
| 7.9 Zgjidhja e trekëndëshit | 246 |
| 7.10 Funkzionet hiperbolike dhe inverset e tyre | 254 |
| Indeksi i emrave | 261 |
| Indeksi i nocioneve | 262 |
| Literatura | 263 |

Parathënie

Ky tekst është rezultat i ligjëratave dhe ushtrimeve të mbajtura që nga viti akademik 1995/1996 nga lëndët: Kursi i matematikës elementare, Matematika elementare I, Matematika elementare II dhe viteve të fundit nga Matematika elementare. Ky tekst, në radhë të parë u dedikohet studentëve të vitit të parë të programeve: Matematikë, Shkenca Kompjuterike, Matematika Financiare në Banka dhe Sigurime, por edhe studentëve që studiojnë: fizikë, kimi apo edhe fakultete teknike. Në këtë tekst lexuesi do të gjejë elementet bazike të matematikës, e të cilat ndihmojnë në të mësuarit dhe studiuarit e kurseve tjera më të avansuara të matematikës. E tërë përmbajtja e tekstit është ndarë në shtatë kapituj, të cilët kryesisht përbëhen nga temat e mësuara në shkollën e lartë të mesme.

Kapitulli i parë përmban bashkësitë, pasqyrimet dhe gjykimet. Në këtë kapitull janë dhënë kuptimet më të rëndësishme në lidhje me bashkësitë, nënbashkësitë dhe veprimet me bashkësi. Po ashtu është dhënë edhe kuptimi i pasqyrimin (funksionit), i cili paraqet një nocion fundamental në matematikë. Pastaj kapitulli vazhdon me llojet e pasqyrimeve; kompozimin e dy pasqyrimeve dhe pasqyrimin invers. Po ashtu janë dhënë edhe disa funksione karakteristike, të cilat janë të domosdoshme edhe për analizën matematike. Në fund të këtij kapitulli janë dhënë elementet kryesore të matematikës logjike, duke përfshirë gjykimet, veprimet me gjykime dhe kuantifikatorët. Të gjitha këto janë të domosdoshme për t'i shprehur pohimet, apo edhe relacionet matematikore përmes gjuhës së matematikës.

Në kapitullin e dytë, të emërtuar si *polinomet dhe shprehjet racionale algjebrike*, kujdes të veçantë i kam kushtuar përkufizimit të fuqive, së pari për eksponenta numra natyrorë, pastaj eksponenta numra të plotë dhe eksponenta numra rracionalë. Po ashtu, në këtë kapitull janë dhënë kuptimi i monomit, binomit, trinomit, polinomit dhe veprimet me polinome. Pjesë tjetër e rëndësishme e këtij kapitulli janë identitetet themelore algjebrike dhe thjeshtimi i shprehjeve algjebrike.

Në kapitullin e tretë janë trajtuar ekuacionet lineare me një të panjohur, inekuacionet lineare me një të panjohur, sistemet e ekuacioneve lineare dhe sistemet e inekuacioneve lineare me një të panjohur. Pjesë e rëndësishme e këtij kapitulli janë edhe proporcionet, të cilat me të madhe përdorën në jetën e përditshme. Ky kapitull përmban edhe një numër të konsiderueshëm të problemeve tekstuale, probleme që janë të lidhura direkt me jetën e përditshme.

Në kapitullin e katërt janë spjeguar detajisht ekuacionet kuadratike, formulat e Viet-it, funksionet kuadratike dhe shenja e trinomit kuadratik, e cila përcaktohet

duke studiuar shenjën e funksionit përkatës kuadratik. Kjo teknikë e lehtëson dhe e shpejton procesin e gjetjes së bashkësisë së zgjidhjeve të një jobarazimi, i cili kthehet në jobarazim kuadratik, apo sistem të jobarazimeve kuadratike.

Në kapitullin e pestë janë spjeguar ekuacionet dhe inekuacionet irracionale dhe këtë kapitull e karakterizon një numër i konsiderueshëm i detyrave të zgjidhura, si dhe një numër i konsiderueshëm i detyrave të pazgjidhura.

Në kapitullin e gjashtë, të emërtuar si *funksionet eksponenciale dhe ato logaritmike*, detajisht janë spjeguar funksionet eksponenciale, ekuacionet dhe inekuacionet eksponenciale; logaritmet, funksionet logaritmike, ekuacionet dhe inekuacionet logaritmike dhe po ashtu në këtë kapitull mund të gjeni disa detyra nga jeta e përditshme e të cilat përshkruhen dhe zgjidhen përmes funksioneve eksponenciale dhe atyre logaritmike.

Kapitulli i shtatë është kapitulli i fundit dhe përmban trigonometrinë në rrafsh. Në këtë kapitull janë dhënë të gjitha elementet e nevojshme nga trigonometria që i duhen një studenti, i cili studion: matematikën, fizikën apo ndonjërin prej fakulteteve teknike. Këtu, së pari janë përkufizuar funksionet trigonometrike të këndeve të ngushta të trekëndëshi kënddrejtë, pastaj funksionet trigonometrike për këndin e çfarëdoshëm në rrethin trigonometrik; janë dhënë formulat e adicionit; janë përkufizuar ekuacionet dhe inekuacionet trigonometrike; janë paraqitur grafikisht funksionet trigonometrike dhe ato inverse trigonometrike; është dhënë teorema e sinusit; ajo e kosinusit dhe janë dhënë disa shembuj të zbatimit të këtyre teoremave për zgjidhjen e trekëndëshit. Në fund të këtij kapitulli janë përkufizuar edhe funksionet trigonometriko–hiperbolike, ose shkurt funksionet hiperbolike dhe inverset e tyre.

Në përgjithësi, teksti përmban mjaft detyra të zgjidhura, por edhe një numër të konsiderueshëm detyrash të pazgjidhura. Po ashtu, në tekst mund të gjeni edhe një mori problemesh me fjalë nga jeta e përditshme, të cilat probleme e tregojnë rëndësinë dhe rolin e matematikës për zgjidhjen e situatave problemore që janë të lidhura direkt me jetën e përditshme. Në tekst mund të gjeni edhe një numër të konsiderueshëm të figurave të cilat e ilustrjnë një nocion, veprim, apo problem në mënyrë vizuale. Një student, i cili e përvetëson materialin e këtij teksti në masën 80%, ai (ajo) do të aftësohet për të ecur në mënyrë të pavarur drejt fushave tjera të matematikës. Shpresoj se lexuesi do ta konsiderojë këtë tekst si mjaft të dobishëm dhe do të isha shumë mirënjohës që të më shkruani në email adresën time ramadan.limani@uni-pr.edu, ose r_limani@yahoo.com për ndonjë lëshim, vërejtje apo koment. Teksti është radhitur me tekst-procesorin $L_A T E X$, kurse figurat janë punuar disa me Word dhe disa me aplikacionin GeoGebra dhe pastaj janë importuar në tekst.

Me këtë rast dua t'i falenderoj recenzentët: dr.sc. Muhib Lohaj, dr.sc. Menderes Gashi dhe dr.sc. Edmond Aliaga për leximin e dorëshkrimit të këtij dhe vërejtjet që i kanë dhënë me të vetmin qëllim që forma përfundimtare e këtij teksti të jetë së më e mirë e mundshme.

Prishtinë, më 06 tetor 2024

Ramadan Limani

Kapitulli I

Bashkësitë, pasqyrimet dhe gjykimet

1.1. Kuptimi i bashkësisë

Nocioni i bashkësisë në matematikë paraqet një *nocion themelor*—ai nuk mund të përkufizohet. Kjo ndodh për faktin se disa bashkësi përmbajnë aso objekte (elemente) të cilët për nga natyra janë të lloj-llojshëm. Kështu, për të qenë sa më i qartë kuptimi i bashkësisë për nxënësin, studentin, etj., duhet të merren shembuj të ndryshëm të bashkësive. P.sh.

Bashkësia e studentëve të Universitetit të Prishtinës,
Bashkësia e qyteteve të Kosovës,
Bashkësia e shkronjave të alfabetit të gjuhës shqipe,
Bashkësia e elementeve kimike,
Bashkësia e shteteve të Evropës, etj.

Është e qartë se nga cilat elemente përbëhet secila nga bashkësitë e sipërshënuara.

Bashkësitë zakonisht shënohen me shkronja të mëdha të alfabetit latin si A , B , C , ... apo ndonjëherë ndodh që të shënohen edhe në ndonjë mënyrë tjetër si p.sh. α , β , ...; a , b , c , ...; $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{L}(A)$, $C_{[a,b]}$, etj. Objektet që e formojnë bashkësinë i quajmë *elemente* të bashkësisë. Ato zakonisht shënohen me shkronja të vogla të alfabetit latin si a , b , c , x , y , ... apo ndonjëherë edhe me simbole tjera; janë të ndara me presje dhe janë të mbërthyer me kllapa gjarpërore. P.sh.

$$A = \{a, b, c, d, e\}, \quad B = \{1, 0, -1, 2, a, e\}, \quad C = \{a, \{a\}, b, \{b\}, \{a, b\}\}.$$

Vërejmë se bashkësia A përmban këto elemente: shkronjat a , b , c , d dhe e ; bashkësia B përmban: numrat 1 , 0 , -1 , 2 dhe shkronjat a , e ; bashkësia C përmban: shkronjën a , bashkësinë e cila për element ka shkronjën a , shkronjën b , bashkësinë e cila për element ka shkronjën b , si dhe bashkësinë e cila për elemente ka shkronjat a e b .

Për ilustrimin e bashkësive përdoret edhe *diagrami i Venn-it* (John Venn (1834–1923), matematikan dhe filozof anglez). Brenda një konturi (vije) eliptik ose në ndonjë formë tjetër, shënohen pika dhe pranë secilës pikë shënohet elementi përkatës. P.sh. diagrami i Venn-it për bashkësitë e mësipërme A , B e C do të dukej si vijon:

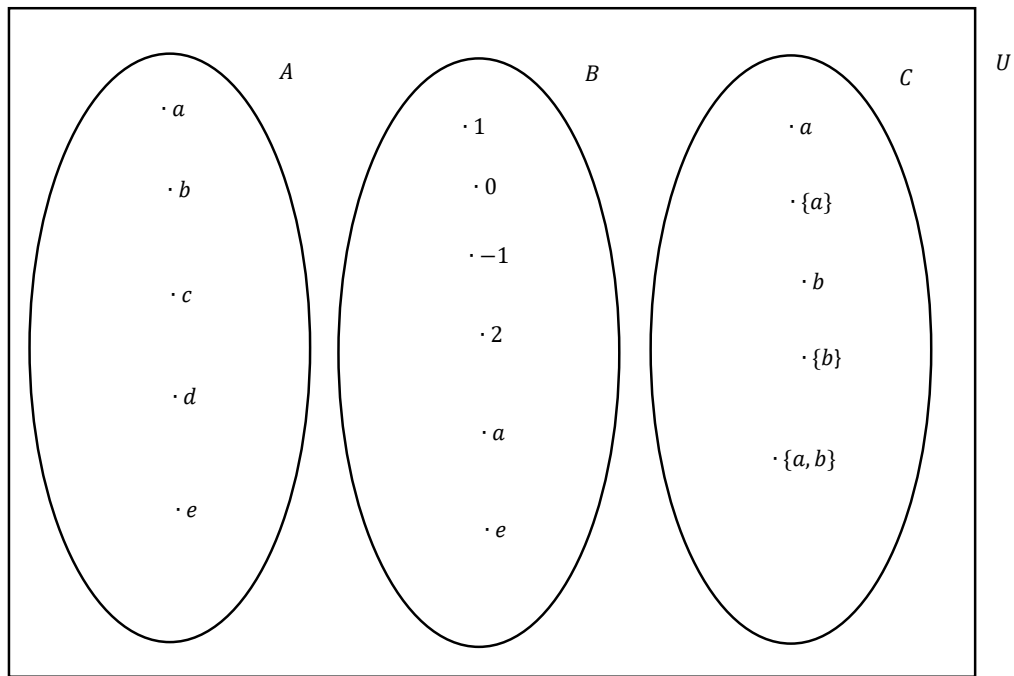


Fig. 1.0

Me U kemi shënuar bashkësinë *universale*-bashkësia e cila është mbibashkësi e çdo bashkësie tjetër.

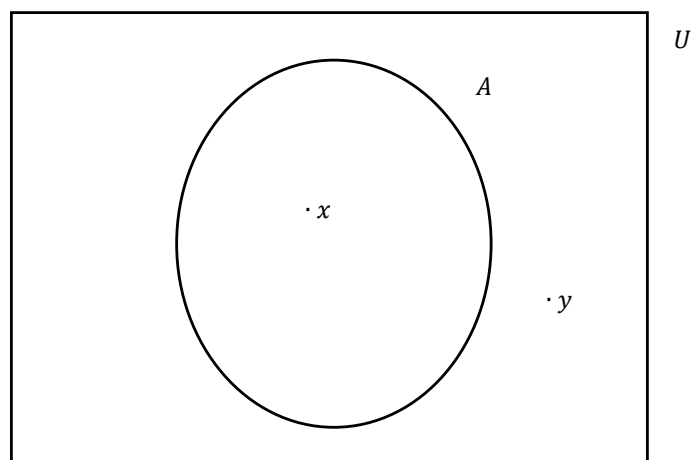


Fig. 1'.0

Faktin se elementi x i takon (y nuk i takon) bashkësisë A simbolikisht e shkruajmë $x \in A$ ($y \notin A$).

Dallojmë bashkësinë e cila nuk përmban asnjë element të cilën e quajmë

bashkësi boshe (të zbraztë) dhe simbolikisht e shkruajmë me ndonjërin prej simboleve \emptyset ose $\{\}$, ndërsa ne do të preferojmë simbolin e parë. Për nga numri i elementeve të bashkësisë dallojmë bashkësi të fundme dhe të pafundme. Nga këto të fundit dallojmë bashkësi të *numërueshme* (elementet e të cilave mund t'i shkruajmë në trajtë vargu, p.sh. bashkësia e numrave natyrorë \mathbf{N}) dhe të panumërueshme (elementet e të cilave nuk mund t'i shkruajmë në trajtë vargu, p.sh. bashkësia pikave të një drejtëze, rrafshi, etj.).

Nëse të gjitha elementet e një bashkësie A i takojnë edhe bashkësisë B , do të themi se A është *nënbashkësi* e bashkësisë B dhe simbolikisht do të shkruajmë $A \subseteq B$.

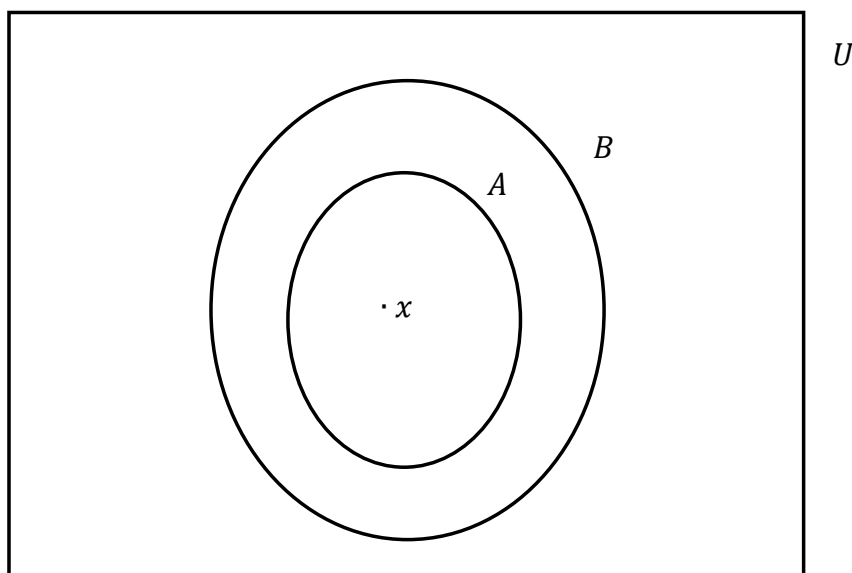


Fig. 1.1

Vetitë. 1° $\emptyset \subseteq A, \forall A$, 2° $A \subseteq A, \forall A$, (vetia reflexive) 3° Nëse $A \subseteq B$ dhe $B \subseteq C$, atëherë $A \subseteq C$, (vetia tranzitive) 4° Nëse $A \subseteq B$ dhe $B \subseteq A$, atëherë $A = B$, (rregulla e artë për barazimin e dy bashkësive)

Nga vetia 4° dhe kuptimi i nënbashkësisë përfundojmë se dy bashkësi të barabarta përmbajnë elementet e njëjta.

Me $\text{card } A$ ose $|A|$ do të shënojmë numrin e elementeve të bashkësisë A , qoftë ajo e fundme ose e pafundme.

Shembuj të bashkësive. Nuk është vështirë të konstatohet se nga cilat elemente përbëhet secila nga bashkësitë:

$$A = \{a, b, c\}, \quad B = \{a, b, c, \{a\}, \{b\}, \emptyset\}, \quad C = \left\{+, 0, -, \frac{1}{2}, \text{deti Adriatik}\right\}$$

$$D = \{b, b, b, c, c, a, a, a, a\}, \quad E = \{x | x \in \mathbf{N} \wedge x^2 \leq 10\}.$$

Lehtë mund të shihet se $A \subseteq B$ dhe $A = D$, prej nga konkludojmë se te bashkësitë nuk ka rëndësi renditja e elementeve dhe përsëritja e ndonjë elementi.

Bashkësitë mund të jipen edhe në këtë mënyrë:

A =bashkësia e të gjitha qyteteve të Kosovës,

B =bashkësia e të gjithë lumenjëve të Europës,

C =bashkësia e të gjithë banorëve të botës, etj.

Bashkësitë numerike. Bashkësitë numerike janë:

$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ bashkësia e numrave natyralë,

$\mathbf{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$ bashkësia e numrave të plotë,

$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0 \right\}$ bashkësia e numrave racionalë,

\mathbf{I} = bashkësia e numrave irracionalë,

$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$ bashkësia e numrave realë, ku $\mathbf{Q} \cap \mathbf{I} = \emptyset$,

$\mathbf{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbf{R}, i^2 = -1\}$ bashkësia e numrave kompleksë.

Qartazi shihet se vlen përfshirja $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$. Diagrami i Venn-it për këtë përfshirje është paraqitur në figurën 1.2.

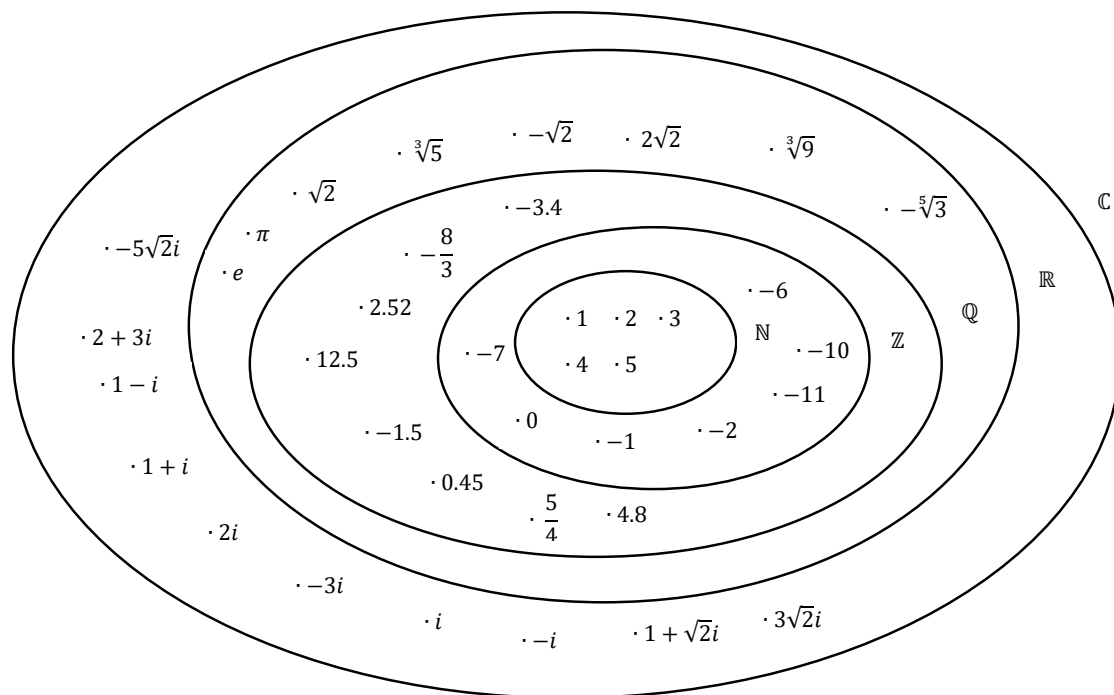


Fig. 1.2

Intervalet numerike. Intervalet numerike janë nënbashkësi të numrave realë të përcaktuar nga kufijtë (të cilët po ashtu janë numra realë, ose ndonjëri nga simbolet ∞ apo $-\infty$).

$[a, b] = \{x | x \in \mathbf{R} \wedge a \leq x \leq b\}$ intervali i mbyllur (segmenti) me kufij a dhe b .

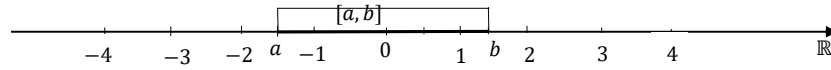


Fig. 1.3

$(a, b] = \{x | x \in \mathbf{R} \wedge a < x \leq b\}$ intervali gjysmë i mbyllur (hapur) me kufij a dhe b .

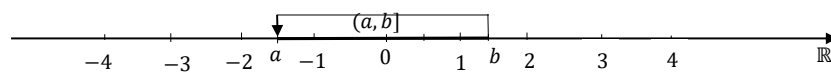


Fig. 1.4

$[a, b) = \{x | x \in \mathbf{R} \wedge a \leq x < b\}$ intervali gjysmë i mbyllur (hapur) me kufij a dhe b .

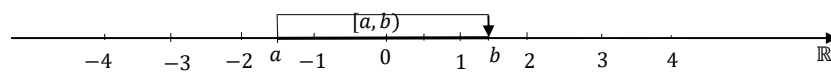


Fig. 1.5

$(a, b) = \{x | x \in \mathbf{R} \wedge a < x < b\}$ intervali i hapur me kufij a dhe b .

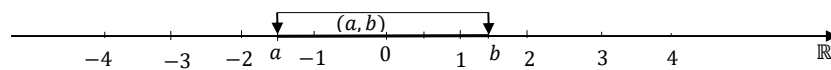


Fig. 1.6

$(-\infty, a) = \{x | x \in \mathbf{R} \wedge -\infty < x < a\}$

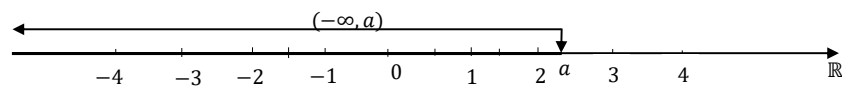


Fig. 1.7

$$(a, \infty) = \{x | x \in \mathbf{R} \wedge a < x < \infty\}$$

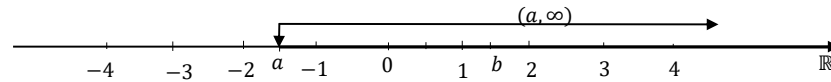


Fig. 1.8

Ngjashëm, përkufizohen edhe intervalet $(-\infty, a]$, $[a, \infty)$ dhe $(-\infty, \infty) = \mathbf{R}$.

1.2. Veprimet me bashkësi

Veprimet binare me bashkësi janë: unioni, prerja, diferenca, diferenca simetrike dhe produkti kartezi.

1.2.1. Unioni i dy bashkësive

Union të dy bashkësive A dhe B quajmë bashkësinë e cila përmban elementet e bashkësisë A dhe ato elemente të bashkësisë B që nuk ndodhen në bashkësinë A . Kështu:

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}.$$

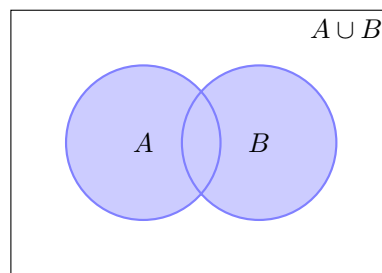


Fig. 1.9

Vetitë:

$$A \cup \emptyset = A, \forall A$$

$$A \cup A = A, \forall A$$

$$A \cup B = B \cup A, \forall A, B$$

(ligji komutativ)

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \forall A, B, C$$

(ligji asociativ (i shoqërimit)).

$$A \subseteq B \implies A \cup B = B, \forall A, B$$

$$A \subseteq B \implies A \cup C \subseteq B \cup C, \forall A, B, C$$

1.2.2. Prerja e dy bashkësive

Prerja të dy bashkësive A dhe B quajmë bashkësinë e cila i përmban elementet e përbashkëta të bashkësisë A dhe bashkësisë B . Kështu:

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}.$$

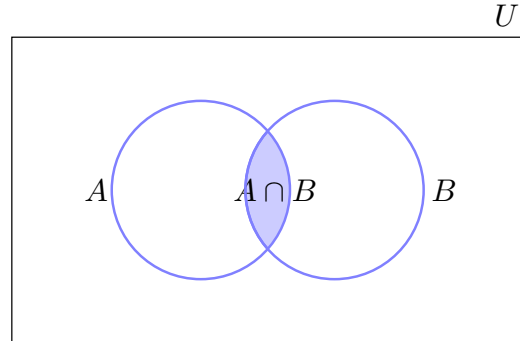


Fig. 1.10

Vetitë:

$$A \cap \emptyset = \emptyset, \forall A$$

$$A \cap A = A, \forall A$$

$$A \cap B = B \cap A, \forall A, B \quad (\text{ligji komutativ})$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \forall A, B, C \quad (\text{ligji asociativ (i shoqërimit)})$$

$$A \subseteq B \implies A \cap B = A, \forall A, B$$

$$A \subseteq B \implies A \cap C \subseteq B \cap C, \forall A, B, C$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (\text{ligji distributiv i prerjes ndaj unionit})$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (\text{ligji distributiv i unionit ndaj prerjes}).$$

Veprimet union dhe prerje mund të përkufizohen edhe për një numër të çfarëdoshëm të bashkësive $A_i (i \in I)$, ku I është bashkësi e çfarëdoshme indeksesh, në këtë mënyrë:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x | \exists i_0 \in I \wedge x \in A_{i_0}\}, \quad \text{respektivisht} \quad \bigcap_{i \in I} A_i = \{x | x \in A_i, \forall i \in I\}.$$

Nëse $I = \mathbf{N}$, atëherë

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad \text{respektivisht} \quad \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Tani, ligjet distributive mund të përgjithësohen si vijon:

$$A \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap A_i), \quad \text{respektivisht}$$

$$A \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A \cup A_i).$$

1.2.3. Diferenca e dy bashkësive

Diferencë të bashkësië A me bashkësinë B quajmë bashkësinë e cila i përmban vetëm ato elemente të bashkësisë A të cilat nuk ndodhen në bashkësinë B . Kështu:

$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}.$$

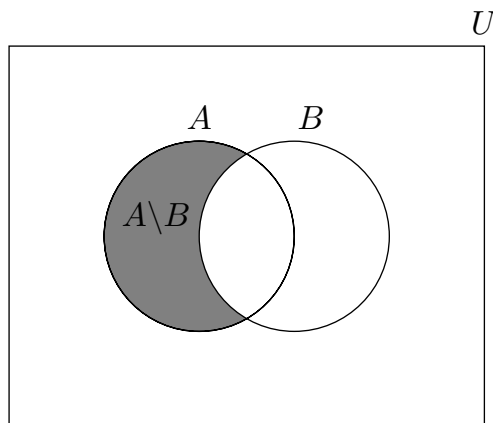


Fig. 1.11

Vetitë:

$$A \setminus \emptyset = A, \forall A$$

$$A \setminus A = \emptyset, \forall A; \quad A \setminus B = \emptyset, \forall A \subseteq B$$

$$A \setminus B \neq B \setminus A$$

$$(A \setminus B) \setminus C \neq A \setminus (B \setminus C)$$

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

$$B \subseteq C \implies A \setminus B \supseteq A \setminus C.$$

Nëse $B \subseteq A$, atëherë $A \setminus B$ shënohet me $C_A B$ (B^C) dhe quhet *komplement (plotës)* i bashkësisë B deri te bashkësia A . Është i saktë relacioni

$$C \subseteq B \subseteq A \implies C_A C \supseteq C_A B.$$

Nëse A dhe B i konsiderojmë si nënbashkësi të një bashkësie universale U , atëherë kemi:

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C, \quad \text{respektivisht} \quad (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^C = \bigcap_{i \in I} A_i^C \qquad \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^C = \bigcup_{i \in I} A_i^C,$$

të cilat njihen si ligjet e De-Morganit (Augustus De Morgan (1806–1871) matematikan anglez).

1.2.4. Diferenca simetrike e dy bashkësive

Diferenca simetrike e dy bashkësive A dhe B përkufizohet përmes diferencës dhe unionit të dy bashkësive. Kështu:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

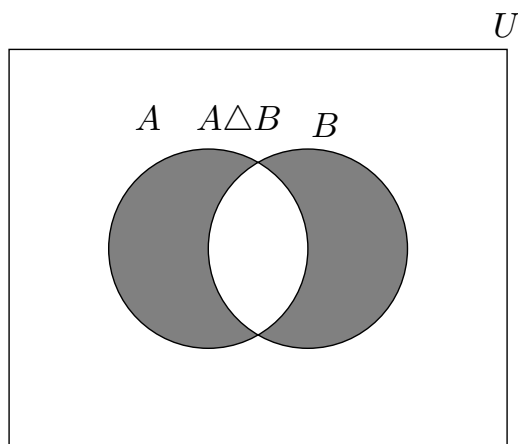


Fig. 1.12

Vetitë:

$$A \Delta \emptyset = A, \forall A$$

$$A \Delta A = \emptyset, \forall A$$

$$A \Delta B = B \Delta A, \forall A, B$$

$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C), \forall A, B, C.$$

1.2.5. Produkti kartezian (i drejtpërdrejt) i dy bashkësive

Simbolet e formës (a, b) quhen *dyshe të renditura*. Quhen të renditura sepse është me rëndësi se cili element ndodhet në vendin e parë e cili në të dytin. Barazimi ndërmjet dysheve të renditura përkufizohet si vijon:

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \wedge b = d.$$

Në mënyrë të ngjashme kemi përkufizimin e barazimit të dy n -sheve të renditura. D.m.th. $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ atëherë dhe vetëm atëherë, nëse $a_i = b_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Tani mund të japim përkufizimin e produktit kartezian.

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}.$$

Vetitë:

$$A \times \emptyset = \emptyset, \forall A$$

$$A \times B \neq B \times A$$

$$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$$

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C), \forall A, B, C$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \forall A, B, C$$

$$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C) \forall A, B, C$$

$$A \subseteq B \implies A \times C \subseteq B \times C, \forall C.$$

Produktin kartezian mund ta ilustrojmë edhe me ndihmën e një sistemi dekartezian.

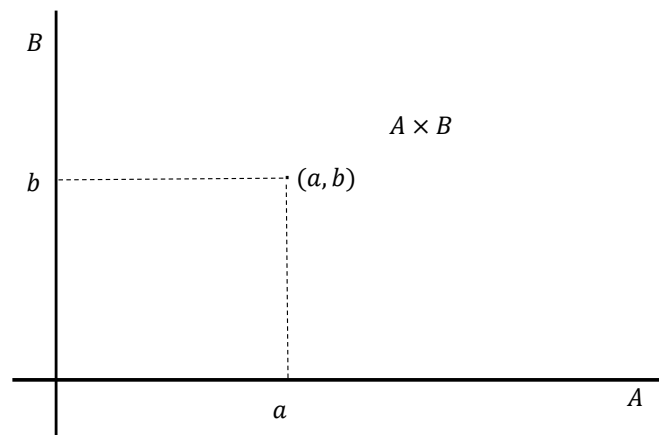


Fig. 1.13

Vërejtje 1.1. Në bazë të përkufizimit të produktit kartezian konstatuam se vetia asociative nuk vlen, por nëse ke dyshja e renditur $((a, b), c)$ i largojmë kllapat e brendshme, atëherë do të marrim treshen e renditur (a, b, c) , që d.m.th. se në këtë rast do vlenë ligji asociativ.

Duke pasur parasysh vërejtjen e mësipërme, atëherë produkti kartezian mund të përgjithësohet edhe për n bashkësi $A_i, i = 1, 2, \dots, n$ në këtë mënyrë:

$$\prod_{i=1}^n A_i = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Veprimet e mësipërme paraqesin veprimet binare me bashkësi. Por në bashkësinë e të gjitha bashkësive të mundshme (bashkësinë universale) përkufizohen edhe veprime unare. Një nga ato veprime është edhe bashkësia *partitive* ose e *pjesëve* të një bashkësie të dhënë.

1.2.6. Bashkësia partitive e një bashkësie

Le të jetë A një bashkësi e çfarëdoshme. Bashkësia $\mathcal{P}(A) = \{X | X \subseteq A\}$ quhet *bashkësi partitive e bashkësisë* A . P.sh. bashkësia partitive e bashkësisë

$A = \{a, b, c\}$ është

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Vërejmë se bashkësia partitive ka 8 elemente, kurse bashkësia A ka tri elemente dhe $8 = 2^3$.

Vetitë:

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\implies \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \\ \mathcal{P}(A \cap B) &= \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B). \end{aligned}$$

Nëse $\text{card } A = n$, atëherë lehtë vërtetohet (me induksion) se $\text{card } \mathcal{P}(A) = 2^n$.

Nëse $n = 0$, atëherë $A = \emptyset$, ndërsa bashkësia partitive e bashkësisë boshe është $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, që do të thotë se $\mathcal{P}(A)$ e ka një element. Pra $\text{card } \mathcal{P}(A) = 1 = 2^0$.

Supozojmë se pohimi vlen për $n = k$, d.m.th. për bashkësinë A_k me k -elemente, vlen $\text{card } \mathcal{P}(A) = 2^k$. Tregojmë se pohimi është i saktë edhe për $n = k + 1$. Me të vërtetë, për bashkësinë A_{k+1} me $k + 1$ -elemente, p.sh. $A_{k+1} = \{1, 2, \dots, k, k + 1\} = \{1, 2, \dots, k\} \cup \{k + 1\}$, vlen

$$\mathcal{P}(A_{k+1}) = \mathcal{P}(A_k) \cup \{X \cup \{k + 1\} \mid X \subseteq A_k\} \quad \text{dhe} \quad \mathcal{P}(A_k) \cap \{X \cup \{k + 1\} \mid X \subseteq A_k\} = \emptyset.$$

Kështu

$$\text{card } \mathcal{P}(A_{k+1}) = \text{card } \mathcal{P}(A_k) + \text{card}(\{X \cup \{k + 1\} \mid X \subseteq A_k\}) = 2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1},$$

sepse

$$\text{card } \mathcal{P}(A_k) = \text{card}(\{X \cup \{k + 1\} \mid X \subseteq A_k\}) = 2^k.$$

Kjo tregon se pohimi është i saktë për çdo $n = 0, 1, 2, \dots$

Vërtetimi i të njëjtit pohim mund të bëhet edhe duke ditur se numri i nënbashkësive me k elemente të një bashkësie me n elemente ($k \leq n$), është i barabartë me $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$, ($k = 0, 1, 2, \dots, n$). Tani, duke shfrytëzuar formulën e binomit $(a + b)^n$ për $a = b = 1$, numri i të gjitha nënbashkësive të një bashkësie A me n elemente, do të jetë

$$\text{card } \mathcal{P}(A) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = (1 + 1)^n = 2^n, (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Detyra në lidhje me bashkësitë

1. Shkruani elementet e bashkësive:

a) $A = \{x | x \in \mathbf{N} \wedge x^2 < 15\}$,

b) $B = \{x | x \in \mathbf{Z} \wedge x | 10\}$

c) $C = \{x | x \in \mathbf{Z} \wedge |x| = 2\}$.

Shprehja $x|y$ lexohet: "x e plotëpjesëton y", $x, y \in \mathbf{Z}$.

2. Janë dhënë bashkësitë: $A = \{a, a, a, b, b, c\}$ dhe $B = \{b, a, c\}$. Tregoni se $A = B$ dhe çfarë përfundimesh mund të nxjerrim nga ky barazim?

3. Caktoni $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ dhe $A \Delta B$ nëse:

a) $A = \{x | x \in \mathbf{Z} \wedge x | 2\}$, $B = \{x | x \in \mathbf{Z} \wedge x | 3\}$,

b) $A =$ bashkësia e drejtkëndshave në një rrafsh, $B =$ bashkësia e rombave në të njëjtin rrafsh.

4. Nëse $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A \cup \{1, 6, 8\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A \cap B = \{3, 7, 8\}$, $B \cup \{3, 4, 6\} = \{1, 3, 4, 6, 7, 8\}$, atëherë caktoni bashkësitë A dhe B .

Rez. $A = \{2, 3, 4, 5, 7, 8\}$, $B = \{1, 3, 6, 7, 8\}$

5. Në një klase me 30 nxënës brenda një jave janë notuar si vijon: 21 nxënës nga matematika, 19 nga fizika, 14 nga historia, 12 nga matematika dhe fizika, 7 nga matematika dhe historia, 5 nga fizika dhe historia dhe nga 2 nxënës vetëm nga një lëndë.

a) Sa nxënës janë notuar nga matematika por jo edhe nga historia?

b) Sa nxënës janë notuar vetëm prej dy lëndëve (nga tri të mundshme)?

c) Sa nxënës janë notuar nga tri lëndët e dhëna?

Udhëzim. Paraqitni diagramin e Venit.

6. Nxënësit e një klase (me 30 nxënës) flasin tri gjuhë: anglisht, frëngjisht dhe gjermanisht si vijon: 18 nxënës flasin anglisht, 12 gjermanisht, 13 frëngjisht, 5 anglisht dhe gjermanisht, 6 anglisht dhe frëngjisht dhe 4 frëngjisht dhe gjermanisht.

a) Sa nxënës flasin vetëm anglisht (gjermanisht, frëngjisht) ?

b) Sa nxënës flasin vetëm nga një gjuhë?

c) Sa nxënës flasin vetëm nga dy gjuhë prej tri të mundshmeve?

d) Sa nxënës flasin të tri gjuhët ?

Udhëzim. Paraqitni diagramin e Venit. Rez. (a) 9 nxënës (5–frëngjisht, 5–gjermanisht). (b) 19 nxënës. (c) 9 nxënës. (d) 2 nxënës.

7. Janë dhënë bashkësitë:

a) $A_n = \left\{ \frac{1}{n+k} \mid k \in \mathbf{N} \right\}, n \in \mathbf{N},$

b) $A_n = \left[0, \frac{1}{n} \right), n \in \mathbf{N},$

c) $A_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}, n \in \mathbf{N}.$

Njehsoni $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n$ dhe $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} A_n$

8. Janë dhënë bashkësitë: $A = [0, 1], B = [2, 3], C = [-3, 0.5], D = (-\infty, 2]$ dhe $E = (0, \infty).$

a) Njehsoni: $A \cup B, A \cup C, A \cap C, A \cap D, C \cap D, C \cap E, D \cup E$ dhe $D \cap E,$

b) Paraqitni grafikisht dhe tregoni se çka paraqesin bashkësitë: $A^2 = A \times A, A \times B, A \times D, A \times E, D \times E, A^3 = A \times A \times A.$

9. Shkruani bashkësitë partitive për bashkësitë: $A = \{0, 2, \{3\}\}$ dhe $B = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))).$

10. Çka mendoni, sa kohë do t'i nevojitej njeriut për ta shkruajtur bashkësinë partitive të një bashkësie me

a) 10 elemente,

b) 20 elemente,

c) 50 elemente,

d) 60 elemente?

Udhëzim. Supozoni se shpejtësia mesatare e shkruajtjes së një nënbashkësie për rastet a), b), c) respektivisht d) është $1 \frac{\text{bashkësi}}{4s}, 1 \frac{\text{bashkësi}}{8s}, 1 \frac{\text{bashkësi}}{20s}$. respektivisht $1 \frac{\text{bashkësi}}{25s}.$

11. Problemi i njëjtë si në det. 10 për kompjuterin, por bashkësia A ka 64 elemente. Supozoni se shpejtësia mesatare e caktimit të nënbashkësive për kompjuterin është $10^6 \frac{\text{bashkësi}}{s}.$

1.3. Pasqyrimet (funksionet) dhe llojet e tyre

1.3.1. Kuptimi i pasqyrimet (funksionit)

Lë të jenë dhënë dy bashkësi $A \neq \emptyset \neq B$.

Përkufizim 1.3.1.1. Rregulla (ligji) f sipas së cilës çdo elementi x të bashkësisë A i shoqërojmë një dhe vetëm një element y nga bashkësia B e quajmë pasqyrim (funksion) të bashkësisë A në bashkësinë B dhe simbolikisht e shënojmë me $f : A \rightarrow B$. Faktin që elementit $x \in A$ pasqyrimi f i shoqëron elementin $y \in B$ simbolikisht e shënojmë me $f : x \rightarrow y$, ose $f(x) = y$, ose $xf = y$. Bashkësia A quhet domena (fusha e përkufizimit), ndërsa B quhet kodomena e pasqyrimet (funksionit) f . Elementi $x \in A$ quhet origjinal, ndërsa $y = f(x) \in B$ quhet përfytyrë e x -it.

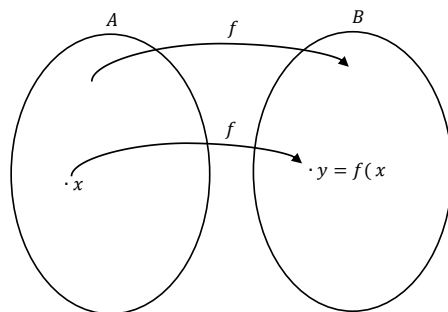


Fig. 1.14

Përkufizimin 1.3.1.1 me gjuhën e matematikës do të mund ta shprehim si vijon:

$$(\forall x \in A)(\exists! y \in B)(f(x) = y).$$

Pasqyrimet mund të jipen në mënyrë analitike, tabelare apo tekstuale. Mjafton të dihen domena, kodomena dhe rregulla (ligji) me ndihmën e së cilës çdo elementi të domenës i shoqërohet një dhe vetëm një element i kodomenës.

Shembulli 1.1. Janë dhënë bashkësitë $A = \{a, b, c\}$, $B = \{0, 1, 2\}$ dhe rregullat $f : A \rightarrow B$, $g : A \rightarrow B$, $h : B \rightarrow A$, $j : B \rightarrow A$ dhe $k : B \rightarrow A$ ashtu që:

$$\begin{aligned} f(a) = 1, f(b) = 0, f(c) = 2, & \quad g(a) = 0, g(b) = 0, g(c) = 2, \\ h(0) = a, h(1) = b, h(2) = c, & \quad h(0) = b, \quad j(0) = 1, j(1) = a, j(2) = b, \\ k(0) = a, k(1) = b, k(2) = b, & \quad k(2) = a. \end{aligned}$$

Lehtë shihet se rregullat f dhe g janë pasqyrimet, ndërsa rregullat h, j dhe k nuk janë. Të bëhen korrigjimet e nevojshme në mënyrë që edhe rregullat h, j, k të bëhen pasqyrimet.

Shembulli 1.2. Shembuj të pasqyrimëve janë edhe *notimi përfundimtar* nga një lëndë e caktuar i nxënësve të një klase, me kusht që të gjithë nxënësit të notohen ku domena e pasqyrimin është bashkësia e nxënësve të asaj klase, ndërsa kodomena është bashkësia $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, si dhe *emërtimi i njerëzve* me kusht që të mos kemi njeri pa emër apo njeri me dy apo më tepër emra.

Për pasqyrimin $f : A \rightarrow B$, bashkësia $R(f) = \{f(x) | x \in A\} \subseteq B$, quhet *rang* i pasqyrimin (funksionit).

Nga përkufizimi i pasqyrimin rrjedh se dy pasqyrimet $f : A \rightarrow B$ dhe $g : C \rightarrow D$ janë të *barabarta* dhe shkruajmë $f = g$ nëse $A = C$, $B = D$ dhe $f(x) = g(x)$ për çdo $x \in A = C$.

1.3.2 Llojet e pasqyrimëve

Pasqyrimin $f : A \rightarrow A$ quhet transformim i bashkësisë A .

Pasqyrimin $f : A \rightarrow B$ i tillë që $f(a) = b$ për çdo $a \in A$, ndërsa $b \in B$ quhet pasqyrim *konstant*.

Transformimi $f : A \rightarrow A$ i tillë që $f(a) = a$ për çdo $a \in A$ quhet transformim *identik* i bashkësisë A dhe simbolikisht shënohet me 1_A ose I_A .

Për pasqyrimin $f : A \rightarrow B$, pasqyrimin $g : A' \rightarrow B$, ku $A' \subseteq A$ quhet *ngushtim (restriksion)* i pasqyrimin f në bashkësinë $A' \subseteq A$ nëse $f(x) = g(x)$ për çdo $x \in A'$.

Pasqyrimin $f : A \times A \rightarrow A$ quhet veprim binar në bashkësinë A .

Pasqyrimin $f : A \rightarrow B$ i tillë që për $a \neq b$ rrjedh që $f(a) \neq f(b)$ për çdo $a, b \in A$ quhet pasqyrim *injektiv* ose *një-një(1-1)*. D.m.th. pasqyrim $f : A \rightarrow B$, i cili çdo dy origjinaleve të ndryshme u shoqëron përfytyra të ndryshme, quhet pasqyrim *injektiv*.

Pasqyrimin $f : A \rightarrow B$ i tillë që për çdo $b \in B$, ekziston $a \in A$ i tillë që $f(a) = b$ quhet pasqyrim *surjektiv* ose *mbi*. Është e qartë se pasqyrimin $f : x \rightarrow y$ është mbi nëse rangun e tij $R(f) = B$.

Pasqyrimin $f : A \rightarrow B$ i cili është njëkohësisht injektiv dhe surjektiv quhet pasqyrim *bijektiv*.

Çdo transformim bijektiv f i një bashkësie A quhet *permutacion* i asaj bashkësie. Nëse $\text{card } A = n$, atëherë lehtë provohet se numri i permutacioneve të bashkësisë A është $n! = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Është e qartë se kusht i nevojshëm që një pasqyrim f ndërmjet dy bashkësive të fundme A dhe B të jetë bijektiv, është që ato dy bashkësi të kenë numër të njëjtë të elementeve ($\text{card } A = \text{card } B$).

Shembulli 1.3. Le të jenë dhënë bashkësitë $A = \{a, b, c, d\}$ dhe $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Pasqyrimet $f : A \rightarrow B$, dhe $g : A \rightarrow B$ të dhëna me tabelën

$$f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

janë pasqyrime bijektive, ndërsa pasqyrimet , $h : A \rightarrow B$, dhe $j : A \rightarrow B$

$$h = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad j = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

nuk janë bijeksione.

Për dy bashkësi themi se janë të një fuqie (*ekvipotente*) nëse ekziston të paktën një pasqyrim bijektiv ndërmjet tyre. Nëse A dhe B janë bashkësi ekvipotente, atëherë këtë fakt simbolikisht e shkruajmë $\text{card } A = \text{card } B$.

1.3.3. Kompozimi i pasqyrimeve

Le të jenë dhënë pasqyrimet $f : A \rightarrow B$ dhe $g : B \rightarrow C$.

Përkufizim 1.3.3.1. Pasqyrimin $h : A \rightarrow C$ të përkufizuar me formulën $h(x) = g(f(x))$ e quajmë kompozim të pasqyrimet f me pasqyrimin g dhe simbolikisht e shkruajmë $h = g \circ f$.

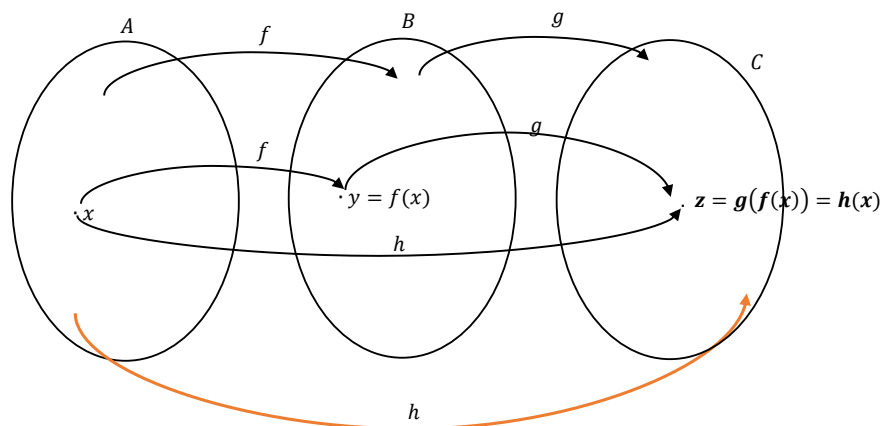


Fig. 1.15

Nga përkufizimi 1.3.3.1 shihet se jo çdo herë ekziston kompozimi i dy pasqyrimeve. Kusht i nevojshëm dhe i mjaftueshëm që të ekzistojë kompozimi i dy pasqyrimeve është që kodomena e të parit të jetë e barabartë me domenën e të dytit.

Vlen vetëm vetia asociative (e shoqërimit) për kompozimin e pasqyrimeve. Me të vërtetë, nëse janë dhënë pasqyrimet $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ dhe $h : C \rightarrow D$, atëherë për çdo $x \in A$ kemi:

$$\begin{aligned} ((h \circ g) \circ f)(x) &= (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) \text{ dhe } (h \circ (g \circ f))(x) = \\ &= (h(g \circ f)(x)) = h(g(f(x))), \end{aligned}$$

që d.m.th. $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Për pasqyrimet $f : A \rightarrow B$ dhe $g : B \rightarrow C$ dhe kompozimin e tyre $h = g \circ f : A \rightarrow C$ vlen kjo lemë

Lema 1.3.3.1. *i) Nëse h është injektiv, atëherë i tillë është edhe f ,*

ii) Nëse h është surjektiv, atëherë i tillë është edhe g .

Teorema 1.3.3.1. *Kompozimi i dy pasqyrimeve injektive (surjektive) përsëri është pasqyrim injektiv (surjektiv).*

Vërtetim. Le të jenë $f : A \rightarrow B$ dhe $g : B \rightarrow C$ pasqyrime injektive (surjektive) dhe $h = g \circ f : A \rightarrow C$ kompozimi i tyre. Tregojmë se h është pasqyrim injektiv (surjektiv).

Injektiviteti. Le të jenë $x_1, x_2 \in A$ dhe $x_1 \neq x_2$. Meqë f dhe g janë injektive, atëherë $f(x_1) \neq f(x_2)$ dhe $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$. Por $g(f(x_i)) = (g \circ f)(x_i) = h(x_i)$, ($i = 1, 2$), prandaj $h(x_1) \neq h(x_2)$, që d.m.th. se h është pasqyrim injektiv.

Surjektiviteti. Le të jetë $z \in C$. Atëherë ekziston $y \in B$ i tillë që $g(y) = z$. Meqë f është surjektiv, ekziston $x \in A$ i tillë që $f(x) = y$. Tani është e qartë se $h(x) = (g \circ f)(x) = z$. D.m.th. $h = g \circ f : A \rightarrow C$ është surjektiv.

Rjedhimi 1.3.3.1. *Kompozimi i dy pasqyrimeve bijektive përsëri është pasqyrim bijektiv.*

1.3.4. Pasqyrimi invers

Le të jetë dhënë pasqyrimi bijektiv $f : A \rightarrow B$.

Përkufizim 1.3.4.1. *Pasqyrimi $g : B \rightarrow A$ për të cilin $g \circ f = 1_A$ dhe $f \circ g = 1_B$ quhet pasqyrim invers i pasqyrimet f dhe simbolikisht shënohet me f^{-1} .*

Nga lema 1.3.4.1 vërejmë se pasqyrimi f dhe inversi i tij f^{-1} janë bijektive.

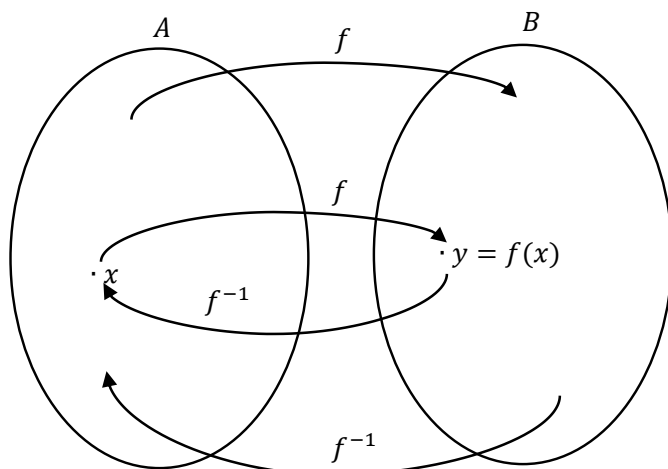


Fig. 1.16

Shembulli 1.4. Pasqyrimi invers për pasqyrimin bijektiv $f : A \rightarrow B$ ku $A = \{a, b, c, d\}$, dhe $B = \{1, 2, 3, 4\}$ i dhënë me $f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ është $f^{-1} : B \rightarrow A$ i dhënë me $f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ c & a & d & b \end{pmatrix}$.

Shembulli 1.5. Pasqyrimi $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ i dhënë me $f(x) = 2x + 3$ është bijektiv, prandaj ekziston pasqyrimi invers $f^{-1} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dhe $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$. Po t'i vizatojmë grafikët e funksioneve $y = f(x)$, $y = f^{-1}(x)$ dhe $y = x$, atëherë do të shohim se dy grafikët e parë janë simetrik ndaj të tretit (vizatoni). Kjo ndodh çdo herë.

Shembulli 1.6. Pasqyrimi $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ i dhënë me $f(x) = x^2$ nuk është bijektiv (pse?), prandaj nuk ekziston pasqyrimi invers i tij. Por, pasqyrimi $g : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ i dhënë me $g(x) = x^2$, ku $\mathbf{R}^+ = \{x | x \in \mathbf{R} \wedge x \geq 0\}$, është bijektiv (tregoni), prandaj ekziston pasqyrimi invers $g^{-1} : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ dhe $g^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Për pasqyrimet bijektive $f : A \rightarrow B$, dhe $g : B \rightarrow C$, provohet se janë të sakta relacionet:

$$(f^{-1})^{-1} = f, \quad (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}, \quad f^{-1}(f(X)) = X, \quad \forall X \subseteq A \quad \text{dhe} \\ f(f^{-1}(X)) = X, \quad \forall X \subseteq B.$$

1.4. Disa funksione karakteristike

1.4.1. Vlera absolute. Vlera absolute përkufizohet si pasqyrim $|\cdot| : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ i përkufizuar me barazimin

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{nëse } x \geq 0 \\ -x, & \text{nëse } x < 0. \end{cases}$$

Vërejmë se $|x| \geq 0$, për çdo $x \in \mathbf{R}$, ndërsa grafiku i funksionit $f(x) = |x|$ është paraqitur në figurën 1.17.

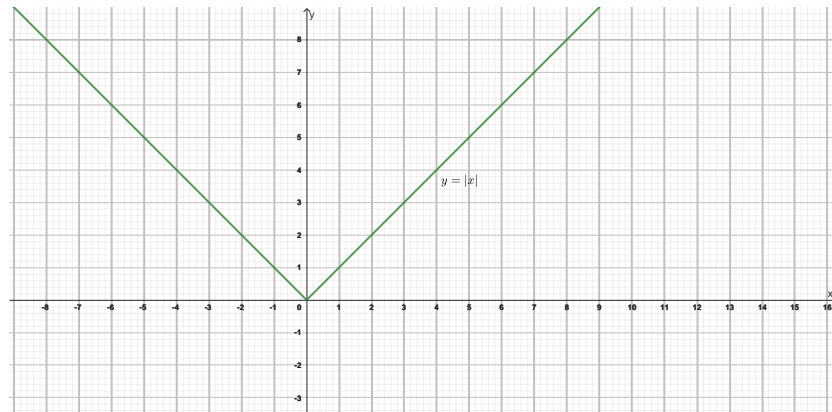


Fig. 1.17

Vetitë:

- $||x|| = |x|, \forall x \in \mathbf{R},$
- $|xy| = |x| \cdot |y|, \forall x, y \in \mathbf{R},$
- $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \forall x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R} \setminus \{0\},$
- $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbf{R},$ (relacioni i brinjëve të trekëndëshit),
- $||x| - |y|| \leq |x - y|, \forall x, y \in \mathbf{R}.$

1.4.2. Funksioni signum (i shenjës) sgn. Ky funksion përkufizohet si pasqyrim $\text{sgn} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ i tillë që

$$\text{sgn } x = \begin{cases} 1, & \text{nëse } x > 0 \\ 0, & \text{nëse } x = 0 \\ -1, & \text{nëse } x < 0. \end{cases}$$

Grafiku i këtij funksioni është dhënë në figurën 1.18.

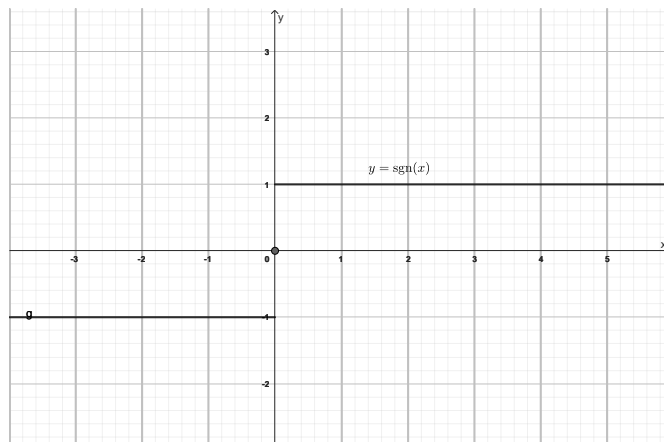


Fig. 1.18

Vetitë:

- a) $\operatorname{sgn}(\operatorname{sgn} x) = \operatorname{sgn} x$,
 b) $\operatorname{sgn} x = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|}$ për $x \neq 0$,
 c) $\operatorname{sgn}(xy) = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y$ dhe $\operatorname{sgn}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\operatorname{sgn} x}{\operatorname{sgn} y}$, $y \neq 0$.

1.4.3. Pjesa e plotë $[\]$. Pasqyrimi $[\] : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ i përkufizuar me barazimin

$$[x] = k \iff k \leq x < k + 1, k \in \mathbf{Z} \quad (1)$$

quhet *pjesa e plotë*.

P.sh. $[0.34] = [0.56] = [0.999999] = [1 - \sqrt{2}] = 0$, $[2\sqrt{3}] = [3.11] = [3.677] = [3.999] = 3$, $[-0.34] = [-0.689] = -1$, $[-2.344] = [-2.999] = -3$, etj.

Grafiku i funksionit $f(x) = [x]$ është dhënë në figurën 1.19.

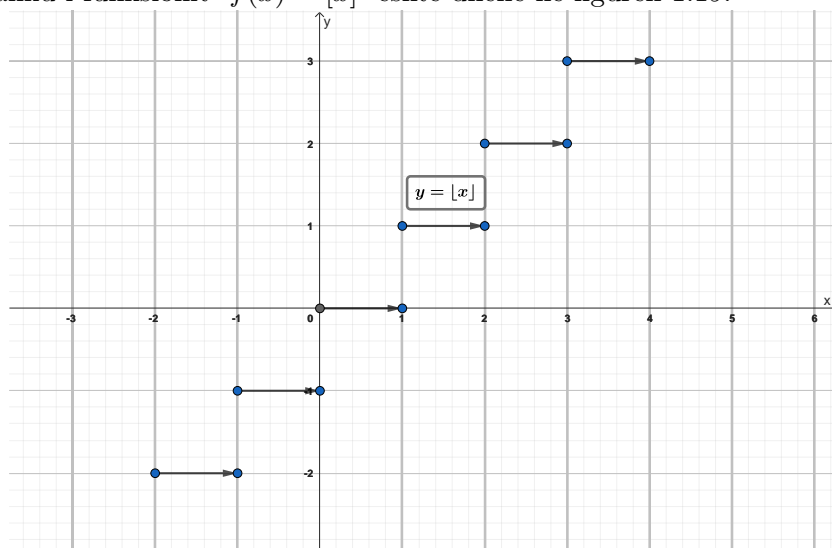


Fig. 1.19

Vërejtje 1.2. Në literaturë (matematikë dhe shkencë kompjuterike) hasim dy lloje të pjesëve të plota: pjesa e plotë e poshtme e e x -it (ang. *floor of x*) dhe pjesa e plotë e sipërme e x -it (ang. *ceiling of x*), të cilat përkufizohen në këtë mënyrë:

$$\lfloor x \rfloor = k \iff k \leq x < k + 1, \quad k \in \mathbf{Z},$$

respektivisht

$$\lceil x \rceil = k + 1 \iff k < x \leq k + 1, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

P.sh. $\lfloor 0.34 \rfloor = 0$, $\lfloor 1.25 \rfloor = 1$, $\lfloor -2.5 \rfloor = -3$, ndërsa $\lceil 0.34 \rceil = 1$, $\lceil 1.25 \rceil = 2$, $\lceil -2.5 \rceil = -2$, si dhe $\lfloor k \rfloor = \lceil k \rceil = k$, për çdo $k \in \mathbf{Z}$. Nga relacionet e mësipërme shihet se $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$.

Ngjashëm përkufizohet edhe funksioni $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \{x\} = x - \lfloor x \rfloor$, i cili njihet si *pjesa thyesore* e x -it. P.sh.

$$\begin{aligned} f(1.45) &= \{1.45\} = 1.45 - \lfloor 1.45 \rfloor = 1.45 - 1 = 0.45; \\ f(0.8) &= \{0.8\} = 0.8 - \lfloor 0.8 \rfloor = 0.8 - 0 = 0.8; \\ f(-2.26) &= \{-2.26\} = -2.26 - \lfloor -2.26 \rfloor = -2.26 - (-3) = 0.74; \\ f(3) &= \{3\} = 3 - \lfloor 3 \rfloor = 3 - 3 = 0. \end{aligned}$$

Vërejmë se vlerat e këtij funksioni i takojnë intervalit $[0, 1)$ dhe është periodik me periodë 1.

1.4.4. Funksioni karakteristik i bashkësisë A (χ_A). Le të jetë dhënë bashkësia e çfarëdoshme $A \subseteq U$, ku U është bashkësia universale (më e "madhja" e mundshme). Atëherë, funksioni $\chi_A : U \rightarrow \mathbf{R}$ i përkufizuar me barazimin

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{nëse } x \in A \\ 0, & \text{nëse } x \notin A, \end{cases}$$

quhet funksion *karakteristik* i bashkësisë A .

Nëse $A = \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}$, ndërsa $U = \mathbf{R}$, atëherë funksioni $\chi_{\mathbf{Q}} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ i tillë që

$$\chi_{\mathbf{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{nëse } x \in \mathbf{Q} \\ 0, & \text{nëse } x \notin \mathbf{Q}, \end{cases}$$

quhet funksioni i *Dirihleut* (Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1805–1859) matematikan gjerman).

Për këtë funksion nuk ekziston grafiku, edhe pse mund të caktojmë pakufi shumë pika të tij. Ky funksion është i një rëndësie të veçantë në analizën matematike, sepse është i kufizuar ($0 \leq f(x) \leq 1$, $f(x) \in \{0, 1\}$); nuk ka limit në asnjë pikë $x \in \mathbf{R}$; nuk është i vazhdueshëm në asnjë pikë $x \in \mathbf{R}$ dhe nuk është i integrueshëm në asnjë segment $[a, b]$ të bashkësisë së numrave realë \mathbf{R} , edhe pse është i kufizuar.

Detyra në lidhje me pasqyrimet (funksionet)

1. Janë dhënë rregullat $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{N}$, $g : \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Z}$, $h : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ të përkufizuara me barazimet përkatëse: $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = g\left(\frac{p}{q}\right) = p$, $h(n) = 2n - 1$. Cilat nga rregullat e mësipërme janë pasqyrime e cilat jo?

Zgjidhje. Rregullat f dhe g nuk janë pasqyrime, sepse $f(\pm 1) = (\pm 1)^2 - 1 = 0$, ndërsa $0 \notin \mathbf{N}$; $g(2) = g\left(\frac{2}{1}\right) = 2$, $g(2) = g\left(\frac{4}{2}\right) = 4$, ndërsa rregulla h është pasqyrim.

2. Janë dhënë pasqyrimet $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dhe $g : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ të përkufizuara me $f(x) = x^2 + 1$ dhe $g(x) = x^2 + 1$. A janë të barabarta këto dy pasqyrime?

Zgjidhje. Meqë $Df \neq Dg$, ku Df është domena e funksionit f , përfundojmë se pasqyrimet nuk janë të barabarta.

3. Gjeni të gjitha pasqyrimet nga bashkësia $A = \{a, b, c\}$ në bashkësinë $B = \{1, 2\}$. Sa është numri i tyre dhe përgjithësoni rezultatin nëse $\text{card } A = m$ dhe $\text{card } B = n$?

Zgjidhje. Pasqyrimet e kërkuara janë:

$$f_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, f_4 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f_5 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, f_6 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, f_7 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, f_8 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Nëse me $B^A = \{f | f : A \rightarrow B\}$ shënojmë bashkësinë e të gjitha pasqyrimeve nga bashkësia A në bashkësinë B , ndërsa $\text{card } A = m$, $\text{card } B = n$, atëherë $\text{card } B^A$ është i barabartë me numrin e variacioneve me përsëritje të gjatësisë $m (= \text{card } A)$ të bashkësisë B me n -elemente. Meqë ky numër është i barabartë me n^m , prandaj $\text{card } B^A = n^m = \text{card } B^{\text{card } A}$.

4. Është dhënë bashkësia $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dhe pasqyrimi $f : \mathcal{P}(A) \rightarrow B$ i përkufizuar me $f(X) = \text{card } X$.

a) Caktoni bashkësinë B ,

b) Çfarë pasqyrimi është f ?

Zgjidhje. a) Bashkësia $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

b) Pasqyrimi f është surjektiv (mbi), por nuk është injektiv, sepse p.sh. $f(\{1\}) = f(\{2\}) = f(\{3\}) = f(\{3\}) = f(\{4\}) = 1$ edhe pse $\{1\} \neq \{2\} \neq \{3\} \neq \{4\}$.

5. Janë dhënë pasqyrimet $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 3x - 1$, $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = x^2$ dhe $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$, $h(x) = x^2$. Caktoni llojin e pasqyrimet për secilin prej tyre.

Rez. Pasqyrimi f është bijektiv, g nuk është as injektiv dhe as surjektiv, ndërsa h është surjektiv, por nuk është injektiv.

6. Janë dhënë pasqyrimet $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+ \setminus \{0\}$, $f(x) = 2^x$ dhe $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $g(x) = x^2$. Tregoni se f dhe g janë bijeksione.

Zgjidhje. 1. Le të jenë $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ dhe $x_1 \neq x_2$. Atëherë, $2^{x_1} \neq 2^{x_2}$, që d.m.th. se $f(x_1) \neq f(x_2)$, prandaj pasqyrimi f është injektiv.

Për çdo $y \in \mathbf{R}^+ \setminus \{0\}$, ekziston numri $x = \log_2 y \in \mathbf{R}$ i tillë që $f(x) = f(\log_2 y) = 2^{\log_2 y} = y$. D.m.th. pasqyrimi f është surjektiv. Rrjedhimisht f është pasqyrim bijektiv.

Ngjashëm tregohet se edhe pasqyrimi g është bijektiv.

7. Janë dhënë pasqyrimet bijektive $f : A \rightarrow B$ dhe $g : B \rightarrow C$. Tregoni se $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
8. Tregoni se pasqyrimi $f : \mathbf{R}^+ \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$ i përkufizuar me formulën $f(x) = \ln x$ është bijektiv.
9. Tregoni se bashkësitë $I = (a, b)$ dhe \mathbf{R} janë të një fuqie (ekvipotente), d.m.th. $\text{card } I = \text{card } \mathbf{R}$.

Zgjidhje. Duhet të ndërtojmë të paktën një pasqyrim bijektiv ndrmjet bashkësive I dhe \mathbf{R} . Për këtë qëllim, së pari ndërtojmë një pasqyrim bijektiv f ndërmjet bashkësive I dhe $J = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Pasqyrimi $f : I \rightarrow J$ i përkufizuar me formulën $f(x) = \frac{\pi}{b-a}(x-a) - \frac{\pi}{2}$ është bijektiv (si funksion linear).

Po ashtu, edhe pasqyrimi $g : J \rightarrow \mathbf{R}$ i përkufizuar me $g(x) = \tan x$ është bijektiv (tregoni!). Tani, pasqyrimi $h = g \circ f : I \rightarrow \mathbf{R}$ është bijektiv (si kompozim i dy pasqyrimeve bijektive), ku $h(x) = \tan \left(\frac{\pi}{b-a}(x-a) - \frac{\pi}{2} \right) = -\cot \left(\frac{\pi}{b-a}(x-a) \right)$ është pasqyrimi i kërkuar. D.m.th. $\text{card } (a, b) = \text{card } \mathbf{R} = \text{c-kontinum}$.

10. Vizatoni grafikët e këtyre funksioneve $f(x) = \{x\} = x - [x]$, $g(x) = |2x - 3|$, $h(x) = |\{x\} - 0.5|$. Çka mund të thuhet për periodicitetin e tyre? Nëse ndonjëri prej tyre është periodik, caktoni periodën e tij.

Për funksionin $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ themi se është *periodik* me periodë $T > 0$, nëse $f(x+T) = f(x)$, për çdo $x \in \mathbf{R}$.

11. Në Shkencat kompjuterike çdo nënbashkësi e fundme dhe joboshe Σ quhet *alfabet*, elementet e të cilës i quajmë *shkronja*, ndërsa çdo varg i fundmë me elemente nga Σ quhet *fjalë*. Numri i shkronjave në një fjalë quhet *gjatësi* e fjalës. Shqyrtoni se sa fjalë të gjatësisë 1; 2; 3; 20; 100, respektivisht mund t'i formojmë nga alfabeti

$$(a) \quad \Sigma = \{0, 1\}, \quad (b) \quad \Sigma = \{0, 1, 2\}, \quad (c) \quad \Sigma = \{0, 1, 2, 3\}?$$

Shqyrtoni numrin e të gjitha fjalëve të mundshme deri te gjatësia 20.

1.5. Gjykimet dhe kuntifikatorët

1.5.1. Gjykimet dhe veprimet me gjykime

Të shprehurit e përditshëm, qoftë me shkrim apo me gojë, përbëhet prej fjalive të ndryshme me ndihmën e të cilave shprehim një mendim, p.sh. pohojmë, mohojmë, japim urdhëra, këshillojmë, etj. Të gjitha fjalitë e përdorura mund t'i klasifikojmë në dy grupe: në fjalitë për të cilat mund të vendosim se janë të sakta ose të pasakta dhe në grupin tjetër fjalitë për të cilat një gjë e tillë është e pamundur. P.sh. "Prishtina është kryeqyteti i Kosovës", "Lumi Drini i Bardhë buron në Prizren", "Çdo katërkëndësh është katror", " $3 > 4$ ", etj. Secila nga fjalitë e mësipërme është e saktë ose e pasaktë; ndërsa për fjalitë: "Teuta merre librin!", "Do të ishte mirë nëse mësoni më shumë!", etj. një gjë e tillë nuk është e mundur. Fjalitë e para janë gjykime, ndërsa të dytat jo. Marrim këtë

Përkufizim 1.5.1.1. *Çdo thënie, fjali e cila ka një dhe vetëm një vlerë të saktësisë të saktë ose të pasaktë e quajmë gjykim.*

Gjykimet zakonisht shënohen me shkronja të vogla alfabetit latin si p, q, r, s, t, \dots . Nëse me \mathcal{G} shënojmë bashkësinë e të gjitha gjykimeve, atëherë të shoqëruarit e vlerës së saktësisë mund ta konsiderojmë si pasqyrim $\mathcal{V} : \mathcal{G} \rightarrow \{\top, \perp\}$.

Negacioni është një veprim unar i cili çdo gjykimi p i shoqëron një gjykim të ri $\neg p$ i cili është i saktë kur p është i pasaktë dhe është i pasaktë kur p është i saktë. Tabela e saktësisë për $\neg p$ është:

| p | $\neg p$ |
|---------|----------|
| \top | \perp |
| \perp | \top |

Konjunksioni është një veprim binar i cili dy gjykimeve p dhe q u shoqëron një gjykim të ri, i cili është i saktë vetëm në rastin kur të dy gjykimet janë të sakta. Tabela e saktësisë e konjunksionit është

| p | q | $p \wedge q$ |
|---------|---------|--------------|
| \top | \top | \top |
| \top | \perp | \perp |
| \perp | \top | \perp |
| \perp | \perp | \perp |

Vetitë:

- | | | |
|------------------------------|---|------------------|
| (1) $p \wedge \top = p$ | (3) $p \wedge q = q \wedge p$ | ligji komutativ |
| (2) $p \wedge \perp = \perp$ | (2) $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$ | ligji asociativ. |

Disjunksioni—është një veprim binar i cili dy gjykimeve p dhe q u shoqëron një gjykim të ri i cili është i pasaktë vetëm në rastin kur të dy gjykimet janë të pasakta, ndërsa në rastet tjera është i saktë. Tabela e saktësisë e disjunksionit është

| p | q | $p \vee q$ |
|---------|---------|------------|
| \top | \top | \top |
| \top | \perp | \top |
| \perp | \top | \top |
| \perp | \perp | \perp |

Vetitë:

- $$\begin{aligned}
 (1) \quad p \vee \perp &= p & (4) \quad (p \vee q) \vee r &= p \vee (q \vee r) \\
 (2) \quad p \vee \top &= \top & (5) \quad p \wedge (q \vee r) &= (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\
 (3) \quad p \vee q &= q \vee p & (6) \quad p \vee (q \wedge r) &= (p \vee q) \wedge (p \vee r).
 \end{aligned}$$

Poashtu vlejné edhe ligjet e De-Morganit:

- $$(1) \quad \neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q \quad (2) \quad \neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q.$$

Implikacioni. Para se të japim përkufizimin formal të këtij veprimi me ndihmën e tabelës, së pari le të analizojmë këtë shembull:

Le të shënojmë me p përkatësisht q gjykimet:

p : "Teuta ndodhet në klasë" dhe

q : "Teuta ndodhet në shkollë".

Vërejmë që gjykimi p është i mjaftueshëm për gjykimin q ; kjo do të thotë se nëse Teuta ndodhet në klasë, atëherë ajo ndodhet edhe në shkollë. A thua gjykimi q është i mjaftueshëm për gjykimin p ? Jo, sepse Teuta mund të ndodhet në shkollë e të mos ndodhet në klasë. Atëherë gjykimi q mos është i domosdoshëm për gjykimin p ? Po, sepse Teuta duhet patjetër të ndodhet në shkollë në mënyrë që ajo të ndodhet në klasë. Pra, gjykimi q është i domosdoshëm (nevojshëm) për gjykimin p . Tabela e saktësisë për implikacionin është

| p | q | $p \implies q$ |
|---------|---------|----------------|
| \top | \top | \top |
| \top | \perp | \perp |
| \perp | \top | \top |
| \perp | \perp | \top |

Ekivalenca. Ekuivalenca është një veprim binar i cili përkufizohet me ndihmën e konjunksionit dhe implikacionit.

$$p \iff q = (p \implies q) \wedge (q \implies p). \quad (1)$$

Ekuacioni (1) tregon se gjykimi $p \iff q$ është i saktë vetëm në rastin kur të dy gjykimet p dhe q kanë vlerë të njëjtë të saktësisë. Me fjalë të tjera gjykimi p është i nevojshëm dhe i mjaftueshëm për gjykimin q dhe anasjelltas. Tabela e saktësisë është

| p | q | $p \iff q$ |
|-----|-----|------------|
| ⊤ | ⊤ | ⊤ |
| ⊤ | ⊥ | ⊥ |
| ⊥ | ⊤ | ⊥ |
| ⊥ | ⊥ | ⊤ |

P.sh. gjykimi p : "Numri n është i plotëpjesëtueshëm me 2 dhe 3" është i nevojshëm dhe i mjaftueshëm për gjykimi q : "Numri n është i plotëpjesëtueshëm me 6" dhe anasjelltas.

Disjunksioni ekskluziv është një veprim binar i cili përkufizohet me ndihmën e negacionit dhe të ekuivalencës.

$$p \vee\vee q = \neg(p \iff q).$$

Tabela e saktësisë për disjunksionin ekskluziv është

| p | q | $p \vee\vee q$ |
|-----|-----|----------------|
| ⊤ | ⊤ | ⊥ |
| ⊤ | ⊥ | ⊤ |
| ⊥ | ⊤ | ⊤ |
| ⊥ | ⊥ | ⊥ |

1.5.2. Formulatat e gjykimeve. Tautologjitë

Secili nga veprimet e mësipërme me gjykime gjeneron një *formulë* të gjykimeve, sppsë për vlera të caktuara të ndryshoreve të gjykimeve i korrespondon një vlerë e vetme e saktësisë. Me fjalë të tjera *formulë të gjykimeve* quajmë çdo shprehje në të cilën figurojnë një numër i fundmë i ndryshoreve logjike e në të cilat është zbatuar një numër i fundmë i veprimeve me gjykime. P.sh. shprehjet $\neg p$, $\neg(p \wedge q)$, $p \implies (q \implies r)$, etj. janë formula gjykimesh. Për një formulë të gjykimeve F është e rëndësishme që të caktohet vlera e saktësisë së saj për të gjitha vlerat e

mundshme të ndryshoreve që marrin pjesë në formulë. Vlen të theksojmë se nëse në formulë marrin pjesë n ndryshore, atëherë gjithsej kemi 2^n mundësi për vlerat e mundshme të ndryshoreve. Kjo d.m.th. se tabela e saktësisë do të kishte gjithsej 2^n rreshta (pse?).

Shembulli 2.2.1. Të formojmë tabelën e saktësisë për formulat $(p \wedge q) \implies r$ dhe $\neg(p \vee q) \iff \neg p \wedge \neg q$.

| p | q | r | $p \wedge q$ | $(p \wedge q) \implies r$ |
|---------|---------|---------|--------------|---------------------------|
| \top | \top | \top | \top | \top |
| \top | \top | \perp | \top | \perp |
| \top | \perp | \top | \perp | \top |
| \top | \perp | \perp | \perp | \top |
| \perp | \top | \top | \perp | \top |
| \perp | \top | \perp | \perp | \top |
| \perp | \perp | \top | \perp | \top |
| \perp | \perp | \perp | \perp | \top |

Të formojmë tabelën e saktësisë për formulën $F = \neg(p \vee q) \iff \neg p \wedge \neg q$.

| p | q | $p \vee q$ | $\neg(p \vee q)$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $\neg p \wedge \neg q$ | F |
|---------|---------|------------|------------------|----------|----------|------------------------|--------|
| \top | \top | \top | \perp | \perp | \perp | \perp | \top |
| \top | \perp | \top | \perp | \perp | \top | \perp | \top |
| \perp | \top | \top | \perp | \top | \perp | \perp | \top |
| \perp | \perp | \perp | \top | \top | \top | \top | \top |

Nga tabela e fundit vërejmë se vlera e saktësisë së formulës F është e saktë për të gjitha vlerat e mundshme të saktësisë të ndryshoreve. Formulatat e tilla quhen *tautologji*. Më saktë marrim këtë

Përkufizim 1.5.2.1. Çdo formulë e gjykimeve e cila merr vlerën e saktë të saktësisë për të gjitha vlerat e mundshme të ndryshoreve të gjykimeve që marrin pjesë në formulë quhet tautologji.

Nëse një formulë F është tautologji, simbolikisht e shënojmë me $\models F$. Formulatat që vijojnë janë tautologji. I mbetet lexuesit për detyrë që të vërtetojë

saktësinë e formulave.

| | | |
|-----|---|--|
| (1) | $\models (p \vee \neg p)$ | ligji i përjashtimit të së tretës |
| (2) | $\models \neg(p \wedge \neg p)$ | ligji i kontradiksionit |
| (3) | $\models p \wedge (p \implies q) \implies q$ | ligji i thjeshtimit |
| (4) | $\models \neg(\neg p) \iff p$ | ligji i negacionit të dyfishtë |
| (5) | $p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ | ligji distributiv i \wedge ndaj \vee |
| (6) | $p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ | ligji distributiv i \vee ndaj \wedge |
| (7) | $\models \neg(p \wedge q) \iff \neg p \vee \neg q$ | ligji i De-Morganit |
| (8) | $\models \neg(p \vee q) \iff \neg p \wedge \neg q$ | ligji i De-Morganit. |

1.5.3. Kuantifikatorët (fjalët: çdo, ndonjë)

Në komunikimin e përditshëm gjuha luan rol qendror. Edhe në matematikë ekziston një bashkësi simbolesh me ndihmën e të cilave shprehim thënie, përkufizime, pohime, etj., që në fakt përbëjnë gjuhën e matematikës. Kuantifikatorët janë fjalët *çdo* (\forall) dhe *ndonjë* (\exists), të cilat shprehin sasi. P.sh. faktin (fjalinë): ”Çdo numër natyror është edhe numër i plotë”, me ndihmën e kuantifikatorëve e shprehim

$$(\forall x \in \mathbf{N}) \implies (x \in \mathbf{Z}),$$

ndërsa faktin: ”Çdo njëri nga numrat 2, 3, 4, 6 janë faktorë të numrit 12”, simbolikisht e shprehim si

$$(\forall x \in \{2, 3, 4, 6\})(x|12).$$

Fjala *çdo* (\forall), quhet *kuantifikator i përgjithshëm (universal)* dhe mund të interpretohet si: secili, cilido apo të gjithë. Fjala *ndonjë* (\exists) mund të interpretohet si: së paku një, bile një, ekziston të paktën një.

Rast i veçantë i kuantifikatorit të fundit është edhe kuantifikatori $\exists!$, i cili tregon se *ekziston vetëm një* (p.sh. element nga një bashkësi që ka vetinë V).

Shembulli 2.3.1. Me ndihmën e kuantifikatorëve t'i shprehim fjalitë (thëniet) që vijnë:

- Çdo numër racional është numër real.
- Ekuacioni $x + 2 = 5$ ka zgjidhje në bashkësinë \mathbf{N} .
- Nëpër çdo dy pika të ndryshme ekziston drejtëza e cila kalon (i përmban) nëpër ato pika.
- Shuma e çdo dy numrave të plotë përsëri është numër i plotë.
- Herësi i çdo dy numrave të plotë nuk është numër i plotë.
- Për çdo numër real ekziston i kundërti në lidhje me mbledhjen.
- Jo për çdo numër real rrënja katrore është përsëri numër real.

Zgjidhje. (a) $(\forall x \in \mathbf{Q})(x \in \mathbf{R})$.

- (b) $(\exists x \in \mathbf{N})(x + 2 = 5)$.
- (c) $(\forall A, B)(A \neq B)(\exists a)(A, B \in a)$.
- (d) $(\forall x, y \in \mathbf{Z})(x + y \in \mathbf{Z})$.
- (e) $(\exists x, y \in \mathbf{Z})(x : y \notin \mathbf{Z})$.
- (f) $(\forall x \in \mathbf{R})(\exists y \in \mathbf{R})(x + y = 0)$.
- (g) $(\exists x \in \mathbf{R})(\sqrt{x} \notin \mathbf{R})$.

Detyra në lidhje me gjykimet dhe veprimet me gjykime

- Tregoni se cilat nga gjykimet (fjalitë) janë të sakta:
 - $\emptyset = \{\emptyset\}$,
 - $0 \in \emptyset$,
 - $\emptyset = \{ \}$,
 - $\emptyset \in \{\emptyset\}$,
 - $\{0\} = \emptyset$.
- Formoni tabelat e saktësisë për formulat:
 - $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$, (b) $p \implies (q \wedge r)$, (c) $(p \implies q) \iff (\neg q \implies \neg p)$.
 A është ndonjëra nga formulat tautologji?
- Shqyrtoni se formulat A dhe B a kanë vlerën e njëjtë të saktësisë nëse
 - $A : p \implies q$; $B : \neg p \vee q$, (c) $A : \neg(p \vee q)$; $B : \neg p \wedge \neg q$,
 - $A : p \implies q$; $B : \neg q \implies \neg p$, (d) $A : \neg(p \implies q)$; $B : p \wedge q$.
- Për cilat vlera të ndryshoreve logjike p, q, r , formula $(p \vee r) \implies q$ ka vlerën e pasaktë të saktësisë (\perp)?
- Vërtetoni se formulat që vijojnë janë tautologji:
 - $\models p \wedge p \iff p$, (d) $\models p \vee (p \wedge q) \iff p$,
 - $\models p \vee p \iff p$, (e) $\models \neg(p \vee q) \iff \neg p \wedge \neg q$,
 - $\models p \wedge (p \vee q) \iff p$, (f) $\models \neg(p \wedge q) \iff \neg p \vee \neg q$.
- Të shkruhen si formula (me ndihmën e kuantifikatorëve) fjalitë që vijojnë:
 - Në një rrafsh α ekzistojnë drejtëzat p dhe q të cilat nuk priten.
 - Shuma e çdo dy numrave të plotë përsëri është numër i plotë.
 - Nëpër çdo tri pika jokolineare kalon vetëm një rrafsh.
- Formulat e dhëna të shprehen me fjalë:
 - $(\exists x \in \mathbf{N})(x + 6 = 8)$, (d) $(\exists x \in \mathbf{N})(\forall y \in \mathbf{N})(x \cdot y = y)$,
 - $\neg(\exists x \in \mathbf{R})(x^2 + 1 = 0)$, (e) $(\forall x \in \mathbf{R})(\forall y \in \mathbf{R})(x \cdot y = y \cdot x)$,
 - $(\forall x \in \mathbf{R})(x^2 \geq 0)$, (f) $(\forall x, y \in \mathbf{Q})(x < y)(\exists z \in \mathbf{Q})(x < z < y)$.
- Është dhënë funksioni $f : \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$ me formulën $f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3}$.
Caktoni vlerën e saktësisë për gjykimet që vijojnë:
 - $f(1) = -1$, (c) $f(-1) = \frac{3}{2}$, (e) $f(f(0.5)) \geq -1$,
 - $f(2) > 1$, (d) $f(x) = f(-x)$, (f) $f(f(-1.5)) < 1$.

Kapitulli II

Polinomet dhe shprehjet racionale algjebrike

Para se të japim kuptimin e polinomit, do të përkufizojmë fuqitë dhe rrënjët dhe do të shohim se fuqitë janë mjaft komplekse në matematikë, veçanërisht kur bëhet fjalë për vërtetimin e vetive të fuqive.

2.1. Fuqizimi

Sikurse veprimi i shumëzimit që e "shkurton" (thjeshton) mbledhjen, ashtu edhe fuqia është përkufizuar për ta thjeshtësuar dhe shpejtuar veprimin e shumëzimit. Rëndësia e tyre është jashtzakonisht e madhe si në matematikë, ashtu edhe në fusha tjera si në: fizikë, kimi, inxhinieri, ekonomi, financa, etj. Pa fuqitë, nuk do të kishte zhvillim ekonomik dhe as industrial. Fuqitë, së pari janë përkufizuar vetëm me eksponenta (tregues) numra natyrorë, ndërsa më vonë ky kuptim i rëndësishëm matematikor është zgjeruar edhe për eksponenta nga bashkësia e numrave të plotë, racionalë, atyre realë dhe kompleksë. Në këtë kurs ne do të përkufizojmë vetëm fuqitë me eksponenta nga bashkësia e numrave natyralë, të plotë dhe atyre racionalë. Për përkufizimin e fuqive me eksponenta numra irracionalë (apo atyre kompleksë) shrytëzohet një aparat më i lartë (sofistikuar) matematik. Ne do t'i marrim apriori si të njohura vetitë edhe për fuqitë me eksponenta numra irracionalë (apo atyre kompleksë), nga që vlejné të njëjtat veti edhe për ato fuqi, sikurse vetitë për fuqitë me eksponenta nga bashkësia e numrave të plotë dhe atyre racionalë.

Përkufizim 2.1.1. *Prodhimi*

$$\underbrace{a \cdot \dots \cdot a \cdot a}_{n\text{-herë}} = a^n, \quad a \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}$$

quhet fuqi. Numri a quhet baza e fuqisë, ndërsa n quhet eksponenti i fuqisë. Me definicion merret se $a^1 = a$. Vërtetohet se vlejné këto veti të fuqive për fuqitë me eksponenta numra natyrorë m dhe n :

Vetitë.

1. $a^n \cdot a^m = a^{m+n}$
2. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \ (n > m)$
3. $(ab)^n = a^n b^n$
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$
5. $(a^m)^n = a^{mn}$

Duhet të jemi të kujdesshëm me vetinë 2, e cila vlen për $n > m$ dhe jo për $n \leq m$ (pse?). P.sh.

$$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128; \quad \frac{2^4}{2^2} = 2^{4-2} = 2^2 = 4; \quad (2 \cdot 3)^3 = 2^3 \cdot 3^3 = 8 \cdot 27 = 216;$$

$$(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12} = 4096.$$

Në mënyrë që kuptimi i fuqisë të zgjerohet edhe për eksponenta numra të plotë, duhet adaptuar dy barazime:

$$a^0 = 1, a^{-n} = \frac{1}{a^n}, n \in \mathbf{N} \text{ dhe } a \neq 0. \quad (1)$$

Barazimet e mësipërme nuk mund të vërtetohen, por janë adoptuar me marrëveshje dhe qëllimi ka qenë që kuptimi i fuqisë të zgjerohet edhe për eksponenta numra të plotë negativë dhe zeron dhe të ruhen vetitë 1-5 të fuqive për eksponenta numra natyrorë.

Tani, duke pasur parasysh barazimet (1), vërtetohet se për eksponenta numra të plotë m, n dhe $a \neq 0$, vlejné vetitë:

Vetitë.

1. $a^n \cdot a^m = a^{m+n}$
2. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, a \neq 0$
3. $(ab)^n = a^n b^n$
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$
5. $(a^m)^n = a^{mn}$
6. $a^0 = 1, a \neq 0$
7. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0; n \in \mathbf{Z}.$

Do të vërtetojmë vetëm vetitë 1, 7 dhe 2. Dallojmë këto raste:

a) Nëse m dhe n janë numra natyrorë, atëherë është evidente se vlen barazimi 1.

b) Nëse m dhe n janë numra të plotë negativë, atëherë ekzistojnë numrat natyrorë p dhe q të tillë që $m = -p$, kurse $n = -q$. Tani, për $a \neq 0$, kemi:

$$a^m \cdot a^n = a^{-p} \cdot a^{-q} = \text{sipas (1)} = \frac{1}{a^p} \cdot \frac{1}{a^q} = \frac{1}{a^{p+q}}$$

$$= \text{sipas (1)} = a^{-(p+q)} = a^{(-p)+(-q)} = a^{m+n}.$$

c) Nëse $m \in \mathbf{N}$, kurse dhe n është numër i plotë negativ, atëherë ekziston numri natyror q të tillë që $n = -q$. Tani, për $a \neq 0$, kemi:

$$a^m \cdot a^n = a^m \cdot a^{-q} = \text{sipas (1)} = a^m \cdot \frac{1}{a^q} = \frac{a^m}{a^q}.$$

Tani dallojmë këto nënraste:

c1) Nëse $m > q$, atëherë $\frac{a^m}{a^q} = a^{m-q} = a^{m+(-q)} = a^{m+n}$.

c2) Nëse $m = q$, atëherë $\frac{a^m}{a^q} = 1 = a^0 = a^{m-m} = a^{m+(-q)} = a^{m+n}$.

c3) Nëse $m < q$, atëherë ekziston $p \in \mathbf{N}$ ashtu që $q = m + p$. Tani:

$$\frac{a^m}{a^q} = \frac{a^m}{a^{m+p}} = \frac{a^m}{a^m \cdot a^p} = \frac{1}{a^p} = a^{-p} = a^{m+(-q)} = a^{m+n}.$$

d) Rasti kur m është numër i plotë negativ, kurse $n \in \mathbf{N}$ është i ngjashëm me rastin c).

e) Nëse $m = 0$, ose $n = 0$, p.sh. po supozojmë se $n = 0$, atëherë kemi:

$$a^m \cdot a^n = a^m \cdot a^0 = a^m \cdot 1 = a^m = a^{m+0} = a^{m+n}.$$

Pra, vërtetiam se $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ për çdo $m, n \in \mathbf{Z}$.

Tani, kemi të drejtë të shkruajmë: $2^{-3} \cdot 2^{-4} = 2^{(-3)+(-4)} = 2^{-7}$; $2^{-5} \cdot 2^4 = 2^{(-5)+4} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$; $2^6 \cdot 2^{-4} = 2^{6+(-4)} = 2^2 = 4$.

2. Në mënyrë që vërtetimi i vetisë 2 të jetë më i thjeshtë, së pari do të vërtetojmë vetinë 7, d.m.th. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ për çdo $n \in \mathbf{Z}$ dhe $a \neq 0$. Edhe këtu, dallojmë tri raste:

a) Nëse $n \in \mathbf{N}$, atëherë barazimi vlen sipas (1).

b) Nëse $n \in \mathbf{Z}$ dhe n është negativ, atëherë ekziston $p \in \mathbf{N}$ ashtu që $n = -p$. Tani:

$$a^{-n} = a^p = \frac{1}{\frac{1}{a^p}} = \text{sipas (1)} = \frac{1}{a^{-p}} = \frac{1}{a^n}.$$

c) Nëse $n = 0$, atëherë $a^{-n} = a^{-0} = 1 = \frac{1}{1} = \frac{1}{a^0} = \frac{1}{a^n}$.

Tani, vërtetimi i vetisë 2 përe $n, m \in \mathbf{Z}$ merr formën:

$$\frac{a^n}{a^m} = \text{sipas vetisë 7} = a^n \cdot a^{-m} = \text{sipas vetisë 1} = a^{n+(-m)} = a^{n-m}.$$

Ngjashëm vërtetohen vetitë 3-5 përe eksponenta $n, m \in \mathbf{Z}$.

Rëndësia e fuqive në matematikë, fizikë, kimi, elektronikë, astronomi, financa është tejet e madhe, prandaj edhe vetitë e tyre duhet të përvetësohen në tërësi, në mënyrë që ato t'i zbatojmë me sukses, sa herë që na jepet mundësia.

Duke shfrytëzuar pikërisht fuqitë, ne jemi në gjendje të llogarisim dhe shprehim masat e trupave qiellorë, sikurse edhe masat e grimcave atomike. P.sh. masa e Tokës është përafërsisht $5.98 \cdot 10^{24}$ kg; masa e Marsit është përafërsisht $6.39 \cdot 10^{23}$ kg; masa e Juptireit është përafërsisht $1.898 \cdot 10^{27}$ kg; masa e Uranit është përafërsisht $8.681 \cdot 10^{25}$ kg; masa e Hënës është përafërsisht $7.4 \cdot 10^{22}$ kg; masa e Diellit është

përafërsisht $1.989 \cdot 10^{30}$ kg; masa e elektronit është përafërsisht $9.109 \cdot 10^{-31}$ kg; ngarkesa elektrike e një elektroni është $1.602 \cdot 10^{-19}$ c (kulon); numri i Avogardos përafërsisht është i barabartë me 6.02210^{23} mol⁻¹, etj.

Shembulli 2.1. Të thjeshtohen shprehjet

$$(a) \frac{2^{10} \cdot 4^{15} \cdot 6^7}{18^4 \cdot 16^{10}}, \quad (b) \frac{0.0002^3 \cdot 0.004^{10} \cdot 0.012^2}{0.0008^{10} \cdot 0.003^2}, \quad (c) \frac{12^{16} \cdot 6^{11} - 9^{13} \cdot 4^{21}}{18^{12} \cdot 4^{15} - 6^{25} \cdot 16^4}.$$

Zgjidhje. (a) Vlen

$$\begin{aligned} \frac{2^{10} \cdot 4^{15} \cdot 6^7}{18^4 \cdot 16^{10}} &= \frac{2^{10} \cdot (2^2)^{15} \cdot (3 \cdot 2)^7}{(2 \cdot 3^2)^4 \cdot (2^4)^{10}} = \frac{2^{10} \cdot 2^{30} \cdot 3^7 \cdot 2^7}{2^4 \cdot (3^2)^4 \cdot 2^{40}} = \frac{2^{47} \cdot 3^7}{2^{44} \cdot 3^8} = \frac{2^{47}}{2^{44}} \cdot \frac{3^7}{3^8} \\ &= 2^{47-44} \cdot \frac{3^7}{3^7 \cdot 3} = 2^3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2^3}{3} = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

(b) Duke shfrytëzuar barazimet $0.001 = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$, $0.0003 = 3 \cdot 10^{-4}$, $0.00018 = 18 \cdot 10^{-5} = 1.8 \cdot 10^{-4}$ e kështu me radhë, kemi

$$\begin{aligned} \frac{0.0002^3 \cdot 0.004^{10} \cdot 0.012^2}{0.0008^{10} \cdot 0.003^2} &= \frac{2^3 \cdot 10^{-12} \cdot 4^{10} \cdot 10^{-30} \cdot 12^2 \cdot 10^{-6}}{8^{10} \cdot 10^{-40} \cdot 3^2 \cdot 10^{-8}} \\ &= \frac{2^{3+20+4} \cdot 3^2 \cdot 10^{(-12)+(-30)+(-6)}}{2^{30} \cdot 3^2 \cdot 10^{(-40)+(-8)}} = \frac{2^{27} \cdot 3^2 \cdot 10^{-48}}{2^{30} \cdot 3^2 \cdot 10^{-48}} = \frac{1}{8}. \\ (c) \frac{12^{16} \cdot 6^{11} - 9^{13} \cdot 4^{21}}{18^{12} \cdot 4^{15} - 6^{25} \cdot 16^4} &= \frac{(2^2 \cdot 3)^{16} \cdot (2 \cdot 3)^{11} - (3^2)^{13} \cdot (2^2)^{21}}{(2 \cdot 3^2)^{12} \cdot (2^2)^{15} - (2 \cdot 3)^{25} \cdot (2^4)^4} = \\ &= \frac{2^{32} \cdot 3^{16} \cdot 2^{11} \cdot 3^{11} - 3^{26} \cdot 2^{42}}{2^{12} \cdot 3^{24} \cdot 2^{30} - 2^{25} \cdot 3^{25} \cdot 2^{16}} = \frac{2^{43} \cdot 3^{27} - 3^{26} \cdot 2^{42}}{2^{42} \cdot 3^{24} - 2^{41} \cdot 3^{25}} \\ &= \frac{2^{42} \cdot 3^{26}(2 \cdot 3 - 1)}{2^{41} \cdot 3^{24}(2 - 3)} = 2 \cdot 3^2 \cdot (-5) = -90. \end{aligned}$$

2.2. Rrënjëzimi

Në matematikë, për çdo veprim përkufizohet edhe veprimi i anasjelltë i tij. Për mbledhjen në bashkësinë e numrave të plotë \mathbf{Z} , bashkësinë e numrave racionalë \mathbf{Q} , realë \mathbf{R} dhe atyre kompleksë \mathbf{C} , veprimi i anasjelltë është zbritja, kurse për shumëzimin në bashkësitë e numrave $\mathbf{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ dhe $\mathbf{C} \setminus \{0\}$, veprimi i anasjelltë është pjesëtimi. Edhe për fuqizimin me eksponenta numra natyrorë, përkufizohet veprimi i anasjelltë, i cili quhet *rrënjëzim*. Le të jetë $a \in \mathbf{R}$ dhe $n \in \mathbf{N}$.

Përkufizim 2.2.1. Rrënjë të n -të të numrit real a quajmë numrin real ose kompleks b për të cilin $b^n = a$. Simbolikisht shkruajmë $\sqrt[n]{a} = b$. Numri a quhet radikanti, numri n quhet treguesi (eksponenti) i rrënjës, ndërsa numri b quhet rrënja.

Vërejtje 2.1. Jo çdo herë rrënja e caktuar e një numri real është përsëri numër real, p.sh. $\sqrt{-2}$. Kjo tregon se rrënjëzimi është pjesërisht i përkufizuar në

bashkësinë e numrave realë, kurse është "plotësisht" i përkufizuar në bashkësinë e numrave kompleksë \mathbf{C} .

Vetitë.

1. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$,
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, (b \neq 0)$
3. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m \cdot b^n}$,
4. $b \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b^n \cdot a}$.

Tani, mund ta përkufizojmë edhe fuqinë me eksponent numër racional si

$$\sqrt[n]{a^m} \stackrel{\text{def}}{=} a^{\frac{m}{n}}. \quad (1)$$

Duke pasur parasysh vërejtjen e mësipërme dhe relacionin (1), nocioni i rrënjëzimit mund të përkufizohet edhe për eksponenta numra të plotë negativë, racionalë, realë apo edhe kompleksë. Në këtë kurs do të kemi të bëjmë vetëm me eksponent deri te numrat racionalë. Pjesa tjetër punohet në lëndën e analizës dhe atë të algjebres. Vlen të përmendet rëndësia e relacionit (1) i cili na mundëson që rrënjën ta kthejmë në fuqi dhe t'i zbatojmë vetitë e fuqive dhe në fund rezultatin e fituar ta kthejmë prap në formë të rrënjës.

Duhet pasur parasysh se rrënja e n -të e një numri real apo kompleks ka gjithësej n -vlera (shih rrënjëzimi i numrit kompleks në ndonjë tekst), por ne do të kufizohemi vetëm në pjesën kryesore të një rrënje. Për rrënjët e një numri real pozitiv, vetëm rrënja pozitive paraqet pjesën kryesore dhe ajo është e vetme; kurse për një numër real negativ dhe rrënjët me eksponent tek, vetëm rrënja negative paraqet pjesën kryesore të rrënjës. Për zeron, vetëm zeroja paraqet pjesën kryesore për çdo rrënjë me eksponent numër numër natyror n . P.sh. edhe pse $\sqrt{4}$ i ka dy vlera 2 dhe -2 , sepse $2^2 = (-2)^2 = 4$, pjesa kryesore e saj është $\sqrt{4} = 2$; po ashtu $\sqrt[3]{-8}$ i ka tri vlera të ndryshme në bashkësinë e numrave kompleksë \mathbf{C} , por vetëm -2 është pjesa kryesore e saj. Po ashtu

$$\sqrt{a^2} = |a|, \quad \sqrt[4]{a^4} = |a|, \quad \sqrt[3]{a^3} = a, \quad \sqrt[5]{a^5} = a,$$

janë pjesët kryesore të tyre. Dhe në përgjithësi

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|, \quad \sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a.$$

Shembulli 2.2. Të thjeshtohen shprehjet

$$(a) \quad \sqrt{18} - 3\sqrt{50} + 4\sqrt{72} \quad (b) \quad \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}.$$

Zgjidhje. (a) Vlen

$$\begin{aligned} \sqrt{18} - 3\sqrt{50} + 4\sqrt{72} &= \sqrt{9 \cdot 2} - 3\sqrt{25 \cdot 2} + 4\sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} - 3 \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} + \\ &+ 4 \cdot \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot \sqrt{2} - 15 \cdot \sqrt{2} + 24 \cdot \sqrt{2} = 12 \cdot \sqrt{2}. \end{aligned}$$

(b) Vlen

$$\begin{aligned}\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} &= \sqrt{(1+\sqrt{2})^2} - \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = |1+\sqrt{2}| - |1-\sqrt{2}| = \\ &= (1+\sqrt{2}) - (\sqrt{2}-1) = 2.\end{aligned}$$

Shembulli 2.3. Të racionalizohet emëruesi i thyesës:

$$(a) \frac{4}{1+\sqrt{3}}, \quad (b) \frac{5+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}, \quad (c) \frac{3+\sqrt{8}}{2-2\sqrt{8}}, \quad (d) \frac{\sqrt[3]{2}}{3-\sqrt[3]{2}}.$$

Zgjidhje. (a) Vlen

$$\frac{4}{1+\sqrt{3}} = \frac{4}{1+\sqrt{3}} \cdot \frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \frac{4(1-\sqrt{3})}{1-(\sqrt{3})^2} = \frac{4(1-\sqrt{3})}{-2} = 2(\sqrt{3}-1).$$

(b) Vlen

$$\frac{5+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{5+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{(5+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{1} = 13+7\sqrt{3}.$$

(c) Vlen

$$\frac{3+\sqrt{8}}{2-2\sqrt{8}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3+\sqrt{8}}{1-\sqrt{8}} \cdot \frac{1+\sqrt{8}}{1+\sqrt{8}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{11+4\sqrt{8}}{-7} = -\frac{11+4\sqrt{8}}{14}.$$

(d) Vlen

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[3]{2}}{3-\sqrt[3]{2}} &= \frac{\sqrt[3]{2}}{3-\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{3^2+3\cdot\sqrt[3]{2}+(\sqrt[3]{2})^2}{3^2+3\cdot\sqrt[3]{2}+(\sqrt[3]{2})^2} = \frac{\sqrt[3]{2}(9+3\cdot\sqrt[3]{2}+(\sqrt[3]{2})^2)}{3^3-(\sqrt[3]{2})^3} \\ &= \frac{\sqrt[3]{2}(9+3\cdot\sqrt[3]{2}+(\sqrt[3]{2})^2)}{25}.\end{aligned}$$

2.3. Kuptimi i polinomit

Shprehjet e formës: -4 , $3x$, $-0.5x^2z$, $\sqrt{5}xyz^3t^2$, etj. quhen *monome* në matematikë. Numrat -4 , -0.5 , $\sqrt{5}$ quhen *koeficientë*, ndërsa shkronjat x, z, y, t , quhen *ndryshore* të monomeve. Shuma e treguesve të ndryshoreve (përveç konstanteve) quhet *shkallë* e monomit. P.sh. shkallë e monomit $3x$ është e barabartë me 1, ndërsa shkalla e monomit $\sqrt{5}xyz^3t^2$ është e barabartë me $1+1+3+2=7$. Konstantat konsiderohen monome me shkallë të barabartë me 0. Nuk e ka vështirë lexuesi ta përceptojë kuptimin e monomit. Pra, çdo prodhim i një numri të fundmë konstantesh me fuqitë e një numri të fundmë ndryshoresh quhet *monom*. Kjo fjalë rrjedh nga gjuha greke, që do të thotë shprehje njëgjymtyrëshe. Shuma apo diferenca e dy monomeve quhet *binom*. Ngjashëm e përkufizojmë kuptimin e trinomit dhe në përgjithësi të polinomit. P.sh. shprehjet algjebrike:

$$3 - 4x, \quad 2x - 4xy^2, \quad -0.5xyy^2 - \sqrt{6}x^4y$$

janë binome, ndërsa shprehjet:

$$7 - 4x - x^2, \quad 2x - 4xy^2 - x^3y^6, \quad -0.5xyy^2 - \sqrt{6}x^3y^2 + x + 2z$$

janë trinome, respektivisht polinome.

Monomet:

$$-4x, \quad \frac{1}{3}x, \quad -\sqrt{7}x$$

janë të ngjashme mes veti, sikurse edhe monomet:

$$14xy^2z^3, \quad -\frac{3}{5}xy^2z^3, \quad -\frac{\sqrt{7}}{2}xy^2z^3.$$

Prandaj për dy monome themi se janë të *ngjashme* nëse ato ndryshojnë vetëm për nga koeficientët e tyre, ndërsa ndryshoret dhe fuqitë e ndryshoreve duhet të jenë të njëjta. Rëndësia e monomeve të ngjashme qëndron në faktin se vetëm ato mund të mbliidhen ose zbriten. Mbledhja (zbritja) e dy monomeve realizohet në atë mënyrë që mbliidhen (zbriten) koeficientët e tyre.

Shembulli 2.5. Shuma (zbritja) e monomeve $3xy^2y^3$ dhe $5xy^2y^3$ është $3xy^2y^3 + 5xy^2y^3 = 8xy^2y^3$, respektivisht $3xy^2y^3 - 5xy^2y^3 = -2xy^2y^3$. Ky proces quhet *reduktim* në teorinë e polinomeve.

Nga shembujt e mësipërm, vërejmë se kemi polinome që varen prej një apo më shumë ndryshoreve. Nga të gjitha këto, ne më së shumti do të merremi me polinomet me një ndryshore. Marrim këtë përkufizim

Përkufizim 2.3.1. Shprehjen e formës

$$p_n(x) \equiv a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0, \quad a_i \in \mathbf{R}(\mathbf{C}) \quad (1)$$

e quajmë polinom i shkallës n i ndryshores x me koeficienta numra realë (kompleksë). Numrat $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ quhen koeficientë të polinomit. Monomi $a_n x^n$ quhet gjymtyra më e vjetër e polinomit, ndërsa a_0 quhet gjymtyra e lirë.

Shkalla e polinomit $p_n(x)$ shënohet me $\deg p_n(x)$. D.m.th. $\deg p_n(x) = n$. Kujdes, polinomet nuk janë barazime. Shënimi në relacionin (1) nuk duhet kuptuar si barazim por si shënim të polinomit. Mund të vëreni se nuk është përdorur shenja $=$ por \equiv , të cilat janë të ndryshme. Sa herë që një polinom e shënojmë me $p_n(x)$ duhet kuptuar shprehjen $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Preferohet që polinomi të shkruhet sipas zvogëlimit apo rritjes së treguesve të ndryshores x .

Dy polinome $p_n(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ dhe $q_m(x) \equiv b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$ themi se janë të barabarta dhe simbolikisht shkruajmë $p_n(x) = q_m(x)$ nëse $m = n$ dhe $a_i = b_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Kuptimi i polinomit mund të përgjithësohet edhe për n -ndryshore. P.sh. polinomi i shkallës së dytë prej dy ndryshoreve x dhe y është

$$p(x, y) \equiv a_{11} x^2 + a_{12} xy + a_{22} y^2 + a_{13} x + a_{23} y + a_{33}.$$

Kujdes! Shkalla e polinomit $p(x, y) = xy + 3x - 4y + 5$ është 2, sepse monomi xy është i rendit të dytë ($xy = x^1 y^1$).

2.3.1. Mbledhja dhe zbritja e polinomeve. Mbledhja dhe zbritja e polinomeve kryhet në atë mënyrë që mbledhen dhe zbriten gjymtyrët e ngjashme.

Shembulli 2.6. Shuma (zbritja) e polinomeve $p_3(x) \equiv 4x^3 - 5x^2 + 7x - 6$ dhe $q_4(x) \equiv 2x^4 + 10x^3 - 15x^2 + 4x + 12$ është

$$\begin{aligned} p_3(x) + q_4(x) &\equiv (4x^3 - 5x^2 + 7x - 6) + (2x^4 + 10x^3 - 15x^2 + 4x + 12) \\ &= 2x^4 + 14x^3 - 20x^2 + 11x + 6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_3(x) - q_4(x) &\equiv (4x^3 - 5x^2 + 7x - 6) - (2x^4 + 10x^3 - 15x^2 + 4x + 12) \\ &= -2x^4 - 6x^3 + 10x^2 + 3x - 18. \end{aligned}$$

Njësoj mbledhen dy apo më tepër polinome dhe vlejné ligji komutativ dhe ai asociativ për mbledhje.

2.3.2. Shumëzimi i polinomeve. Shumëzimi i dy polinomeve kryhet ashtu që çdo gjymtyrë e polinomit të parë shumëzohet me secilën gjymtyrë të polinomit të dytë dhe rezultati i fituar reduktohet. Ta shkruajmë këtë rregull me ndihmën e gjuhës së matematikës. Le të jenë dhënë polinomet

$$\begin{aligned} p_n(x) &\equiv a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \\ q_m(x) &\equiv b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0. \end{aligned}$$

Prodhim të këtyre dy polinomeve quajmë polinomin $g_{m+n}(x)$ i dhënë me relacionin

$$\begin{aligned} g_{m+n}(x) &\equiv p_n(x) \cdot q_m(x) \equiv \left(\sum_{i=0}^n a_i x^i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^m b_j x^j \right) \\ &= \sum_{k=0}^{m+n} c_k x^k, \quad \text{ku} \quad c_k = \sum_{\substack{k=0 \\ i+j=k}}^{n+m} a_i b_j. \end{aligned}$$

Shembulli 2.7. Prodhimi i polinomeve $p(x) \equiv 4x^3 - 5x^2 + 7x - 6$ dhe $q(x) \equiv 2x^4 + 10x^3 - 15x^2 + 2x - 3$ është

$$\begin{aligned} p(x) \cdot q(x) &\equiv (4x^3 - 5x^2 + 7x - 6) \cdot (2x^4 + 10x^3 - 15x^2 + 2x - 3) \\ &= (8x^7 + 40x^6 - 60x^5 + 8x^4 - 12x^3) + (-10x^6 - 50x^5 + 75x^4 - 10x^3 + 15x^2) \\ &\quad + (14x^5 + 70x^4 - 105x^3 + 14x^2 - 21x) + (-12x^4 - 60x^3 + 90x^2 - 12x + 18) \\ &= 8x^7 + (40 - 10)x^6 + (-60 - 50 + 14)x^5 + (8 + 75 + 70 - 12)x^4 \\ &\quad + (-12 - 10 - 105 - 60)x^3 + (15 + 14 + 14 + 90)x^2 + (-21 - 12)x + 18 \\ &= 8x^7 - 96x^5 + 141x^4 - 187x^3 + 133x^2 - 33x + 18 \end{aligned}$$

Për shumëzimin e polinomeve vlejné ligji komutativ, asociativ dhe ai distributiv i shumëzimit ndaj mbledhjes (zbritjes).

2.3.3. Pjesëtimi i polinomeve

Në analogji me pjesëtimin e dy numrave, përkufizojmë edhe pjesëtimin e dy polinomeve.

Le të jenë dhënë dy polinome $p(x)$ dhe $g(x)$ dhe $\deg p(x) \geq \deg g(x)$. Marrim këtë

Përkufizim 2.3.3.1. Të pjesëtohet polinomi $p(x)$ me polinomin $g(x)$ do të thotë t'i gjejmë polinomet $q(x)$ dhe $r(x)$ të tillë që

$$p(x) = q(x)g(x) + r(x),$$

ku $\deg r(x) < \deg g(x)$. Polinomi $p(x)$ quhet i pjesëtueshmi, $g(x)$ pjesëtuesi, $q(x)$ herësi, ndërsa $r(x)$ quhet mbetja.

Si kryhet pjesëtimi i dy polinomeve? Së pari polinomet duhet të shkruhen (renditen) sipas zvogëlimit të treguesve të ndryshores x , e pastaj gjymtyra më e vjetër e të pjesëtueshmit pjesëtohet me gjymtyrën më të vjetër të pjesëtuesit. Ecuria e punës është e ngjashme me atë të pjesëtimin të dy numrave. Pjesëtimi vazhdon deri se shkalla e polinomit në mbetje të jetë më e vogël se shkalla e pjesëtuesit.

Shembulli 2.8. Gjatë pjesëtimin të polinomit $p(x) = 2x^4 + 5x^3 - 2x^2 +$

$7x - 10$ me polinomin $g(x) = x^2 - 2x + 3$ kemi

$$\begin{array}{r}
 p(x) : g(x) = (2x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 7x - 10) : (x^2 - 2x + 3) = 2x^2 + 9x + 10 \\
 \quad - (2x^4 - 4x^3 + 6x^2) \\
 \hline
 \quad \quad 9x^3 - 8x^2 + 7x - 10 \\
 \quad \quad - (9x^3 - 18x^2 + 27x) \\
 \hline
 \quad \quad \quad 10x^2 - 20x - 10 \\
 \quad \quad \quad - (10x^2 - 20x + 30) \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad - 40 \equiv r(x)
 \end{array}$$

Meqë shkalla e polinomit mbetje $r(x)$ është 0 më e vogël se shkalla e polinomit $g(x)$, që është 2, këtu ndërpritet procesi i pjesëtimit. D.m.th. gjatë këtij pjesëtimi kemi marrë herësin $q(x) = 2x^2 + 9x + 10$, ndërsa mbetja është $r(x) = -40$.

Nëse mbetja $r(x)$ është e barabartë me zero, atëherë themi se polinomi $p(x)$ plotëpjesëtohet me polinomin $g(x)$ dhe në atë rast shkruajmë

$$p(x) = q(x)g(x).$$

Shembulli 2.9. Tregohet se binomi $x^3 + 1$ plotëpjesëtohet me binomin $x + 1$ me ç'rast herësi është $x^2 - x + 1$. (Provoni!)

Tregohet se polinomi $p(x)$ plotëpjesëtohet me binomin $x - a$ atëherë dhe vetëm atëherë, nëse $p(a) = 0$. D.m.th. a është një zero e polinomit.

Me të vërtetë, nga barazimi $p(x) = (x - a) \cdot q(x) + c$, ku c është një konstantë, menjëherë konstatojmë se polinomi $p(x)$ plotëpjesëtohet me binomin $x - a$ atëherë dhe vetëm atëherë, nëse $p(a) = 0$.

Detyra në lidhje me polinomet

1. Njehsoni $p(x) \pm g(x)$ dhe $p(x) \cdot g(x)$ nëse

$$(a) \quad p(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x - 4, \quad g(x) = 3x^2 - 5x + 6$$

$$(b) \quad p(x) = -3x^4 - 12x^2 + 6x - 5, \quad g(x) = x^3 - 5x^2 + 6$$

$$(c) \quad p(x) = 7x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 3x - 2, \quad g(x) = x^2 - 7x + 6$$

$$(d) \quad p(x) = x^8 + 4x^7 + 3x^6 - 4x^5 + x^3 - 2x^2 + 6x - \frac{1}{2},$$

$$g(x) = x^5 - 3x^4 + 6x^2 + 3$$

2. Caktoni parametrat realë a, b dhe c në mënyrë që polinomet $p(x)$ dhe $g(x)$

$$(a) \quad p(x) = 2x^3 - 9x^2 + 13x - 6 \quad \text{dhe} \quad g(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$$

$$(b) \quad p(x) = 6x^3 - 23x^2 + 29x - 12 \quad \text{dhe} \quad g(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$$

$$(c) \quad p(x) = 12x^3 - 40x^2 + 27x - 5 \quad \text{dhe} \quad g(x) = (3x - 1)(ax^2 + bx + c)$$

të jenë të barabarta.

3. Njehsoni herësin dhe mbetjen gjatë pjesëtimit të polinomit $p(x)$ me polinomin $g(x)$. Në cilat raste ato plotëpjesëtohen?

$$(a) \quad p(x) = x^4 - 15x^3 + 6x^2 - 7, \quad g(x) = x^3 - 3x^2 + 9$$

$$(b) \quad p(x) = -3x^8 - 12x^2 + 6x - 5, \quad g(x) = x^3 + 5x^2 - 5$$

$$(c) \quad p(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1, \quad g(x) = x^2 + 2x + 1$$

4. Është dhënë polinomi $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Caktoni parametrat realë a, b dhe c në mënyrë që polinomi $p(x)$ të plotëpjesëtohet me $x - 1$, $x + 2$, dhe $x - 3$.

Udhëzim. Shfrytëzoni faktin se polinomi $p(x)$ plotëpjesëtohet me binomin $x - a$ atëherë dhe vetëm atëherë, nëse $p(a) = 0$.

2.4. Faktorizimi i polinomeve

Sikurse në teorinë e numrave që është i përkufizuar faktorizimi i një numri natyral, edhe në teorinë e polinomeve përkufizohet faktorizimi i polinomeve. Marim këtë

Përkufizim 2.4.1. Të faktorizohet një polinom $p(x)$ do të thotë që atë polinom ta shkruajmë si prodhim të dy apo më tepër polinomeve të shkallës jo të barabartë me zero.

Shembulli 2.10. Polinomin $p(x) = x^2 - 5x + 6$ mund ta shkruajmë si prodhim të binomeve $(x - 2)$ dhe $(x - 3)$. D.m.th. $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.

Sikurse në teorinë e numrave që kërkohet faktorizimi i një numri natyral n në prodhim të fuqive të faktorëve të thjeshtë të tij, edhe për polinomet preferohet që faktorizimi të bëhet deri në faktorë të pazbërthyesëm. P.sh. polinomi

$$\begin{aligned} p(x) &= x^4 - 2x^2 - 8 = x^4 - 4x^2 + 2x^2 - 8 = x^2(x^2 - 4) + 2(x^2 - 4) \\ &= (x^2 - 4)(x^2 + 2) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 2) \end{aligned}$$

është faktorizuar (zbërthyer) në faktorët e pazbërthyesëm: $x - 2$; $x + 2$ dhe $x^2 + 2$.

Për të lehtësuar procesin e faktorizimit të një polinomi, me të madhe i shfrytëzojmë këto identitete algjebrike:

Identitetet themelore algjebrike

- | | | |
|-----|---|--------------------------------|
| (1) | $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ | katrori i binomit (shumës) |
| (2) | $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ | katrori i binomit (ndryshimit) |
| (3) | $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ | ndryshimi i katrorëve |
| (4) | $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ | kubi i binomit (shumës) |
| (5) | $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ | kubi i binomit (ndryshimit) |
| (6) | $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ | shuma e kubeve |
| (7) | $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ | ndryshimi i kubeve |

Identitete themelore konsiderohen edhe këto:

- (8) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$,
- (9) $(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(-ab - bc + ca)$,
- (10) $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$, ku $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, ($k = 0, 1, \dots, n$),
- (11) $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$,
- (12) $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$,
- ku n është tek.

Këtu $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $k = 0, 1, \dots, n$ paraqet numrin e kombinacioneve pa përsërtitje të klasës (gjatësisë) k të një bashkësie me n -elemente, kurse kombinacion pa përsërtitje të klasës (gjatësisë) k të një bashkësie A me n -elemente quajmë çdo nënbashkësi me k -elemente të bashkësisë A .

Vërtetimi i këtyre identiteteve nuk është ndonjë detyrë e vështirë. Shfrytëzohen vetitë e fuqive dhe identitetet paraprake. P.sh., vërtetimi i identitetit (1), bëhet si vijon:

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a \cdot b = b \cdot a).$$

Ngjashëm, për identitetin (2) kemi

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a \cdot a - a \cdot b - b \cdot a + b \cdot b = a^2 - 2ab + b^2,$$

ose, duke e shfrytëzuar identitetin (a) dhe duke zëvendësuar b me $-b$.

(3) Vlen

$$a^2 - b^2 = a^2 - ab + ab - b^2 = a(a - b) + b(a - b) = (a - b)(a + b).$$

(4) Vlen

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = \dots = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

(5) Duke shfrytëzuar identitetin (4) dhe duke zëvendësuar b me $-b$, marrim

$$(a - b)^3 = (a + (-b))^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

(6) Vlen

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= a^3 + a^2b - a^2b - ab^2 + ab^2 + b^3 = a^2(a + b) - ab(a + b) + b^2(a + b) \\ &= (a + b)(a^2 - ab + b^2). \end{aligned}$$

(7) Vlen

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 &= a^3 - a^2b + a^2b - ab^2 + ab^2 - b^3 = a^2(a - b) + ab(a - b) + b^2(a - b) \\ &= (a - b)(a^2 + ab + b^2). \end{aligned}$$

Vërtetimi i identitetit (7) mund të bëhet edhe përmes identitetit (6), duke zëvendësuar b me $-b$. Vërtetimi i identitetit (8) mund të bëhet duke shfrytëzuar identitetin (1), duke zëvendësuar $a + b$ me a , kurse c me b , ose në mënyrë të pavarur si vijon:

$$(a + b + c)^2 = (a + b + c) \cdot (a + b + c) = \dots = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca).$$

Vërtetimi i identitetit (9) bëhet në mënyrë të ngjashme si ai i identitetit (8). Vërtetimi i identitetit (10) është më kompleks dhe bëhet përmes induksionit matematik dhe duke shfrytëzuar identitetin në vijim, i cili njihet si *identiteti i Paskalit* (Blaise Pascal (1623–1662), matematikan dhe fizikan francez),

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Me të vërtetë

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
 &= \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} \cdot \left(\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k} \right) \\
 &= \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{n+1}{k(n-k+1)} \\
 &= \frac{(n+1)!}{k! \cdot ((n+1)-k)!} = \binom{n+1}{k}.
 \end{aligned}$$

Vërtetojmë identitetin (10). Për $n = 0$ dhe $a, b \neq 0$, vlen

$$(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0} \cdot a^0 \cdot b^0 = 1.$$

Këtu $0! = 1$ (me përkufizim, nuk mund të vërtetohet), prandaj $\binom{0}{0} = \frac{0!}{0! \cdot 0!} = 1$.

Ngjashëm, për $n = 1$ dhe $a, b \neq 0$, kemi

$$(a+b)^1 = a+b = \binom{1}{0} \cdot a^1 \cdot b^0 + \binom{1}{1} \cdot a^0 \cdot b^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b = a+b.$$

D.m.th. pohimi është i saktë për $n = 0$, si dhe për $n = 1$. Supozojmë se pohimi është i saktë për n , d.m.th.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \quad (h.i.)$$

Tregojmë se pohimi vlen edhe për $n+1$, d.m.th.

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.$$

Me të vërtetë

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b) \cdot (a+b)^n = (h.i.) = (a+b) \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
&= (a+b) \cdot \left(\binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \right. \\
&\quad \left. + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n \right) \\
&= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \binom{n}{0} a^n b^1 + \binom{n}{1} a^n b^1 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^2 + \binom{n}{2} a^{n-1} b^2 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^3 + \\
&\quad + \dots + \binom{n}{n-1} a^2 b^{n-1} + \binom{n}{n-1} a^1 b^n + \binom{n}{n} a^1 b^n + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} a^{n+1} b^0 + \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1} \right) a^n b^1 + \left(\binom{n}{1} + \binom{n}{2} \right) a^{n-1} b^2 + \dots + \\
&\quad + \left(\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \right) a^1 b^n + \binom{n+1}{n+1} a^0 b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{1} a^n b^1 + \binom{n+1}{2} a^{n-1} b^2 + \dots + \\
&\quad + \binom{n+1}{n} a^1 b^n + \binom{n+1}{n+1} a^0 b^{n+1} = (a+b)^{n+1}.
\end{aligned}$$

D.m.th. pohimi vlen për çdo $n \in \mathbf{N}$. Nëse në identitetin (10) në vend të b -së marrim $-b$, atëherë fitojmë identitetin

$$(a-b)^n = (a+(-b))^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Identiteti (11) vërtetohet në mënyrë të ngjashme sikur ai (6). D.m.th.

$$\begin{aligned}
a^n - b^n &= (a^n - a^{n-1}b) + (a^{n-1}b - a^{n-2}b^2) + \dots - a^1 b^{n-1} + a^1 b^{n-1} - b^n \\
&= a^{n-1}(a-b) + a^{n-2}b(a-b) + a^{n-3}b^2(a-b) + \dots + b^{n-1}(a-b) \\
&= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).
\end{aligned}$$

Identiteti (10) njihet si formula e binomit, ose e Njutonit (Isaac Newton (1643–1727), matematikan dhe fizikan anglëz). Rëndësia e këtyre identiteteve është shumë e madhe në matematikë dhe përdorimi i tyre është shumë frekuentues. Duke shfrytëzuar identitetet (1) – (3), disa llogaritje bëhen shumë të thjeshta. P.sh.

$$\begin{aligned}
1011^2 &= (1000 + 11)^2 = 1000^2 + 2 \cdot 1000 \cdot 11 + 11^2 = 1000000 + 22000 + 121 \\
&= 1022121,
\end{aligned}$$

$$999^2 = (1000 - 1)^2 = 1000^2 - 2 \cdot 1000 \cdot 1 + 1^2 = 1000000 - 2000 + 1 = 998001,$$

$$998^2 = (1000 - 2)^2 = 1000^2 - 2 \cdot 1000 \cdot 2 + 2^2 = 1000000 - 4000 + 4 = 996004,$$

$$758^2 - 757^2 = (758 - 757)(758 + 757) = 1 \cdot 1515 = 1515,$$

$$1239^2 - 1237^2 = (1239 - 1237) \cdot (1239 + 1237) = 2 \cdot 2476 = 4952.$$

Secili element, përveç të parit dhe të fundit, në secilin rresht, përveç të parit dhe të dytit, është shumë e dy elementeve fqinjë të rreshtit paraprak të trekëndëshit. P.sh. 4 në rreshtin e katërt është shumë e 1 dhe 3 në rreshtin e tretë; $6 = 3 + 3$; $10 = 4 + 6$, etj.

Shembulli 2.11. Çka duhet t'ju shtojmë binomeve që vijojnë në mënyrë që trinomet e fituara të paraqesin katrorë të binomeve?

$$\begin{array}{ll} (a) & x^2 + 2x + \dots, \\ (b) & x^2 - 2x + \dots, \\ (c) & x^2 - 4mx + \dots, \\ (d) & x^2 + x + \dots, \\ (e) & \frac{9}{16}x^2 + 4y^2 + \dots, \end{array} \quad \begin{array}{ll} (f) & x^2 + x + \dots, \\ (g) & 1 - 4p + \dots, \\ (h) & x^2 - xy + \dots, \\ (i) & x^4 + y^6 + \dots, \\ (j) & 25x^2 + 1 + \dots. \end{array}$$

Është e qartë se në rastin (a) tri pikat duhet të zëvendësohen me 1 dhe me atë rast fitojmë $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$. Në rastin (c) kemi:

$$x^2 + 2x\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Ngjashëm zgjidhen rastet tjera.

Shembulli 2.12. Duke shfrytëzuar identitetet themelore, bëjmë faktorizimin e binomeve

$$\begin{array}{ll} (a) & \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{9}b^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 - \left(\frac{1}{3}b\right)^2 = \left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b\right)\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b\right) \\ (b) & 144a^2 - 25x^6 = (12a)^2 - (5x^3)^2 = (12a - 5x^3)(12a + 5x^3) \\ (c) & a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2) \\ (d) & (a + b)^2 - c^2 = (a + b - c)(a + b + c) \\ (e) & x^3 - 1 = x^3 - 1^3 = (x - 1)(x^2 + x + 1) \\ (f) & x^3 - 27 = x^3 - 3^3 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9) \\ (g) & 125x^3 - 27y^3 = (5x)^3 - (3y)^3 = (5x - 3y)(25x^2 + 15xy + 9y^2) \\ (h) & x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4) \\ (i) & x^3y^3 + \frac{27}{64} = (xy)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \left(xy + \frac{3}{4}\right)\left(x^2y^2 - \frac{3}{4}xy + \frac{9}{16}\right) \\ (j) & 125x^3 + 27y^3 = (5x)^3 + (3y)^3 = (5x + 3y)(25x^2 - 15xy + 9y^2). \end{array}$$

Problemi i faktorizimit në matematikë është mjaft i ndërlikuar e ndonjëherë edhe duhet shtuar e zbritur ndonjë shprehje në mënyrë që të zbatojmë identitetet e shkruajtura më lartë.

Shembulli 2.13. Të zbërthejmë në prodhim polinomet që vijojnë:

$$\begin{array}{ll} (a) & 4x^2 \pm 4x + 1, \\ (b) & a^2 + a + 0.25, \end{array} \quad \begin{array}{ll} (c) & -2yz + y^2 + z^2, \\ (d) & a^2 - 8a^2c + 16c^2. \end{array}$$

Zgjidhje. (a) Është e qartë se $4x^2 + 4x + 1 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2 = (2x + 1)^2$. Ngjashëm marrim se

$$(a) \quad 4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2, \quad (c) \quad -2yz + y^2 + z^2 = (y - z)^2 = (z - y)^2,$$

$$(b) \quad a^2 + a + 0.25 = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 \quad (d) \quad a^2 - 8a^2c + 16c^2 = (a - 4c)^2.$$

Shembulli 2.14. T'i zbërthejmë në prodhim polinomet që vijojnë

$$(a) \quad a^3 - 6ab^2 + 12ab^2 - 8b^3 = (a^3 - 8b^3) + (12ab^2 - 6a^2b) = (a - 2b)(a^2 + 2ab + 4b^2)$$

$$(b) \quad 27x^3 + 27x^2y + 9xy^2 + y^3 = (3x)^3 + 3(3x)^2y + 3(3x)y^2 + y^3 = (3x + y)^3$$

$$(c) \quad 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = (2x - 1)^3$$

$$(d) \quad 27m^3 - 108m^2n + 144mn^2 - 64n^3 = (3m - 4n)^3.$$

Shembulli 2.15. Duke shfrytëzuar metoda të ndryshme t'i faktorizojmë polinomet që vijojnë

$$(a) \quad a^2 - ab = a(a - b),$$

$$(b) \quad 12a^5 + 18a^3 = 6a^3(2a^2 + 3),$$

$$(c) \quad 2a^{n+1} + 6a^n = 2a^n(a + 3),$$

$$(d) \quad 9a^3b^2 - 6a^2b + 12a^2b^3 = 3a^2b(3ab - 3 + 4b^2),$$

$$(e) \quad b(x - 3) + c(x - 3) + 3 - x = b(x - 3) + c(x - 3) - (x - 3) = (x - 3)(b + c - 1),$$

$$(f) \quad a^3 + 4a^2 + 4a + 16 = a^2(a + 3) + 4(a + 4) = (a + 3)(a + 4),$$

$$(g) \quad a^3 - a^2b + 2ab^2 - 2b^3 = a^2(a - b) + 2b^2(a - b) = (a - b)(a^2 + 2b^2),$$

$$(h) \quad ax^2 + bx^2 - bx - ax + cx^2 - cx = x^2(a + b + c) - x(a + b + c)$$

$$= (a + b + c)(x^2 - x) = x(a + b + c)(x - 1).$$

Shembulli 2.16.

$$(a) \quad x^2 - 10x + 9 = x^2 - x - 9x + 9 = x(x - 1) - 9(x - 1) = (x - 1)(x - 9)$$

$$(b) \quad x^2 + 7x + 10 = x^2 + 2x + 5x + 10 = x(x + 2) + 5(x + 2) = (x + 2)(x + 5)$$

$$(c) \quad x^2 - 11x + 24 = x^2 - 3x - 8x + 24 = x(x - 3) - 8(x - 3) = (x - 3)(x - 8)$$

$$(d) \quad x^2 + x - 2 = x^2 - x + 2x - 2 = x(x - 1) + 2(x - 1) = (x - 1)(x + 2)$$

Shembulli 2.17. Duke shfrytëzuar metoda të ndryshme t'i faktorizojmë

polinomet që vijojnë

$$(a) \quad x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x)$$

$$(b) \quad x^4 + 4y^4 = x^4 + 4x^2y^2 + (2y^2)^2 - 4x^2y^2 = (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 \\ = (x^2 + 2y^2 - 2xy)(x^2 + 2y^2 + 2xy)$$

$$(c) \quad x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x)$$

$$(d) \quad x^5 + x + 1 = x^5 - x^2 + x^2 + x + 1 = x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1) \\ = x^2(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2(x - 1) + 1) \\ = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$$

$$(e) \quad x^8 + x^4 + 1 = x^8 + 2x^4 + 1 - x^4 = (x^4 + 1)^2 - (x^2)^2 \\ = (x^4 + 1 - x^2)(x^4 + 1 + x^2).$$

Detyra në lidhje me faktorizimin e polinomeve

1. Të faktorizohen polinomet që vijojnë

$$\begin{array}{ll}
 (a) & a^2 + 2ab + b^2 - c^2, \\
 (b) & 4 - p^2 + 2pq - q^2, \\
 (c) & 16m^2 - 9x^2 + 12xy - 4y^2, \\
 (d) & x^2 - 2xy + y^2 - 9, \\
 (e) & 2x - 2y - x^2 + 2xy - y^2, \\
 (f) & m^2 + 2mn + n^2 - x^2 + 2xy - y^2, \\
 (g) & 4a^{3n} - 100a^n, \\
 (h) & x^8 + x^4 + 1.
 \end{array}$$

Rez.

$$\begin{array}{ll}
 (a) & (a + b - c)(a + b + c), \\
 (b) & (2 - p + q)(2 + p - q), \\
 (c) & (4m - 3x + 2y)(4m + 3x - 2y), \\
 (d) & (x - y - 3)(x - y + 3), \\
 (e) & (x - y)(2 - x + y), \\
 (f) & (m + n - x + y)(m + n + x - y), \\
 (g) & 4a^n(a^n - 5)(a^n + 5), \\
 (h) & (x^4 - x^2 + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1).
 \end{array}$$

2. Vërtetoni identitete e Diofantit

$$\begin{array}{l}
 (a) \quad (ax + by)^2 + (ay - bx)^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2), \\
 (b) \quad (ax - by)^2 + (ay + bx)^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2), \\
 (c) \quad (ax + by)^2 - (ay + bx)^2 = (a^2 + b^2)(x^2 - y^2).
 \end{array}$$

3. Vërtetoni identitetet e Lagranzhit

$$\begin{array}{l}
 (a) \quad (x^2 + y^2)(a^2 + b^2) - (ax + by)^2 = (bx - ay)^2, \\
 (b) \quad (x^2 - y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2) - (ax + by + cz)^2 = (bx + ay)^2 + (cy - bz)^2 + \\
 \quad + (az - cz)^2, \\
 (c) \quad (ax - by)^2 + (ay + bx)^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2), \\
 (d) \quad (a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 = 3(a - b)(b - c)(c - a).
 \end{array}$$

4. Tregoni se polinomi $p(x) = x^6 - x^5 + x^4 + x^2 - x + 1$ është pozitiv për çdo $x \in \mathbf{R}$.

Udhëzim. Tregoni se $p(x) = (x^2 - x + 1)(x^4 + 1) = \left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right) (x^4 + 1)$. Tani është evidente se të dy faktorët janë pozitivë për çdo $x \in \mathbf{R}$.

5. Tregoni se vlejnë identitetet

- (a) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$,
 (b) $(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(-ab + bc - ca)$,
 (c) $(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$,
 (d) $(a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4) - (a^3 - b^3)(a^3 + b^3) = 2b^6$,
 (e) $(x + y + z)^2 + (x + y - z)^2 + (y + z - x)^2 + (z + x - y)^2 = 4(x^2 + y^2 + z^2)$.

6. Të faktorizohen polinomet që vijojnë

- (a) $x^{12} - x^8 + x^4 - 1$,
 (b) $4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$,
 (c) $(x + y + z + xyz)^2 - (xy + yz + zx + 1)^2$,
 (d) $(x^2 + y^2)^2 + 2(x^2 + y^2) + 1$,
 (e) $a^6 + a^5 + a^4 + 2a^3 + a^2 + a + 1$,
 (f) $x^4 - 7x^3y + 5x^2y^2 + 31xy^3 - 30y^4$,
 (g) $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2$,
 (h) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12$,
 (i) $(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) + 15$,
 (j) $(x^2 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1) - 1$.

Rez.

- (a) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^8 + 1)$,
 (b) $(-a + b + c + d)(a - b + c + d) \times$
 $\times (a + b - c + d)(a + b + c - d)$,
 (c) $(x - 1)(x + 1)(y - 1)(y + 1)(z - 1)(z + 1)$,
 (d) $(x^2 + y^2 + 1 - 2xy)(x^2 + y^2 + 1 + 2xy)$,
 (e) $(a + 1)^2(a^2 + 1)(a^2 - a + 1)$,
 (f) $(x - y)(x - 3y)(x - 5y)(x + 2y)$,
 (g) $(x + 2)(x + 4)(x^2 + 5x + 8)$,
 (h) $(x - 1)(x + 2)(x^2 + x + 5)$,
 (i) $(x + 2)(x + 6)(x^2 + 8x + 10)$,
 (j) $x(x^2 + 1)(x + 1)^2$.

2.5. Thjeshtimi i shprehjeve racionale algjebrike

Shprehje racionale algjebrike quhen të gjitha thyesat të cilat edhe numëruesi e edhe emëruesi janë polinome. Në bazë të kësaj të gjitha polinomet janë shprehje racionale. Po ashtu mbledhja, zbritja, shumëzimi dhe pjesëtimi i dy shprehjeve racionale prap është shprehje racionale. Proces shumë i rëndësishëm në matematikë është thjeshtimi i këtyre shprehjeve. Gjatë thjeshtimit duhet pasur kujdes që:

1. Emëruesi i thyesës nuk guxon të jetë zero për asnjë vlerë të ndryshores (ndryshoreve),
2. Emëruesi dhe numëruesi i thyesës duhet të faktorizohen e pastaj të thjeshtohen faktorët e njëjtë.

Gjatë thjeshtimit duhet të merren parasysh rregullat dhe vetitë e mbledhjes, zbritjes, shumëzimit dhe të pjesëtimit të thyesave, pastaj vetitë fuqive, e ndonjëherë edhe ato të rrënjëve.

Shembulli 2.18. T'i thjeshtojmë thyesat që vijojnë

$$(a) \quad \frac{4ab}{6a^2b} = \frac{4}{6} \cdot \frac{a}{a^2} \cdot \frac{b}{b} = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 3} \cdot \frac{a}{a \cdot a} \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{2a}, \quad a, b \neq 0,$$

$$(b) \quad \frac{7a^2b}{21ac} = \frac{7}{21} \cdot \frac{a^2}{a} \cdot \frac{b}{c} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{3c}, \quad a, c \neq 0,$$

$$(c) \quad \frac{ab^3}{6b^2c} = \frac{ab}{6c}, \quad b, c \neq 0,$$

$$(d) \quad a \frac{(x+2)^2}{2a^2(x+2)} = \frac{a(x+2)(x+2)}{2 \cdot a \cdot a \cdot (x+2)} = \frac{x+2}{2a}, \quad a \neq 0, x+2 \neq 0,$$

d.m.th. $a \neq 0$ dhe $x \neq -2$,

$$(e) \quad \frac{x(a+b)}{2ax+2bx} = \frac{x(a+b)}{2x(a+b)} = \frac{1}{2}, \quad x \neq 0, a \neq -b,$$

$$(f) \quad \frac{3a^2b^2(x+y)}{45a^2b^3(x^2+2xy+y^2)} = \frac{3a^2b^2(x+y)}{3 \cdot 15a^2b^3(x+y)^2} = \frac{1}{15(x+y)}, \quad a, b \neq 0, x \neq -y,$$

$$\begin{aligned}
(g) \quad & \frac{1-a^2}{a-1} = \frac{-(a^2-1)}{a-1} = \frac{-(a-1)(a+1)}{a-1} = -(a+1), \quad a \neq 1, \\
(h) \quad & \frac{x^2-8x+16}{xy-4y} = \frac{(x-4)^2}{y(x-4)} = \frac{x-4}{y}, \quad x \neq 4, y \neq 0, \\
(i) \quad & \frac{x^3-x}{x^3+2x^2+x} = \frac{x(x-1)(x+1)}{x(x+1)^2} = \frac{x-1}{x+1}, \quad x \neq 0, x \neq -1, \\
(j) \quad & \frac{(a+b)^2-4}{2a+2b+4} = \frac{(a+b-2)(a+b+2)}{2(a+b+2)} = \frac{a+b-2}{2}, \quad a+b \neq -2, \\
(k) \quad & \frac{a^2-9}{ab+3b-a-3} = \frac{(a-3)(a+3)}{b(a+3)-(a+3)} = \frac{(a-3)(a+3)}{(a+3)(b-1)} = \frac{a-3}{b-1}, \quad a \neq -3, b \neq 1, \\
(l) \quad & \frac{a^{3n}-a^n b^{2n}}{a^{3n}-2a^{2n}b^n+a^n b^{2n}} = \frac{a^n(a^{2n}-b^{2n})}{a^n(a^{2n}-2a^n b^n+b^{2n})} = \frac{(a^n)^2-(b^n)^2}{(a^n-b^n)^2} \\
& = \frac{(a^n-b^n)(a^n+b^n)}{(a^n-b^n)^2} = \frac{a^n+b^n}{a^n-b^n}, \quad a \neq 0, a^n \neq b^n, \\
(m) \quad & \frac{a^{2n}b^m-b^m}{a^{2n}b^m+2a^n b^m+b^m} = \frac{b^m(a^n-1)(a^n+1)}{b^m(a^n+1)^2} = \frac{a^n-1}{a^n+1}, \quad b \neq 0, a^n \neq -1, \\
(n) \quad & \frac{x^4+x^2+1}{x^4+3x^2+2x^3+2x+1} = \frac{(x^2+1)^2-x^2}{x^4+x^2+1+2x^2+2x^3+2x} \\
& = \frac{(x^2+1-x)(x^2+1+x)}{(x^2+x+1)^2} \\
& = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad \text{sepse } x^2+x+1 > 0, \forall x \in \mathbf{R}.
\end{aligned}$$

Shembulli 2.19. Të thjeshtojmë thyesën $\frac{x|x-3|+x^2-9}{2x^3-3x^2-9x}$.

Zgjidhje. Në shprehjet ku paraqitet vlera absolute, së pari duhet të lirohemi nga vlera absolute. Meqë binomi $x-3$ e ndërron shenjën në pikën $x=3$, prandaj dallojmë dy raste:

1. Nëse $x \leq 3$, d.m.th. $x \in (-\infty, 3]$ dhe
2. Nëse $x > 3$, d.m.th. $x \in (3, \infty)$.

Këtu duhet patjetër t'i izolojmë pikat në të cilat emëruesi bëhet zero. Prandaj, nga $2x^3-3x^2-9x \neq 0$ marrim se $x(2x^2-3x-9) \neq 0$, respektivisht $x \neq 0$ dhe $2x^2-3x-9 \neq 0$. Tani,

$2x^2-3x-9 = 2x^2-6x+3x-9 = 2x(x-3)+3(x-3) = (x-3)(2x+3) \neq 0$,
d.m.th. $x \neq 3$ dhe $x \neq -\frac{3}{2}$. Tani shqyrtojmë rastet:

1. Për $x \in (-\infty, 3] \setminus \{-\frac{3}{2}, 0, 3\}$ kemi: $x-3 > 0$, prandaj $|x-3| = -(x-3)$. Tani thyesa merr formën

$$\begin{aligned}
\frac{x|x-3|+x^2-9}{2x^3-3x^2-9x} &= \frac{-x(x-3)+(x-3)(x+3)}{x(x-3)(2x+3)} = \frac{(x-3)(-x+x+3)}{x(x-3)(2x+3)} \\
&= \frac{3}{x(2x+3)}, \quad x \neq -\frac{3}{2}, 0, 3.
\end{aligned}$$

2. Për $x \in (3, \infty)$ kemi: $x - 3 > 0$, prandaj $|x - 3| = x - 3$. Tani thyesa merr formën

$$\frac{x|x - 3| + x^2 - 9}{2x^3 - 3x^2 - 9x} = \frac{x(x - 3) + (x - 3)(x + 3)}{x(x - 3)(2x + 3)} = \frac{(x - 3)(2x + 3)}{x(x - 3)(2x + 3)} = \frac{1}{x}, \quad x > 3.$$

D.m.th.

$$\frac{x|x - 3| + x^2 - 9}{2x^3 - 3x^2 - 9x} = \begin{cases} \frac{3}{x(2x + 3)}, & \text{nëse } x \neq -\frac{3}{2}, 0, 3 \\ \frac{1}{x}, & \text{nëse } x > 3. \end{cases}$$

Në praktikë veprojmë më shpejt; së pari i gjejmë pikat në të cilat vlerat absolute dhe emëruesi anulohen, e pastaj nga ato i formojmë intervalet në \mathbf{R} në të cilat shprehja racionale është e përkufizuar (ekziston).

Shembulli 2.20. Të thjeshtojmë thyesën $\frac{x^2 - 4 - |x - 2|}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}$.

Zgjidhje. Së pari $|x - 2| = 0$ atëherë dhe vetëm atëherë, nëse $x = 2$. Tani

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 - 5x - 6 &= x^3 - 2x^2 + 4x^2 - 8x + 3x - 6 = x^2(x - 2) + 4x(x - 2) + 3(x - 2) \\ &= (x - 2)(x^2 + 4x + 3) = (x - 2)(x^2 + x + 3x + 3) \\ &= (x - 2)(x(x + 1) + 3(x + 1)) = (x - 2)(x + 1)(x + 3), \end{aligned}$$

që d.m.th. $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x - 2)(x + 1)(x + 3) \neq 0$ atëherë dhe vetëm atëherë, nëse $x \neq -3, -1, 2$.

Tani dallojmë rastet

1. Nëse $x \in (-\infty, 2) \setminus \{-3, -1\}$, $x - 2 < 0$, prandaj $|x - 2| = -(x - 2)$. Tani thyesa merr formën

$$\frac{x^2 - 4 - |x - 2|}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6} = \frac{(x - 2)(x + 2) + (x - 2)}{(x - 2)(x + 1)(x + 3)} = \frac{(x - 2)(x + 3)}{(x - 2)(x + 1)(x + 3)} = \frac{1}{x + 1}.$$

2. Nëse $x \in (2, \infty)$, $x - 2 > 0$, prandaj $|x - 2| = x - 2$. Tani thyesa merr formën

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 4 - |x - 2|}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6} &= \frac{(x - 2)(x + 2) - (x - 2)}{(x - 2)(x + 1)(x + 3)} = \frac{(x - 2)(x + 1)}{(x - 2)(x + 1)(x + 3)} \\ &= \frac{1}{x + 3}. \end{aligned}$$

Prandaj, mund të shkruajmë se

$$\frac{x^2 - 4 - |x - 2|}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6} = \begin{cases} \frac{1}{x + 1}, & \text{nëse } x \in (-\infty, 2) \setminus \{-3, -1\}, \\ \frac{1}{x + 3}, & \text{nëse } x > 2 \end{cases}$$

Shembulli 2.21. Të thjeshtojmë thyesën $\frac{x^2 - 1 + |x + 1|}{|x|(x - 2)}$.

Zgjidhje. Së pari $|x|(x-2) \neq 0$, d.m.th. $x \neq 0$ dhe $x \neq 2$. Pastaj $|x+1| = 0$ atëherë dhe vetëm atëherë, nëse $x = -1$. D.m.th. bashkësia e numrave real \mathbf{R} me ndihmën e këtyre pikave ndahet në këto intervale $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 2)$ dhe $(2, \infty)$. Këto dy intervalet e fundit mund të paraqiten edhe në një, në atë $(0, \infty) \setminus \{2\}$. Kështu, kemi këto raste:

1. Për $x \in (-\infty, -1)$, $x < 0$ dhe $x + 1 < 0$, prandaj $|x| = -x$ dhe $|x + 1| = -(x + 1)$. Thyesa e merr formën:

$$\frac{x^2 - 1 + |x + 1|}{|x|(x - 2)} = \frac{(x - 1)(x + 1) - (x + 1)}{-x(x - 2)} = -\frac{(x + 1)(x - 2)}{x(x - 2)} = -\frac{x + 1}{x}.$$

2. Për $x \in (-1, 0)$, $x < 0$ dhe $x + 1 > 0$, prandaj $|x| = -x$ dhe $|x + 1| = x + 1$. Thyesa e merr formën:

$$\frac{x^2 - 1 + |x + 1|}{|x|(x - 2)} = \frac{(x - 1)(x + 1) + (x + 1)}{-x(x - 2)} = -\frac{(x + 1)x}{x(x - 2)} = -\frac{x + 1}{x - 2}.$$

3. Për $x \in (0, \infty) \setminus \{2\}$, $x > 0$ dhe $x + 1 > 0$, prandaj $|x| = x$ dhe $|x + 1| = x + 1$. Thyesa e merr formën:

$$\frac{x^2 - 1 + |x + 1|}{|x|(x - 2)} = \frac{(x - 1)(x + 1) + (x + 1)}{x(x - 2)} = \frac{(x + 1)(x - 2)}{x(x - 2)} = \frac{x + 1}{x}.$$

D.m.th. këto tri raste mund t'i shkruajmë si vijon

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 1 + |x + 1|}{|x|(x - 2)} &= \begin{cases} -\frac{x + 1}{x}, & \text{nëse } x \in (-\infty, -1) \\ -\frac{x + 1}{x - 2}, & \text{nëse } x \in (-1, 0) \\ \frac{x + 1}{x}, & \text{nëse } x \in (0, \infty) \setminus \{2\} \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\frac{x + 1}{x - 2}, & \text{nëse } x \in (-1, 0) \\ \frac{x + 1}{x} \cdot \operatorname{sgn} x, & \text{nëse } x \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty) \setminus \{2\}. \end{cases} \end{aligned}$$

Shembulli 2.22. Vërtetoni identitetin

$$\frac{(a + 1)^4 + a + 1}{a^4 - (a^2 + 2a + 2)^2} = -\frac{a + 2}{4}, \quad a \neq -1.$$

Zgjidhje. Vlen

$$\begin{aligned} \frac{(a+1)^4 + a + 1}{a^4 - (a^2 + 2a + 2)^2} &= \frac{(a+1)((a+1)^3 + 1)}{(a^2 - (a^2 + 2a + 2))(a^2 + a^2 + 2a + 2)} \\ &= \frac{(a+1)((a+1) + 1)((a+1)^2 - (a+1) + 1)}{-2(a+1)2(a^2 + a + 1)} \\ &= -\frac{(a+1)(a+2)(a^2 + a + 1)}{4(a+1)(a^2 + a + 1)} = -\frac{a+2}{4}. \end{aligned}$$

Por ky identitet vlen vetëm për $a \neq -1$.

Shembulli 2.23. Të thjeshtojmë thyesën

$$\begin{aligned} \frac{(a^2 + a + 1)^2 - (a - 1)^2}{(a^2 - a + 1)^2 - (a + 1)^2} &= \frac{((a^2 + a + 1) - (a - 1))((a^2 + a + 1) + (a - 1))}{((a^2 - a + 1) - (a + 1))((a^2 - a + 1) + (a + 1))} \\ &= \frac{(a^2 + 2)(a^2 + 2a)}{(a^2 - 2a)(a^2 + 2)} = \frac{a(a+2)}{a(a-2)} = \frac{a+2}{a-2}, \quad a \neq 2, 0. \end{aligned}$$

Si në teorinë e numrave, edhe në teorinë e polinomeve *përkufizohen shumëfishi më i vogël i përbashkët*, që shkurtemisht shkruajmë (shmvp) dhe pjesëtuesi më i madh i përbashkët (pmp). Shmvp të dy apo më tepër polinomeve quajmë polinomin e shkallës më të vogël i cili plotëpjesëtohet me ato polinome. Pmp të dy apo më tepër polinomeve quajmë polinomin e shkallës më të madhe me të cilin plotëpjesëtohen ato polinome.

Shembulli 2.24. Shmvp i polinomeve $4x(x-2)^3$ dhe $6x^2y(x-2)^2$ është $12x^2y(x-2)^3$, ndërsa pmp është $2xy(x-2)^2$.

Prandaj, për të gjetur shmvp (pmp) të dy apo më shumë polinomeve, së pari i faktorizojmë polinomet e pastaj i marrim fuqitë me tregues më të lartë.

Shembulli 2.25. T'i gjejmë shmvp dhe pmp për polinomet që vijojnë

- (a) shmvp $(a^2 - 2a, a^2 + 2a) = \text{shmvp}(a(a-2), a(a+2)) = a(a-2)(a+2)$,
- (b) pmp $(a^2 - 2a, a^2 + 2a) = \text{pmp}(a(a-2), a(a+2)) = a$,
- (c) shmvp $(a^2 + 2ab + b^2, a^2 - b^2) = \text{shmvp}((a+b)^2, (a-b)(a+b)) = (a+b)^2(a-b)$
- (d) pmp $(a^2 + 2ab + b^2, a^2 - b^2) = \text{pmp}((a+b)^2, (a-b)(a+b)) = a+b$,
- (e) shmvp $(4 - x^2, x - 2, 2x^2 - 8x + 8) = \text{shmvp}(-(x-2)(x+2), x-2, 2(x-2)^2) = -2(x-2)^2(x+2)$,
- (f) pmp $(4 - x^2, x - 2, 2x^2 - 8x + 8) = \text{pmp}(-(x-2)(x+2), x-2, 2(x-2)^2) = -(x-2)$.

Në vazhdim do t'i zgjidhim disa shembuj në lidhje me thjeshtimin e shprehjeve të ndryshme algjebrike. Kjo pjesë luan rol qendror në matematikë dhe konsiderohet se nëse lexuesi e përvetëson këtë pjesë në masën më të madhe, atëherë ai nuk mund të ketë vështirësi serioze në analizë, algjebër apo gjeometri analitike.

Prandaj rekomandohet që kësaj pjese t'i kushtohet kujdes i veçantë. Kjo ndodh kështu, sepse shumica operacioneve matematike, pas një numri të kufizuar hapash, problemi kthehet në thjeshtimin e një shprehje algjebrike.

Shembulli 2.26. T'i thjeshtojmë disa shprehje racionale algjebrike

$$(a) \quad \frac{1}{6a} + \frac{1}{4b^2} - \frac{a^2 + b^2}{6ab^2} = \frac{2b^2 + 3a - 2(a^2 + b^2)}{12ab^2} = \frac{a(3 - 2a)}{12ab^2} = \frac{3 - 2a}{12b^2}, \quad a, b \neq 0,$$

$$(b) \quad \begin{aligned} \frac{a}{ab - b^2} + \frac{b}{a^2 - ab} - \frac{a + b}{ab} &= -\frac{a}{b(a - b)} + \frac{b}{a(a - b)} - \frac{a + b}{ab} \\ &= \frac{-a^2 + b^2 - (a + b)(a - b)}{ab(a - b)} = \frac{-a^2 + b^2 - a^2 + b^2}{ab(a - b)} = \frac{-2(a^2 - b^2)}{ab(a - b)} \\ &= \frac{-2(a - b)(a + b)}{ab(a - b)} = -2\frac{a + b}{ab}, \quad a, b \neq 0; a \neq b, \end{aligned}$$

$$(c) \quad \begin{aligned} \frac{16x - x^2}{x^2 - 4} + \frac{3 + 2x}{2 - x} - \frac{2 - 3x}{x + 2} &= \frac{x(16 - x)}{(x - 2)(x + 2)} - \frac{3 + 2x}{x - 2} - \frac{2 - 3x}{x + 2} \\ &= \frac{16x - x^2 - (3 + 2x)(x + 2) - (2 - 3x)(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)} \\ &= \frac{16x - x^2 - (6 + 7x + 2x^2) - (-4 + 8x - 3x^2)}{(x - 2)(x + 2)} \\ &= \frac{x - 2}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{1}{x + 2}, \quad x \neq \pm 2, \end{aligned}$$

$$(d) \quad \begin{aligned} \frac{1}{x^2 - x} + \frac{2}{1 - x^2} + \frac{1}{x^2 + x} &= \frac{1}{x(x - 1)} - \frac{2}{(x - 1)(x + 1)} + \frac{1}{x(x + 1)} \\ &= \frac{x + 1 - 2x + x - 1}{x(x - 1)(x + 1)} = \frac{0}{x(x - 1)(x + 1)} = 0, \quad x \neq \pm 1, 0, \end{aligned}$$

$$(e) \quad \begin{aligned} \left(\frac{1}{a + 1} - \frac{3}{a^3 + 1} + \frac{3}{a^2 - a + 1} \right) \left(a - \frac{2a - 1}{a + 1} \right) \\ &= \left(\frac{1}{a + 1} - \frac{3}{(a + 1)(a^2 - a + 1)} + \frac{3}{a^2 - a + 1} \right) \cdot \left(\frac{a(a + 1) - (2a - 1)}{a + 1} \right) \\ &= \frac{a^2 - a + 1 - 3 + 3(a + 1)}{(a + 1)(a^2 - a + 1)} \cdot \frac{a^2 - a + 1}{a + 1} \\ &= \frac{a^2 + 2a + 1}{a + 1} \cdot \frac{1}{a + 1} = \frac{(a + 1)^2}{a + 1} \cdot \frac{1}{a + 1} = 1, \quad a \neq -1. \end{aligned}$$

Shembulli 2.27. Të thjeshtojmë shprehjen

$$P(x) \equiv \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x} + \frac{2}{1 + x^2} + \frac{4}{1 + x^4} + \frac{8}{1 + x^8} + \frac{16}{1 + x^{16}}.$$

Pastaj do të përgjithësojmë rezultatin e fituar.

Zgjidhje.

$$\begin{aligned}
 P(x) &\equiv \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}} \\
 &= \frac{1+x+1-x}{(1-x)(1+x)} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}} \\
 &= \frac{2}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}} \\
 &= 2 \cdot \frac{2}{(1-x^2)(1+x^2)} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}} \\
 &= 4 \cdot \frac{2}{(1-x^4)(1+x^4)} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}} \\
 &= 8 \cdot \frac{2}{(1-x^8)(1+x^8)} + \frac{16}{1+x^{16}} \\
 &= 16 \cdot \frac{2}{(1-x^{16})(1+x^{16})} \\
 &= \frac{32}{1-x^{32}} = \frac{2^5}{1-x^{2^5}}, \quad x \neq \pm 1
 \end{aligned}$$

Përgjithësimi:

$$\begin{aligned}
 P(x) &\equiv \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \dots + \frac{2^{n-1}}{1+x^{2^{n-1}}} \\
 &= \frac{2^n}{1-x^{2^n}}, \quad x \neq \pm 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Shembulli 2.28. Tregoni se

$$\frac{\frac{1}{x^6} - 64}{4 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} \cdot \frac{x^2}{4 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} - \frac{4x^2(2x-1)}{1-2x} = 1$$

për çdo $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$.

Zgjidhje. Për çdo $x \neq 0, \frac{1}{2}$ vlen

$$\begin{aligned}
 &\frac{\frac{1}{x^6} - 64}{4 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} \cdot \frac{x^2}{4 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} - \frac{4x^2(2x-1)}{1-2x} = \frac{\frac{1-64x^6}{x^6}}{\frac{4x^2+2x+1}{x^2}} \cdot \frac{x^2}{\frac{4x^2-2x+1}{x^2}} + 4x^2 \\
 &= \frac{(1-(2x)^3)(1+(2x)^3)}{(4x^2+2x+1)(4x^2-2x+1)} + 4x^2 \\
 &= \frac{(1-2x)(1+2x+4x^2)(1+2x)(1-2x+4x^2)}{(4x^2+2x+1)(4x^2-2x+1)} + 4x^2 = 1.
 \end{aligned}$$

Shembulli 2.29. Të thjeshtojmë shprehjen

$$\begin{aligned}
 P(a) &\equiv \left(\frac{9a^2 + 1}{1 - 6a + 9a^2} - \frac{1}{27a^3 - 9a^2 - 3a + 1} : \frac{1}{27a^3 + 1} \right) (27a^3 - 18a^2 + 3a) \\
 &= \left(\frac{9a^2 + 1}{(1 - 3a)^2} - \frac{1}{(3a - 1)^2(3a + 1)} \cdot (3a + 1)(9a^2 - 3a + 1) \right) \cdot 3a(3a - 1)^2 \\
 &= \left(\frac{9a^2 + 1}{(3a - 1)^2} - \frac{1}{(3a - 1)^2} (9a^2 - 3a + 1) \right) \cdot 3a(3a - 1)^2 \\
 &= \frac{9a^2 + 1 - 9a^2 + 3a - 1}{(3a - 1)^2} \cdot 3a(3a - 1)^2 \\
 &= 9a^2, \quad |a| \neq \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

Në vazhdim t'i marrim disa shembuj ku paraqitet vlera absolute.

Shembulli 2.30. Të thjeshtojmë shprehjen $P(x) \equiv \frac{1}{|x + 2|} + |x - 2|$.

Zgjidhje. Së pari $|x + 2| \neq 0$, prandaj $x \neq -2$, ndërsa $|x - 2| = 0$ nëse $x = 2$. Tani dallojmë raste:

1. Nëse $x \in (-\infty, -2)$, $x + 2 < 0$ dhe $x - 2 < 0$, prandaj $|x + 2| = -(x + 2)$ dhe $|x - 2| = -(x - 2)$. Tani

$$P(x) = \frac{1}{-(x + 2)} - (x - 2) = \frac{-1 - x^2 + 4}{x + 2} = \frac{3 - x^2}{x + 2}.$$

2. Nëse $x \in (-2, 2)$, $x + 2 > 0$ dhe $x - 2 < 0$, prandaj $|x + 2| = x + 2$ dhe $|x - 2| = -(x - 2)$. Tani

$$P(x) = \frac{1}{x + 2} - (x - 2) = \frac{1 - x^2 + 4}{x + 2} = \frac{5 - x^2}{x + 2}.$$

3. Nëse $x \in [2, \infty)$, $x + 2 > 0$ dhe $x - 2 \geq 0$, prandaj $|x + 2| = x + 2$ dhe $|x - 2| = x - 2$. Tani

$$P(x) = \frac{1}{x + 2} + (x - 2) = \frac{1 + x^2 - 4}{x + 2} = \frac{x^2 - 3}{x + 2}.$$

Shembulli 2.31. Të thjeshtojmë shprehjen $P(x) \equiv \frac{|x^3 - 1| + |x + 1|}{x^2 + x}$.

Së pari $x^3 + x = x(x^2 + 1) \neq 0$ atëherë dhe vetëm atëherë, nëse $x \neq 0$, sepse $x^2 + 1 > 0$ për çdo $x \in \mathbf{R}$, ndërsa $|x^3 - 1| = 0$, respektivisht $|x + 1| = 0$ atëherë dhe vetëm atëherë, nëse $x = 1$, respektivisht $x = -1$. Tani dallojmë rastet:

1. Për $x \in (-\infty, -1)$, $x^3 - 1 < 0$, $x + 1 < 0$, prandaj $|x^3 - 1| = -(x^3 - 1)$, dhe $|x + 1| = -(x + 1)$. Tani

$$P(x) = \frac{-x^3 + 1 - x - 1}{x(x^2 + 1)} = \frac{-x(x^2 + 1)}{x(x^2 + 1)} = -1.$$

2. Për $x \in [-1, 1) \setminus \{0\}$, $x^3 - 1 < 0$, $x + 1 \geq 0$, prandaj $|x^3 - 1| = -(x^3 - 1)$, dhe $|x + 1| = x + 1$. Tani

$$P(x) = \frac{-x^3 + 1 + x + 1}{x(x^2 + 1)} = \frac{-x^3 + x + 2}{x(x^2 + 1)}.$$

3. Për $x \in [1, \infty)$, $x^3 - 1 \geq 0$, $x + 1 > 0$, prandaj $|x^3 - 1| = x^3 - 1$, dhe $|x + 1| = x + 1$. Tani

$$P(x) = \frac{x^3 - 1 + x + 1}{x(x^2 + 1)} = \frac{x(x^2 + 1)}{x(x^2 + 1)} = 1.$$

Prandaj mund të shkruajmë

$$\frac{|x^3 - 1| + |x + 1|}{x^2 + x} = \begin{cases} -1, & \text{nëse } x \in (-\infty, -1) \\ \frac{-x^3 + x + 2}{x(x^2 + 1)}, & \text{nëse } x \in [-1, 1) \setminus \{0\} \\ 1, & \text{nëse } x \in [1, \infty). \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{-x^3 + x + 2}{x(x^2 + 1)}, & \text{nëse } x \in [-1, 1) \setminus \{0\} \\ \operatorname{sgn} x, & \text{nëse } x \in (-\infty, -1) \cup [1, \infty). \end{cases}$$

Detyra në lidhje me thjeshtimin e shprehjeve

1. Thjeshtoni shprehjet që vijojnë

$$(a) \frac{1}{6x+3} - \frac{9x+3}{8x^2-2} + \frac{2}{2x-1}, \quad (c) \frac{a^2-a-6}{a^2-4} - \frac{a-1}{2-a} - 2,$$

$$(b) \frac{5x}{x^2-6x+9} - \frac{3x-1}{x^2-9}, \quad (d) \frac{5}{2y^2+6y} - \frac{4-3y^2}{y^2-9} - 3.$$

2.

$$(a) \frac{x^2+y^2}{xy} - \frac{x^2}{xy-y^2} + \frac{y^2}{x^2-xy}, \quad (c) \frac{6x+5}{x+5} - \frac{3(2x-1)}{x-5} + \frac{50x}{x^2-25},$$

$$(b) \frac{a+1}{a+2} + \frac{6a}{a^2-4} - \frac{2a-1}{a-2}, \quad (d) \frac{a+1}{a^2} - \frac{2}{a^2-a} + \frac{2}{a^3-a^2}.$$

3.

$$(a) \frac{a^2+ab+b^2}{a+b} + \frac{a^2-ab+b^2}{a-b} - \frac{2a^2b}{a^2-b^2},$$

$$(b) \frac{x^2y^2}{a^2b^2} + \frac{(x^2-b^2)(b^2-y^2)}{b^2(a^2-b^2)} + \frac{(a^2-x^2)(a^2-y^2)}{a^2(a^2-b^2)},$$

$$(c) \frac{a^2-bx}{a^2-ab+bx-ax} - \frac{3b-a}{2a-2b} + \frac{a+2x}{3a-3x}.$$

4.

$$(a) \frac{2x}{x-1} - \frac{3x^2+2x+1}{x^3-1} + \frac{x+1}{x^2+x+1},$$

$$(b) \frac{30x^2}{9x^3-x} + \frac{8}{6x-2} - \frac{15x+5}{9x^2+6x+1},$$

$$(c) \frac{1}{x^2+10x+25} + \frac{1}{x^2-10x+25} + \frac{2}{x^2-25},$$

$$(d) \frac{4a^2+9a+5}{a^3-1} - \frac{1-2a}{a^2+a+1} - \frac{6}{1-a}.$$

5.

$$(a) \frac{x}{x-1} - \frac{3x-1}{x-2} + \frac{2x+1}{x^2-3x+2},$$

$$(b) \frac{x-5}{x-3} + \frac{x+3}{x+5} + \frac{16}{x^2-2x-15},$$

$$(c) \frac{x-1}{x+1} - \frac{x-7}{x+7} + \frac{12}{x^2+8x+7}.$$

6.

$$(a) \frac{x}{2x-y} + \frac{2x^2+2xy}{2xy+3y^2} - \frac{4xy}{4x^2+4xy-3y^2},$$

$$(b) \frac{3-2x}{2-3x} - \frac{3+2x}{2+3x} + \frac{15x^2}{4-9x^2}.$$

7.

$$(a) 1+3x + \frac{9x^2}{1+3x} - \frac{1}{1-3x} - \frac{6x}{9x^2-1},$$

$$(b) \frac{5x}{x+5x^2} - \frac{3-15x}{1-10x+25x^2} + \frac{10(5x^2+2x)}{1-25x^2}.$$

8.

$$(a) \frac{a^2+ax}{a^2x-x^3} - \frac{a-x}{ax+x^2} - \frac{2x}{a^2-x^2} + \frac{3}{a+x},$$

$$(b) \frac{5}{3x-3a} + \frac{a-3x}{x^2-a^2} + \frac{1}{2x+2a} + \frac{17x-25a}{6x^2-6a^2}.$$

9.

$$(a) \frac{1}{a-1} \cdot \frac{a^2-a}{a+1}, \quad (c) \frac{3a^3}{x^2-1} \cdot \frac{x+1}{a},$$

$$(b) \frac{a^2-ab}{a^2+ab} \cdot \frac{a^2b+ab^2}{ab}, \quad (d) \frac{3x-3y}{2x+2y} \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}.$$

10.

$$(a) \frac{x^4-1}{a^3+a} \cdot \frac{a}{x^3+x^2+x+1} \cdot \frac{2a^2+2}{(x-1)^2},$$

$$(b) \frac{x^2+y^2-z^2+2xy}{b^2-a^2-c^2+2ac} \cdot \frac{a+b-c}{x+y-z},$$

$$(c) \frac{x^3+2x^2-x-2}{a+1} \cdot \frac{a^2+a}{x^3-2x^2-x+2} \cdot \frac{x-2}{x+2}.$$

11.

$$(a) \left(2 + \frac{2n}{m-n}\right) \cdot \left(1 - \frac{m-n}{m+n}\right), \quad (c) \left(\frac{x+z}{z} - \frac{x+y}{x}\right) \cdot \frac{z^2}{x^2-yz},$$

$$(b) \left(\frac{3-x}{x+2} - 1\right) \cdot \left(\frac{x^2+1}{2x-1} - \frac{x}{2}\right), \quad (d) \left(1 + \frac{a}{1-a}\right) \cdot \frac{1-a^2}{1+b} \cdot \frac{1-b^2}{a+a^2}.$$

12.

$$(a) \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right) : \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

$$(b) \left(1 - \frac{3x^2}{1-x^2} \right) : \left(\frac{x}{x-1} + 1 \right),$$

$$(c) \left(\frac{2x+1}{2x-1} - \frac{2x-1}{2x+1} \right) : \frac{4x}{6x+3},$$

$$(d) \frac{ax+a}{x^2-x+1} : \left(\frac{1}{x+1} + \frac{3x}{x^3+1} \right),$$

$$(e) \left(\frac{x^2-x-3}{x-4} - x+2 \right) : \frac{25x^2-110x+121}{x^2-2x-8}.$$

13.

$$(a) \frac{\frac{2a+b}{2a-b} - \frac{2a-b}{2a+b}}{\frac{4a^2+b^2}{4a^2-b^2} - \frac{4a^2-b^2}{4a^2+b^2}},$$

$$(c) \frac{1+a+\frac{1}{1-a}}{1+\frac{1}{1-a^2}},$$

$$(b) \frac{\left(2x - \frac{a^2}{2x} \right) \left(4x^2 - \frac{8x^3-2a^2x}{2x+a} \right)}{11 - \frac{2x}{2x+a}},$$

$$(d) \frac{\frac{x}{1+\frac{1}{x}} + 1 - \frac{1}{1+x}}{\frac{x}{1-\frac{1}{x}} + \frac{1}{1-x}},$$

$$(e) \frac{x+x^2+x^3+\dots+x^n}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots + \frac{1}{x^n}}.$$

14.

$$(a) \left(\frac{x}{y^2+xy} - \frac{2}{x+y} + \frac{y}{x^2+xy} \right) : \left(\frac{x}{y} - 2 + \frac{y}{x} \right),$$

$$(b) \left(\frac{x^2-xy}{x^2y+y^3} - \frac{2x^2}{y^3-xy^2+x^2y-x^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{y-1}{x} - \frac{y}{x^2} \right),$$

$$(c) \left(\frac{a}{6-3a} + \frac{a}{a+2} + \frac{4a}{a^2-4} \right) : \frac{a-4}{a-2},$$

$$(d) \left(\frac{x-y}{xy} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \right) : \left(\frac{x^2+y^2}{xy} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) \right).$$

15.

$$(a) \frac{4a^2-1}{a^3-a^2-a+1} : \left(\frac{a}{a^2-2a+1} - \frac{1}{1-a} \cdot \frac{a}{a+1} - \frac{2}{a+1} \right),$$

$$(b) \left(2a + \frac{a^2+b^2}{b} \right) : \left(a + \frac{b^2}{a+2b} \right) - \frac{a}{b} \cdot \left(b+1 + \frac{2b}{a} \right),$$

$$(c) \frac{2}{3a+6} - \frac{a-2}{2a^2+4a} - \frac{2}{3a^2+12a+12} - \frac{4}{3a(a+2)^2}.$$

16.

$$\begin{aligned}
(a) & \left(x + \frac{6x-12}{2x-4}\right) \cdot \frac{1}{2x^2+6x-ax-3a} + \frac{2a}{a^2-4x^2}, \\
(b) & \frac{x}{ax-2a^2} - \frac{2}{x^2+x-2ax-2a} \cdot \left(1 + \frac{3x+x^2}{x+3}\right), \\
(c) & \left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}\right) : \left(\frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y}\right), \\
(d) & \left(\frac{3x}{x+y} + \frac{x}{x-y} - \frac{2xy}{x^2-4y^2}\right) : \frac{4xy}{x^2-y^2}, \\
(e) & \left(\frac{2x}{x^2+2xy} + \frac{4y}{x^2-4y^2} - \frac{y}{xy-2y^2}\right) : \left(1 - \frac{x^2-4y^2-2}{x^2-4y^2}\right).
\end{aligned}$$

17.

$$\begin{aligned}
(a) & \left(\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}\right) : \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}\right)\right) : \left(1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right), \\
(b) & \left(\left(\frac{x^2}{y^3} + \frac{1}{x}\right) : \left(\frac{x}{y^2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right)\right) : \frac{(x-y)^2+4xy}{1+\frac{y}{x}}, \\
(c) & \frac{a^2+a-2}{a^{n+1}-3a^n} \cdot \left(\frac{(a+2)^2-a^2}{4a^2-4} - \frac{3}{a^2-a}\right).
\end{aligned}$$

18.

$$\begin{aligned}
(a) & \left(\frac{z-2}{6z+(z-2)^2} + \frac{(z+4)^2-12}{z^3-8} - \frac{1}{z-2}\right) : \frac{z^3+2z^2+2z+4}{z^3-2z^2+2z-4}, \\
(b) & \left(\frac{3}{a-1} - \frac{3a^2+3a+3}{a^2-1} : \frac{a^4-a}{a^3+1}\right) \cdot \frac{a-a^2}{3}, \\
(c) & \left(1 + \frac{8c^3}{m^3-8c^3} + \frac{m}{2c-m}\right) \left(\frac{m+2c}{2c} - \frac{m}{m+2c}\right).
\end{aligned}$$

19.

$$\begin{aligned}
(a) & \left(1 - \frac{3x+y}{x-y}\right) \left(1 - \frac{2x+y}{x+2y}\right) : \left(1 + \frac{3y^2}{x^2-4y^2}\right), \\
(b) & \left(\frac{2}{m^2-m} - \frac{2m}{1-m^2}\right) \frac{2m^2+2m}{m^3-1} + \frac{4}{m-1}, \\
(c) & \left(\frac{1}{a+1} - \frac{3}{a^3+1} + \frac{3}{a^2-a+1}\right) \cdot \left(a - \frac{2a-1}{a+1}\right), \\
(d) & \left(\frac{2a^2+3a}{4a^2+12a+9} - \frac{3a+2}{2a+3} + \frac{4a-1}{2a-1}\right) \cdot \frac{2a+3}{2a-3}, \\
(e) & \frac{3(3-a)}{a^2-1} + \frac{4}{a+1} - \frac{6}{a^2+2a+1} - \frac{2(5-a)}{a^3+a^2-a-1}, \\
(f) & \left(\frac{1}{2+4m} - \frac{1-m}{8m^3+1} : \frac{1-2m}{4m^2-2m+1}\right) \cdot \frac{4m+2}{2m-1} - \frac{1}{1-4m+4m^2}.
\end{aligned}$$

20.

$$\begin{aligned}
 (a) & \left(\left(\frac{3}{x-y} + \frac{3x}{x^3-y^3} \cdot \frac{x^2+xy+y^2}{x+y} \right) : \frac{2x+y}{x^2+2xy+y^2} \right) \cdot \frac{3}{x+y}, \\
 (b) & \frac{3x-6}{x+2} \cdot \left(\frac{3}{x-2} + \frac{3x}{x^3-8} \cdot \frac{x^2+2x+4}{x+2} \right) : \frac{2x+2}{x^2+4x+4}, \\
 (c) & \left(\frac{3x+6}{2x^3+2x^2+2x+2} + \frac{2x^2-x-10}{2x^3-2x^2+2x-2} \right) : \left(\frac{5}{x^2+1} + \frac{3}{2x+2} - \frac{3}{2x-2} \right).
 \end{aligned}$$

21.

$$\begin{aligned}
 (a) & \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} + \\
 & + \frac{1}{(x+4)(x+5)}, \\
 (b) & \frac{x^4-(x-1)^2}{(x^2+1)-x^2} + \frac{x^2-(x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2-1} + \frac{x^2(x-1)^2-1}{x^4-(x+1)^2}, \\
 (c) & \frac{9-x^2}{(2x+3)^2-x^2} - \frac{x^2-(2x-3)^2}{4x^2-(x+3)^2} + \frac{4x^2-(x-3)^2}{9(x^2-1)}, \\
 (d) & \left(\frac{a^4-a^2+2a-1}{(a^2+1)^2-a^2} - \frac{(a^2-1)^2-a^2}{a^4+2a^3+a^2-1} \right) : \frac{a^2-2a}{a^3-1}, \\
 (e) & \frac{|x^2-1|+x^2}{2x^2-1} - \frac{|x-1|}{x-1}, \\
 (f) & \frac{|x|-1}{x^2-1} - \frac{x^2-|x|}{x^2-2|x|+1}, \\
 (g) & \left(\frac{x^2|x-1|+x-1}{2x^2-1} - \frac{2x|x+1|}{x+1} + 2x-4 \right) : |x-2|.
 \end{aligned}$$

22.

$$\begin{aligned}
 (a) & \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)}, \\
 (b) & \frac{x^2}{x^2-xy-xz-yz} + \frac{y^2}{y^2-xy+xz-yz} + \frac{z^2}{(z-x)(z-y)}, \\
 (c) & \frac{a^2-bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2-ac}{(b+c)(a+b)} + \frac{c^2-bc}{(c+a)(c+b)}.
 \end{aligned}$$

23. Tregoni se vlera e shprehjes

$$\frac{4}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}} : \frac{1}{a + \frac{1}{b}} - \frac{4}{b(abc + a + c)},$$

nuk varet nga vlerat e a, b, c , si dhe caktoni vlerat e këtyre ndryshoreve për të cilat ekziston vlera e shprehjes.

24. Tregoni se vlera e shprehjes

$$\left(x^2 + 2x - \frac{11x - 2}{3x + 1}\right) : \left(x + 1 - \frac{2x^2 + x + 2}{3x + 1}\right),$$

është numër i plotë për çdo $x \in \mathbf{Z}$.

Udhëzim. Tregoni se vlera e shprehjes është e formës kx për ndonjë $k \in \mathbf{Z}$.

25. Është dhënë shprehja

$$\left(6a^2 + 5a - 1 + \frac{a + 4}{a + 1}\right) : \left(3a - 2 + \frac{3}{a + 1}\right).$$

Tregoni se vlera e kësaj shprehje është numër tek për çdo $a \in \mathbf{Z} \setminus \{-1\}$.

Udhëzim. Tregoni se vlera e shprehjes është e formës $2ka \pm 1$ për ndonjë $k \in \mathbf{Z}$.

26. Tregoni se vlera e shprehjes

$$\frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}} : \frac{a^2b^2}{(a+b)^2 - 3ab} \cdot \frac{ab}{a^2 - b^2}$$

është pozitive nëse a dhe b janë me shenja të kundërta, ndërsa negative nëse a dhe b janë me shenja të njëjta dhe $a \neq 0 \neq b$ dhe $|a| \neq b$.

26. Caktoni kushtet nën të cilat vlejné identitetet

$$\begin{aligned} (a) \quad & \frac{1}{x(x-y)(x-z)} + \frac{1}{y(y-x)(y-z)} + \frac{1}{z(z-x)(z-y)} = \frac{1}{xyz}, \\ (b) \quad & \frac{x^2}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2}{(y-x)(y-z)} + \frac{z^2}{(z-x)(z-y)} = 1, \\ (c) \quad & \frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a}, \\ (d) \quad & \frac{ab}{(c-a)(c-b)} + \frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ac}{(b-c)(b-a)} = 1. \end{aligned}$$

27. Të thjeshtohen shprehjet që vijojnë

$$\begin{aligned} (a) \quad & \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 - \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2}{(a+b)^2 - (a-b)^2} : \frac{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)^2}{(a^2+b^2)^2 - (a^2-b^2)^2}, \\ (b) \quad & a^2b^2 \left(\frac{1}{(a+b)^2} \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) + \frac{2}{(a+b)^3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \right), \\ (c) \quad & \frac{1-x^4}{1-x} + \frac{(1-x^4)(x-x^4)}{x-x^3} + \frac{(1-x^4)(x-x^4)(x^2-x^4)}{x^3-x^6} \\ & + \frac{(1-x^4)(x-x^4)(x^2-x^4)(x^3-x^4)}{x^6-x^{10}}. \end{aligned}$$

28. Nëse $a + b + c = 0$, atëherë tregoni se vlejné identitetet

$$(a) \quad a^3 + b^3 + c^3 = 3abc,$$

$$(b) \quad \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) \cdot \left(\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} + 2 \right) = 3,$$

$$(c) \quad \frac{a^2}{a^2 - (b-c)^2} + \frac{b^2}{b^2 - (a-c)^2} + \frac{c^2}{c^2 - (a-b)^2} = \frac{3}{4},$$

$$(d) \quad \frac{a^2(a^2 - 2bc)}{a^4 - (b-c)^4} + \frac{b^2(b^2 - 2ac)}{b^4 - (a-c)^4} + \frac{c^2(c^2 - 2ab)}{c^4 - (a-b)^4} = \frac{3}{8}.$$

29. Caktoni parametrin real m në mënyrë që vlera e shprehjes

$$\frac{x^3 - mx^2 - 3(3-m)x - 1}{(m-8)x^3 + 3(10-m)x^2 - 18x + 8 - m}$$

të jetë konstante për çdo $x \in \mathbf{R}$.

30. Nëse $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$, atëherë tregoni se vlejné identitetet:

$$(a) \quad \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} = -3,$$

$$(b) \quad \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = -\frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc}.$$

Rezultatet:

1. a) $\frac{x+1}{6(4x^2-1)}, (x \neq \pm \frac{1}{2})$; (b) $\frac{2x^2+25x-3}{(x-3)^2(x+3)}, (x \neq \pm 3)$; (d) $\frac{51y-15}{2y(y^2-9)}, (y \neq 0, y \neq \pm 3)$.

2. (a) $-1, (xy \neq 0, x \neq y)$; (b) $\frac{-a}{a+2}, (a \neq \pm 2)$, (c) $\frac{2}{5-x}, (x \neq \pm 5)$, (d) $\frac{a-1}{a^2}, (a \neq 1, a \neq 0)$.

3. (a) $\frac{2a^2}{a+b}, (ab \neq 0, a \neq b)$; (b) $1, (ab \neq 0, a \neq \pm b)$; (c) $\frac{11a+x}{6(a-x)}, (a \neq b, x \neq a)$.

4. (a) $2, (x \neq y)$; (b) $\frac{9}{3x-1}, (x \neq \pm 3, x \neq 0)$; (c) $\frac{4x^2}{(x^2-25)^2}, (x \neq \pm 5)$; (d) $\frac{12}{a-1}, (a \neq 1)$.

5. (a) $\frac{2x}{1-x}, (x \neq \pm 2)$; (b) $\frac{2x+6}{x+5}, (x \neq 3)$; (c) $\frac{12}{x+7}, (x \neq -1)$.

6. (a) $\frac{x}{y}, (2x - y \neq 0, 2x + 3y \neq 0)$; (b) $\frac{5x}{2 - 3x}, (x \neq \pm \frac{2}{3})$.
7. (a) $6x, (x \neq \pm \frac{1}{3})$; (b) $\frac{2(1 - 5x)}{1 + 5x}, (x \neq 0, x \neq \pm \frac{1}{5})$.
8. (a) $\frac{6}{a + x}, (x \neq 0, x \neq \pm a)$; (b) $\frac{2}{x + a}, (x \neq \pm a)$.
9. (a) $\frac{a}{a + 1}, (a \neq \pm 1)$; (b) $a - b, (ab \neq 0, a \neq b)$; (c) $\frac{3a^2}{x - 1}, (x \neq pm1, a \neq 0)$; (d) $\frac{3}{2}, (x \neq \pm y)$.
10. (a) $\frac{2}{x - 1}, (x \neq \pm 1, a \neq 0)$; (b) $\frac{x + y + z}{b + c - a}$; (c) $a, (x \neq \pm 1, x \neq \pm 2, a \neq -1)$.
11. (a) $\frac{4mn}{m^2 - n^2}, (m \neq \pm n)$; (b) $-\frac{1}{2}, (x \neq -2, x \neq \frac{1}{2})$; (c) $\frac{z}{x}, (z \neq 0, x^2 - yz \neq 0)$; (d) $\frac{1 - b}{a}, (a \neq \pm 1, b \neq -1)$.
12. (a) $\frac{mn}{m + n}, (m \neq 0, n \neq 0, m \neq \pm n)$; (b) $\frac{1 + 2x}{1 + x}, (x \neq \pm 1)$; (c) $\frac{6}{2x + 1}, (x \neq 0, x \neq \pm \frac{1}{2})$; (d) $a, (x \neq \pm 1)$; (e) $\frac{x + 2}{5x - 11}, (x \neq 4, x \neq -2, x \neq \frac{11}{5})$.
13. (a) $\frac{4a^2 + b^2}{2ab}, (a \neq 0 \neq b, b \neq \pm 2a)$; (b) $(2x + a)^2(2x - a)$; (c) $1 + a, (a \neq \pm 1, a \neq \pm \sqrt{2})$; (d) $x, (x \neq -1)$; (e) $x^{n+1}, (x \neq 0)$.
14. (a) $\frac{1}{x + y}, (x \neq 0 \neq y, x \neq -y)$; (b) $\frac{x + 1}{xy}, (x \neq 0 \neq y, x \neq -y)$; (c) $\frac{2a}{3(a - 4)}, (|a| \neq 2, a \neq 4)$; (d) $-\frac{x + y}{y^2 + x^2}, (x \neq 0 \neq y)$.
15. (a) $\frac{2a + 1}{2}, (|a| \neq 1)$; (b) $-a, (a \neq 0 \neq b)$; (c) $\frac{1}{6a}, (a \neq 0, a \neq -2)$.
16. (a) $\frac{1}{a + 2x}, (x \neq 2, x \neq 3, |x| \neq \frac{a}{2})$; (b) $\frac{1}{a}, (x \neq -3, x \neq -1, x \neq 2a, a \neq 0)$; (c) $\frac{2xy}{x^2 + y^2}, (x \neq 0 \neq y, |x| \neq y)$; (d) $\frac{x - y}{y}, (|x| \neq y \neq 0)$; (e) $\frac{x - 2y}{2}, (x \neq 0 \neq y, |x| \neq 2y)$.
17. (a) $\frac{2bc}{(b + c - a)^2}, (a, b, c \neq 0, b \neq -c, \neq b + c)$; (b) $\frac{1}{xy}, (x \neq 0 \neq y, x \neq -y)$; (c) $\frac{a + 2}{a^{n+1}}, (a \neq 0, |a| \neq 1, a \neq 3)$.
18. (a) $\frac{1}{z + 2}, (|z| \neq 2)$; (b) $\frac{1}{a - 1}, (|a| \neq 1)$; (c) $\frac{m}{2c - m}, (c \neq 0, |m| \neq 2c)$.
19. (a) $\frac{2(x - 2y)}{x - y}, (x \neq y, |x| \neq 2y)$; (b) $\frac{4m}{(m - 1)^2}, (m \neq 0, m \neq 1)$; (c) $1, (a \neq -1)$; (d) $1, (|a| \neq \frac{2}{3})$; (e) $\frac{1}{a - 1}, (|a| \neq 1)$; (f) $0, (|m| \neq \frac{1}{2})$.

20. (a) $\frac{9}{x-y}$, ($|x| \neq y$); (b) 9, ($|x| \neq 2, x \neq 1$); (c) $\frac{x+2}{2}$, ($|x| \neq 2, |x| \neq 1$).
21. (a) $\frac{5}{x(x+5)}$, ($x \neq 0; -1; -2; -3; -4; -5$); (b) 1; (c) 1, ($|x| \neq 1$); (d) $\frac{2a-2}{a-2}$, ($a \neq 0, a \neq 2, a \neq 1$).
- (e) Vlen

$$\frac{|x^2-1|+x^2}{2x^2-1} - \frac{|x-1|}{x-1} = \begin{cases} 2, & \text{për } x \in (-\infty, -1] \\ \frac{2x^2}{2x^2-1}, & \text{për } x \in (-1, 1) \setminus \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \\ 0, & \text{për } x \in (1, \infty). \end{cases}$$

(f) Vlen

$$\frac{|x|-1}{x^2-1} - \frac{x^2-|x|}{x^2-2|x|+1} = -\frac{x^2+1}{x^2-1}, (x \neq \pm 1).$$

22. (a) 0, ($a \neq b \neq c \neq a$); (b) 1, ($x \neq y \neq z \neq x$); (c) 0, ($|a| \neq -b, b \neq -c$).

23. 4.

24. $3x-2$.

25. $2a+3$.

26. $-\frac{ab}{(a+b)^2}$.

27. Për rastet (a) dhe (b) duhet të vlejë $x \neq y \neq z \neq x; x, y, z \neq 0$. Ngjashëm për rastet (c) dhe (d) duhet të vlejë $a \neq b \neq c \neq a$.

28. (a) a^2b^2 ; (b) 1; (c) 4.

29. $m \in \{5, 6\}$.

Kapitulli III

Sistemet e ekuacioneve dhe inekuacioneve lineare

3.1. Ekuacionet lineare me një të panjohur

Përkufizim 3.1.1. Çdo ekuacion i formës $a \cdot x = b$, apo që mund të transformohet në këtë formë, ku $a, b \in \mathbf{R}$, ndërsa x është e panjohura, quhet ekuacion linear me një të panjohur.

Lexuesi nuk e ka vëshirë të konstatojë se ekuacionet $3x = -8x + 5$, $\frac{x+1}{2} - \frac{2x-3}{7} = \frac{1}{3}$, $\sqrt{2}x - 3 = 2x + 6$ janë ekuacione lineare, ndërsa ekuacionet $x^2 - 3x + 4 = 0$, $x^{\frac{1}{2}} - 2x = 3$, etj. nuk janë lineare.

Përkufizim 3.1.2. Çdo parametër real α i tillë që kur x -in e zëvendësojmë me α ekuacioni shndërrohet në formulë të saktë, quhet zgjidhje e ekuacionit.

Në vazhdim me B do të shënojmë bashkësinë e zgjidhjeve të një ekuacioni, sistemi të ekuacioneve, inekuacioni apo sistemi të inekuacioneve. Atëherë

$$B = \{\alpha | \alpha \in \mathbf{R} \quad \mathcal{V}(\alpha x = b) = \top\}, \quad (1)$$

ku $\mathcal{V}(F)$ shënon vlerën e saktësisë të formulës F .

Nëse B ka një element, atëherë themi se ekuacioni është i zgjidhshëm dhe i caktuar; nëse B ka më shumë se një element, atëherë themi se ekuacioni është i zgjidhshëm dhe i pacaktuar dhe nëse $B = \emptyset$, atëherë themi se ekuacioni është i pamundur. Prandaj ekuacioni $a \cdot x = b$ është i zgjidhshëm dhe i caktuar nëse $a \neq 0$; i zgjidhshëm dhe i pacaktuar nëse $a = b = 0$ dhe i pamundur nëse $a = 0$, por $b \neq 0$.

Për dy ekuacione themi se janë *ekuivalente* nëse bashkësitë e zgjidhjeve i kanë të barabarta. Prandaj bashkësia e zgjidhjeve e një ekuacioni nuk ndërron nëse:

1. Dy anët e tij i ndërrojnë vendet,
2. Të dy anëve të ekuacionit u shtojmë ose u zbresim shprehje të njëjta algjebrike të shumëzuara me ndonjë shprehje të njëjtë,
3. Të dy anët e ekuacionit i shumëzojmë ose pjesëtojmë me një numër (shprehje) të ndryshëm nga zero.

Shembulli 3.1. Të zgjidhet ekuacioni $|x - 1| + |x - 3| = 10$.

Zgjidhje. Së pari lirohemi nga vlera absolute.

1. Për $x \in (-\infty, 1]$, $x - 1 \leq 0$ dhe $x - 3 < 0$, prandaj $|x - 1| = -(x - 1) = -x + 1$ dhe $|x - 3| = -(x - 3) = -x + 3$. Zëvendësojmë në ekuacion dhe do të marrim $-x + 1 - x + 3 = 10$, prej nga kemi se $x = -3$. Meqë $-3 \in (-\infty, 1]$, përfundojmë se -3 është zgjidhje e ekuacionit. Shënojmë me $B_1 = \{-3\}$.

2. Për $x \in (1, 3]$, $x - 1 > 0$ dhe $x - 3 \leq 0$, prandaj $|x - 1| = x - 1$ dhe $|x - 3| = -(x - 3) = -x + 3$. Zëvendësojmë në ekuacion dhe do të marrim $x - 1 - x + 3 = 10$, respektivisht $2 = 10$. Meqë kjo është një formulë e pasaktë, përfundojmë se $B_2 = \emptyset$.

3. Për $x \in (3, \infty)$, $x - 1 > 0$ dhe $x - 3 > 0$, prandaj $|x - 1| = x - 1$ dhe $|x - 3| = x - 3$. Zëvendësojmë në ekuacion dhe do të marrim $x - 1 + x - 3 = 10$, prej nga kemi se $x = 7$. Meqë $7 \in (3, \infty)$, përfundojmë se 7 është zgjidhje e ekuacionit. Shënojmë me $B_3 = \{7\}$. Tani $B = \bigcup_{i=1}^3 B_i = \{-3, 7\}$. D.m.th. ekuacioni i dhënë i ka dy zgjidhje.

Shembulli 3.2. Të zgjidhet dhe të diskutohet bashkësia e zgjidhjeve e ekuacionit $m^2x + 4 = m(x + 4)$ për vlera të ndryshme të parametrin real m .

Zgjidhje. Ekuacioni i dhënë është ekuivalent me ekuacionin $(m^2 - m)x = 4(m - 1)$. Tani dallojmë rastet:

1. Nëse $m^2 - m \neq 0$, d.m.th. $0 \neq m \neq 1$, ekuacioni është i zgjidhshëm dhe i caktuar dhe zgjidhja e tij është $x = \frac{4(m - 1)}{m(m - 1)} = \frac{4}{m}$, pra bashkësia e zgjidhjeve është $B = \left\{ \frac{4}{m} \right\}$.

2. Nëse $m^2 - m = 0$, d.m.th. $m = 0$ ose $m = 1$, atëherë dallojmë nënrastet:

a) Nëse $m = 0$, ekuacioni fillestar merr formën $4 = 0$, gjë që është një kontradiksion. Kjo tregon se ekuacioni i dhënë për vlerën e parametrin $m = 0$ nuk është i zgjidhshëm, pra $B = \emptyset$.

b) Nëse $m = 1$, ekuacioni fillestar merr formën $x + 4 = x + 4$, respektivisht $4 = 4$, gjë që është një formulë e saktë për çdo $x \in \mathbf{R}$. Kjo tregon se ekuacioni i dhënë për vlerën e parametrin $m = 1$ është i zgjidhshëm dhe i pacaktuar, d.m.th. $B = \mathbf{R}$.

Te disa ekuacione është e nevojshme që ndonjë shprehje që përmban të panjohurën të zëvendësohet me ndonjë ndryshore të re e pastaj të zgjidhet sipas saj dhe në fund ato vlera të gjetura të panjohurës së re i zëvendësojmë dhe kështu i marrim zgjidhjet e të panjohurës fillestare.

Shembulli 3.3. Të zgjidhim ekuacionin $\frac{29}{24} - \frac{4}{x - 8} = \frac{3}{2x - 16} - \frac{2}{3x - 24}$.

Zgjidhje. Pas zëvendësimit $\frac{1}{x-8} = t$, marrim $\frac{29}{24} - 4t = \frac{3}{2}t - \frac{2}{3}t$, Zgjidhja e ekuacionit të fundit në lidhje me t është $t = \frac{1}{4}$, ndërsa $x = 12$.

Shembulli 3.4. Të zgjidhet ekuacioni

$$\frac{3}{4y-12} - \frac{0.75y-2}{y^2-6y+9} = \frac{y+2}{y^3-9y^2+27y-27}.$$

Zgjidhje. Vlen

$$\begin{aligned} \frac{3}{4y-12} - \frac{0.75y-2}{y^2-6y+9} &= \frac{y+2}{y^3-9y^2+27y-27} \\ \Leftrightarrow \frac{3}{4(y-3)} - \frac{0.75y-2}{(y-3)^2} &= \frac{y+2}{(y-3)^3}, \quad y \neq 3 \\ \Leftrightarrow 3(y-3)^2 - (3y-8)(y-3) &= 4(y+2), \quad y \neq 3 \\ \Leftrightarrow 3y^2 - 18y + 27 - (3y^2 - 17y + 24) &= 4y + 8 \\ \Leftrightarrow -5y &= 5 \\ \Leftrightarrow y &= -1. \end{aligned}$$

Detyra në lidhje me ekuacionet

1. Të zgjidhen ekuacionet që vijojnë

$$\begin{aligned} (a) \quad \frac{x-3}{x+3} + \frac{3x-1}{3x+1} &= 2, \\ (b) \quad \frac{2x-9}{2x-5} + \frac{3x}{3x-2} &= 2, \\ (c) \quad \frac{9x+1}{4x-3} - 3 &= \frac{1-x}{20x-15} + \frac{2x+5}{4x-3}, \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} (a) \quad \frac{3y-1}{y-4} - \frac{6y+5}{3y+9} + \frac{9}{5y+15} &= \frac{11}{45}, \\ (b) \quad \frac{4y-1}{y-4} - \frac{5y}{3y-12} - \frac{6y-4}{5y-20} &= 1 + \frac{y+1}{2y-8}, \\ (c) \quad \frac{y+1}{2y-1} - \frac{11y+5}{12(2y-1)} &= \frac{y-3}{4y-8y} + \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} (a) \quad \frac{1}{8z-16} + \frac{5-z}{8z-4z^2} &= \frac{7}{8z} - \frac{z-1}{2z(z-2)}, \\ (b) \quad \frac{z-1}{2z^2-18} - \frac{4z+1}{4z^2-36} + \frac{2}{z+3} &= \frac{3}{2z-6}, \\ (c) \quad \frac{6z+5}{4z+3} - \frac{7-3z}{3-4z} &= \frac{12z^2+30z-21}{16z^2-9}. \end{aligned}$$

4.

$$(a) \frac{3}{4y-12} - \frac{0.75y-2}{y^2-6y+9} = \frac{y+2}{y^3-9y^2+27y-27},$$

$$(b) \frac{4y}{1-6y+12y^2-8y^3} = \frac{1}{2(1-4y^2)} - \frac{3}{8y^2-8y+2},$$

$$(c) \frac{1}{15y-10} - \frac{5-y}{27y^3-54y^2+36y-8} = \frac{1,2y-1}{18y^2-24y+8}.$$

5.

$$(a) |x| + 2(x-3) = 6,$$

$$(b) |x-2| = 4,$$

$$(c) |3x-2| + x = 2,$$

$$(d) 2|x+1| + x - 3 = 0,$$

$$(e) |x| + |x-1| = 1,$$

$$(f) |x+2| + |x-3| = 5,$$

$$(g) |x-1| + |x-2| + |x-3| = 18,$$

$$(h) |x-2| + |x-1| = |x+2|,$$

$$(i) 2 + |x-6| = |x-4|,$$

$$(j) |x-2| + |x-3| + 2|x-4| = 9,$$

$$(k) |x+1| - |x| + 3|x-1| - 2|x-2| = x+2,$$

$$(l) |x| + |x-1| = -1.$$

6. Tregoni se ekuacionet

$$(a) \frac{x+1}{8-x^3} - \frac{1}{2x^2-x^3} + \frac{2}{x^4+2x^3+4x^2} + \frac{1}{x^2} = 0,$$

$$(b) \frac{x}{x-2} - \frac{2x+6}{x+2} = \frac{x^2}{4-x^2}$$

nuk kanë zgjidhje.

8. Të zgjidhen dhe të diskutohet bashkësia e zgjidhjeve, për vlera të ndryshme të parametrave realë që paraqiten, për ekuacionet që vijojnë

$$(a) \frac{3}{x-m} - \frac{2}{x+m} = \frac{3x-7m}{x^2-m^2},$$

$$(b) \frac{(a+b)x}{a-b} - \frac{(a-b)(a-x)}{a+b} = \frac{(2x+a)(a-b)}{a+b},$$

$$(c) \frac{b-x}{a+x} + \frac{c-x}{a-x} = \frac{a(c-2x)}{a^2-b^2},$$

$$(d) \frac{a-x}{b-a} - \frac{a-x}{a+b} = \frac{2ax}{a^2-b^2},$$

$$(e) \frac{1}{ax-a^2} + \frac{1}{ax-ab} + \frac{1}{bx-ab} + \frac{1}{bx-b^2} = 0.$$

3.1.1. Zbatime të ekuacioneve lineare me një të panjohur

Shembulli 3.5. Shuma e dy numrave është 45, ndërsa herësi është $7 : 8$. Cilët janë numrat e tillë?

Zgjidhje. Le të jenë numrat e kërkuar x dhe $45 - x$. Nga fakti se $\frac{45 - x}{x} = \frac{7}{8}$ marrim se $x = 24$. D.m.th. numrat e kërkuar janë 21 dhe 24.

Shembulli 3.6. Shuma e dy numrave është 47. Nëse numri i madh pjesëtohet me numrin e vogël, atëherë herësi është dy dhe mbetja është 5. Cilët janë këta numra?

Zgjidhje. Le të jetë x njëri nga numrat e kërkuar. Atëherë nga $47 - x = 2x + 5$ marrim numrat e kërkuar 14 dhe 33.

Shembulli 3.7. Shifra e njësheve të një numri dyshifror është 2. Nëse katrorin e atij numri e zvogëlojmë për prodhimin e dy fqinjëve të tij, atëherë merret numri 1. Cili është ai numër?

Zgjidhje. Le të jetë x shifra e dhjetsheve e numrit të kërkuar. Atëherë ai do të jetë i formës $10x + 2$, ku $x \in \{1, 2, \dots, 9\}$. Prandaj kemi

$$(10x + 2)^2 - (10x + 1)(10x + 3) = 1 \iff 1 = 1,$$

që d.m.th. se numrat e kërkuar janë të gjithë numrat dyshifrorë me shifrën e njësheve 2. Pra $B = \{12, 22, 32, 42, 52, 62, 72, 82, 92\}$.

Shembulli 3.8. Shuma e shifrave të një numri dyshifror është 8. Nëse shifrat i ndërrojnë vendet e pastaj numrin e parë e pjesëtojmë me të dytin, merret herësi 2 dhe mbetja 10. Cili është ai numër?

Zgjidhje. Le të jetë x shifra e dhjetsheve e numrit të kërkuar. Atëherë shifra e njësheve është $8 - x$. D.m.th. numri i kërkuar është i formës $10x + 8 - x = 9x + 8$. Numri i dytë do të jetë i barabartë me $10(8 - x) + x = 80 - 9x$. Nga kushi i detyrës kemi

$$9x + 8 = 2(80 - 9x) + 10 \iff x = 6.$$

D.m.th. numri i kërkuar është 62.

Shembulli 3.9. Nëse babai ka 45 vite, ndërsa djali 22, atëherë pas sa viteve babai do të jetë dy herë më i vjetër se i biri?

Zgjidhje. Nëse me x e shënojmë numrin e viteve pas të cilave babai do të ishte dy herë më i vjetër se i biri, atëherë do të kemi ekuacionin

$$45 + x = 2(22 + x) \iff x = 1.$$

D.m.th. pas një viti do të plotësohej kërkesa e detyrës.

Shembulli 3.10. Nëse i biri është për 24 vite më i ri se i ati, ndërsa para 6 viteve ai ka qenë 7 herë më i ri se babai i tij, atëherë të gjendet mosha e secilit prej tyre.

Zgjidhje. Nëse me x shënojmë numrin e viteve të të atit që ka sot, atëherë i biri i tij do të ketë $x - 24$ vite. Para 6 viteve, i ati ka pasur $x - 6$ vite, kurse i biri ka pasur $x - 24 - 6 = x - 30$ vite. Prandaj nga kushi i detyrës do të kemi ekuacionin:

$$x - 6 = 7(x - 30) \iff x = 34.$$

D.m.th. i ati ka 34 vite, ndërsa i biri ka 10.

Shembulli 3.11. Të supozojmë se kemi dy fuçi me tretje, prej të cilave njëra ka koncentrim të alkoolit 40%, ndërsa tjetra 60%. Nëse na duhen 12 litra tretje me koncentrim të alkoolit 57.5%, atëherë nga sa litra duhet të marrim nga fuçitë në mënyrë që të kemi sasinë e kërkuar të tretjes me koncentrimin e alkoolit të dhënë më parë?

Zgjidhje. Nëse me x shënojmë numrin e litrave të cilat duhet t'i marrim nga fuçia e parë me koncentrim të alkoolit 40%, atëherë nga fuçia e dytë duhet të marrim $12 - x$ litra. Prandaj kemi ekuacionin

$$x \cdot \frac{40}{100} + (12 - x) \cdot \frac{60}{100} = 12 \cdot \frac{57.5}{100},$$

prej nga marrim se $x = 1.5$. D.m.th. nga fuçia e parë duhet marrë 1.5 litra, ndërsa nga e dyta 10.5 litra.

Shembulli 3.12. Ckatoni numrin natyral n të tillë që ndryshimi ndërmjet prodhimit të dy pasardhësve të tij dhe prodhimit të dy parardhësve të jetë i barabartë me 600.

Zgjidhje. Nëse me n shënojmë numrin e kërkuar, atëherë kemi

$$(n + 1)(n + 2) - (n - 1)(n - 2) = 600 \iff n = 100.$$

Shembulli 3.13. Shpejtësia e dytë kozmike është për $3.3 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ më e madhe se e para, ndërsa e treta është për $5.2 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ më e madhe se e dyta. Prodhimi i shpejtësisë së parë dhe të tretë është për 4.12 më i madh se katrori i shpejtësisë së dytë. Caktoni të tri shpejtësitë kozmike.

Zgjidhje. Vlen $v_2 = v_1 + 3.3$, $v_3 = v_2 + 5.2$, $v_1 v_3 = 4.12 + v_2^2$, prandaj

$$\begin{aligned} v_1(v_1 + 8.5) &= 4.12 + (v_1 + 3.3)^2 \\ v_1^2 + 8.5v_1 &= 4.12 + v_1^2 + 6.6v_1 + 10.89 \\ 1.9v_1 &= 15.01 \\ v_1 &= 7.9 \frac{\text{km}}{\text{s}}, \end{aligned}$$

ndërsa $v_2 = 11.2 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ dhe $v_3 = 16.4 \frac{\text{km}}{\text{s}}$.

Shembulli 3.14. Syprina e një sipërfaqeje drejtkëndëshe është për 125 cm^2 më e madhe se syprina e sipërfaqes katrorore të ndërtuar mbi brinjën më të vogël të tij. Caktoni brinjët e drejtkëndëshit nëse ndryshimi i gjatësive të tyre është 5 cm .

Zgjidhje. Vlen $a - b = 5$ ($a \geq 5$), $S_1 = ab$, $S_2 = b^2$, prandaj $ab = b^2 + 125$, respektivisht $(b + 5)b = b^2 + 125$, prej nga marrim se $b = 25 \text{ cm}$ dhe $a = b + 5 = 30 \text{ cm}$.

Shembulli 3.18. Shqyrtoni se treshja e renditur $(4, 3, 2)$ është apo jo zgjidhje e sistemit të ekuacioneve

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 9 \\ x + 2y + 3z &= 16 \\ x + 3y + 4z &= 21 \end{aligned} \right\}.$$

Zgjidhje. Edhe këtu zëvendësojmë $x = 4, y = 3, z = 2$ dhe do të kemi

$$\left. \begin{aligned} 4 + 3 + 2 &= 9 \\ 4 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 &= 16 \\ 4 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 &= 21 \end{aligned} \right\} \sim \left. \begin{aligned} 9 &= 9 \\ 16 &= 16 \\ 21 &= 21 \end{aligned} \right\}.$$

Meqenëse të gjitha ekuacionet u bënë formula të sakta, përfundojmë se treshja e renditur është zgjidhje e sistemit të dhënë të ekuacioneve.

Ekzistojnë disa metoda për zgjidhjen e sistemeve të ekuacioneve lineare:

1. *Metoda e zëvendësimit.* Zgjidhet njëra nga të panjohurat prej cilitdo ekuacion të sistemit dhe zëvendësohet në ekuacionet tjera dhe me atë rast numri i të panjohurave zvogëlohet për një. Duke vazhduar këtë mënyrë, problemin e kthejmë deri te zgjidhja e një ekuacioni linear me një të panjohur. (Zgjedhni atë të panjohur me koeficient të barabartë me 1 (nëse ka të tillë)).
2. *Metoda e eliminimit.* Duke shfrytëzuar vetinë se bashkësia e zgjidhjeve e një sistemi nuk ndryshon në qoftë se disa (apo të gjitha) ekuacione të tij shumëzohen (pjesëtohen) me shprehje të ndryshme nga zeroja dhe u shtohen ndonjë ekuacioni tjetër, bëhet reduktimi i numri të të panjohurave.
3. *Metoda e përcaktorëve (formulat e Kramerit).* Nëse $m = n$, atëherë sistemi (1) mund të zgjidhet me formulat e Kramerit (Gabriel Cramer (1704–1752) matematikan zviceran).

$$x_1 = \frac{d_1}{d}, \quad x_2 = \frac{d_2}{d}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{d_n}{d}, \quad (3)$$

ku $d = \det A = \det (a_{ij})_n$ quhet *përcaktor (determinantë)* e rendit n .

Ekzistojnë edhe metoda tjera (e Gausit, matricore) për zgjidhjen e sistemeve të ekuacioneve lineare, por në kuadër të këtij kursi do të merremi me zgjidhjen e sistemeve të ekuacioneve lineare me 2 dhe 3 të panjohura, kurse për këtë qëllim do të shfrytëzojmë ndonjëherë nga tri metodat e përmendura më lartë. Metoda matricore dhe ajo e Gausit shqyrtohen më thellësisht në lëndën e algjebres.

Përkufizim 3.2.3. *Numri*

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (4)$$

quhet përcaktor (determinantë) e rendit të dytë. Bashkësinë $\{a_{i1}, a_{i2}\}$, $i = 1, 2$ e quajmë rreshti i -të i përcaktorit, ndërsa $\{a_{1i}, a_{2i}\}$, $i = 1, 2$ e quajmë shtylla (kolona) e i -të e përcaktorit.

Shembulli 3.19. T'i vlerësojmë disa përcaktorë të rendit të dytë.

$$d = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - 5 \cdot (-1) = 8 + 5 = 13,$$

$$d = \begin{vmatrix} m & 4 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 4 = (m - 2)(m + 2).$$

Përkufizim 3.2.4. Numri

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{32}a_{21} + a_{31}a_{12}a_{23} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{32}a_{23} + a_{12}a_{21}a_{33}) \quad (5)$$

quhet përcaktor (determinantë) e rendit të tretë.

Edhe këtu, sikur te përcaktorët e rendit të dytë, dallojmë rreshtin e i -të, respektivisht shtyllën e i -të.

Shembulli 3.20. Vlera e përcaktorëve të rendit të tretë që vijojnë janë

$$d = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 2 \cdot 1 - (2 \cdot 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 \cdot 3) = 9,$$

$$d = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix} = a^4 + a + a - a - a^2 - a^3 = a^3(a - 1) - a(a - 1) = a(a - 1)^2(a + 1).$$

Përcaktorët e rندهve më të larta se 3 nuk janë objekt i studimit të lëndës në këtë kurs, ndërsa informacione mund të gjeni p.sh. në cilindo kurs të algjebres.

Shembulli 3.21. Të zgjidhen sistemet e ekuacioneve lineare

$$(a) \quad \left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 6y = 7 \end{array} \right\} \quad (b) \quad \left. \begin{array}{l} 3x + 5y = 1 \\ 3x - 2y = 8 \end{array} \right\} \quad (c) \quad \left. \begin{array}{l} 3(x - 1) + 5(y - 1) = -4 \\ 5(x + 3) - 3(y + 1) = 64 \end{array} \right\}$$

(a) Të zbatohet metodën e zëvendësimit. Nga ekuacioni i parë marrim se $3y = 7 - 2x$. Këtë vlerë e zëvendësojmë në ekuacionin e dytë dhe marrim $3x - 2 \cdot (7 - 2x) = 7$. Ekuacioni i fundit është linear me një të panjohur, ndërsa zgjidhja e tij është $x = 3$. Pas zëvendësimit në ekuacionin $3y = 7 - 2x$ marrim se $y = \frac{1}{3}$. D.m.th. bashkësia e zgjidhjeve e sistemit është $B \left\{ \left(3, \frac{1}{3} \right) \right\}$. Pra sistemi është i caktuar.

(b) Të zabtojmë metodën e eliminimit për zgjidhjen e sistemit në këtë rast. Vlen

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 5y = 1 \\ 3x - 2y = 8 \end{array} \right\} \sim \left. \begin{array}{l} -3x - 5y = -1 \\ 3x - 2y = 8 \end{array} \right\}$$

Tani i mbledhim anë për anë ekuacionet dhe marrim

$$\left. \begin{array}{l} -7y = 7 \\ 3x - 2y = 8 \end{array} \right\} \sim \left. \begin{array}{l} y = -1 \\ 3x - 2 \cdot (-1) = 8 \end{array} \right\} \sim \left. \begin{array}{l} y = -1 \\ x = 3 \end{array} \right\}$$

D.m.th. dyshja e renditur $(3, -1)$ është zgjidhje e sistemit, ndërsa bashkësia e zgjidhjeve e sistemit është $B = \{(3, -1)\}$.

(c) Të zabtojmë metodën e Kramerit për zgjidhjen e këtij sistemi. Së pari sistemin duhet ta transformojmë si atë të formës (1). Këtu

$$\left. \begin{array}{l} 3(x-1) + 5(y-1) = -4 \\ 5(x+3) - 3(y+1) = 64 \end{array} \right\} \sim \left. \begin{array}{l} 3x + 5y = 4 \\ 5x - 3y = 52 \end{array} \right\}.$$

Tani

$$d = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -34, \quad d_1 = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 52 & -3 \end{vmatrix} = -272, \quad d_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 52 \end{vmatrix} = 136.$$

Tani

$$x = \frac{d_1}{d} = \frac{-272}{-34} = 8, \quad y = \frac{d_2}{d} = \frac{136}{-34} = -4.$$

D.m.th. $(x, y) = (8, -4)$ është zgjidhja e vetme e sistemit.

Shembulli 3.22. Të zgjidhen sistemet

$$(a) \quad \left. \begin{array}{l} x - 5y = 2 \\ -2x + 10y = -4 \end{array} \right\} \quad (b) \quad \left. \begin{array}{l} -x + 2y = 1 \\ x - 2y = 2 \end{array} \right\}.$$

(a) Nëse ekuacionin e parë e shumëzojmë me 2 dhe pastaj i mbledhim anë për anë, marrim identitetin $0 \equiv 0$, që d.m.th. se sistemi i dhënë është ekuivalent me ekuacionin linear $x - 5y = 2$. Bashkësia e zgjidhjeve e sistemit është

$$B = \{(5\alpha + 2, \alpha) | \alpha \in \mathbf{R}\},$$

e cila gjeometrikisht paraqet drejtëzën $x - 5y = 2$ në rrafshin koordinativ.

(c) Po t'i mbledhim ekuacionet e sistemit anë për anë do të marrim një formulë jo të saktë $0 = 3$. D.m.th. sistemi është i pazgjidhshëm, respektivisht $B = \emptyset$.

Shembulli 3.23. Të zgjidhen sistemet e ekuacioneve

$$(a) \quad \left. \begin{array}{l} \frac{4}{x+y-1} + \frac{1}{x-y+1} = 1 \\ \frac{18}{x+y-1} - \frac{2.5}{x-y+1} = 1 \end{array} \right\}, \quad (b) \quad \left. \begin{array}{l} |x+1| + |y-1| = 5 \\ |x+1| - 4y = -4 \end{array} \right\}.$$

(a) Zëvendësojmë $\frac{1}{x+y-1} = u$ dhe $\frac{1}{x-y+1} = v$, d.m.th. $x+y-1 = \frac{1}{u}$ dhe $x-y+1 = \frac{1}{v}$. Sistemi i ekuacioneve merr formën

$$\left. \begin{array}{l} 4u + v = 1 \\ 18u - 2.5v = 1 \end{array} \right\} \sim \left. \begin{array}{l} u = \frac{1}{8} \\ v = \frac{1}{2} \end{array} \right\}.$$

Tani marrim sistemin e ekuacioneve

$$\left. \begin{array}{l} x + y - 1 = 8 \\ x - y + 1 = 2 \end{array} \right\} \sim \left. \begin{array}{l} x + y = 9 \\ x - y = 1 \end{array} \right\} \sim \left. \begin{array}{l} x = 5 \\ y = 4 \end{array} \right\}.$$

(b) Dallojmë rastet:

1. Për $y \in (-\infty, 1]$, $y - 1 \leq 0$, prandaj $|y - 1| = -y + 1$, ndërsa ekuacioni transformohet në ekuacionin $-4y + y - 1 = -9$, zgjidhja e të cilit është $y = \frac{8}{3}$.

Meqenëse $\frac{8}{3} \notin (-\infty, -1]$, përfundojmë se sistemi i dhënë nuk ka zgjidhje në gjysmërrafshin $y \leq -1$. Pra $B_1 = \emptyset$.

2. Për $y \in [-1, \infty)$, $y - 1 \geq 0$, prandaj $|y - 1| = y - 1$, ndërsa ekuacioni transformohet në ekuacionin $-4y - y + 1 = -9$, zgjidhja e të cilit është $y = 2$. Meqenëse $2 \in [-1, \infty)$, përfundojmë se sistemi i dhënë ka zgjidhje në gjysmërrafshin $y \geq -1$. Tani këtë vlerë të y -it e zëvendësojmë në ekuacionin e dytë të sistemit dhe marrim ekuacionin sipas x -it $|x + 1| = 4$, respektivisht $x + 1 = \pm 4$. Zgjidhjet e këtij të fundit janë $x_1 = 3, x_2 = -5$. Në këtë rast $B_2 = \{(3, 2), (-5, 2)\}$, kurse bashkësia e zgjidhjeve e sistemit është $B = B_1 \cup B_2 = B_2 = \{(3, 2), (-5, 2)\}$.

1. Për $x \in (-\infty, -1]$ dhe $y \in (-\infty, 1]$, d.m.th. $(x, y) \in (-\infty, -1] \times (-\infty, 1]$ sistemi i dhënë është ekuivalent me sistemin

$$\left. \begin{array}{l} -x - 1 - y + 1 = 5 \\ -x - 1 - 4y = -4 \end{array} \right\} \sim \left. \begin{array}{l} -x - y = 5 \\ -x - 4y = -3 \end{array} \right\} \sim \left. \begin{array}{l} x = -\frac{23}{3} \\ y = \frac{8}{3} \end{array} \right\}$$

Meqenëse $y = \frac{8}{3} \notin (-\infty, 1]$, përfundojmë se në bashkësinë (zonën) $(-\infty, -1] \times (-\infty, 1]$ të rrafshit \mathbf{R}^2 sistemi i dhënë nuk ka zgjidhje. Pra, $B_1 = \emptyset$.

2. Për $x \in (-\infty, -1]$ dhe $y \in [1, \infty)$, d.m.th. $(x, y) \in (-\infty, -1] \times [1, \infty)$ sistemi i dhënë është ekuivalent me sistemin

$$\left. \begin{array}{l} -x - 1 + y - 1 = 5 \\ -x - 1 - 4y = -4 \end{array} \right\} \sim \left. \begin{array}{l} -x + y = 7 \\ -x - 4y = -3 \end{array} \right\} \sim \left. \begin{array}{l} x = -5 \\ y = 2 \end{array} \right\}.$$

Meqenëse $(x, y) = (-5, 2) \in (-\infty, -1] \times [1, \infty)$, përfundojmë se $(-5, 2)$ është zgjidhje e sistemit. Pra, $B_1 = \{(-5, 2)\}$.

3. Për $x \in [-1, \infty)$ dhe $y \in (-\infty, 1]$, d.m.th. $(x, y) \in [-1, \infty) \times (-\infty, 1]$ sistemi i dhënë është ekuivalent me sistemin

$$\left. \begin{array}{l} x + 1 - y + 1 = 5 \\ x + 1 - 4y = -4 \end{array} \right\} \sim \left. \begin{array}{l} x - y = 3 \\ -x - 4y = -5 \end{array} \right\} \sim \left. \begin{array}{l} x = \frac{17}{3} \\ y = \frac{8}{3} \end{array} \right\}.$$

Meqenëse $y = \frac{8}{3} \notin (-\infty, 1]$, përfundojmë se në bashkësinë (zonën) $[-1, \infty) \times (-\infty, 1]$ të rrafshit \mathbf{R}^2 sistemi i dhënë nuk ka zgjidhje. Pra, $B_3 = \emptyset$.

4. Për $x \in [-1, \infty)$ dhe $y \in [1, \infty)$, d.m.th. $(x, y) \in [-1, \infty) \times [1, \infty)$ sistemi i dhënë është ekuivalent me sistemin

$$\left. \begin{array}{l} x + 1 + y - 1 = 5 \\ x + 1 - 4y = -4 \end{array} \right\} \sim \left. \begin{array}{l} x + y = 5 \\ x - 4y = -5 \end{array} \right\} \sim \left. \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 2 \end{array} \right\}.$$

Meqenëse $(x, y) = (3, 2) \in [-1, \infty) \times [1, \infty)$, përfundojmë se $(3, 2)$ është zgjidhje e sistemit. Pra, $B_1 = \{(3, 2)\}$. Prandaj bashkësia e zgjidhjeve e sistemit është $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 = \{(-5, 2), (3, 2)\}$.

Shembulli 3.24. Të zgjidhen sistemet e ekuacioneve lineare

$$(a) \left. \begin{array}{l} x + 2y - 5z = 6 \\ -2x + y + 2z = 5 \\ -3x + 3y - 4z = 8 \end{array} \right\}, \quad (b) \left. \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 4y - 6z = -2 \\ -x + 2y + 6z = 4 \end{array} \right\}.$$

Zgjidhje. (a) Provojmë që këto sisteme t'i zgjidhim me metodën e Kramerit.

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-4) + (-3) \cdot 2 \cdot 2 + (-5) \cdot 3 \cdot (-2) - ((-3) \cdot 1 \cdot (-5) + 1 \cdot 2 \cdot 3 + (-4) \cdot 2 \cdot (-2)) = -23.$$

Meqenëse $d \neq 0$, atëherë mund të zbatohet formulat e Kramerit

$$x = \frac{d_1}{d}, \quad y = \frac{d_2}{d}, \quad z = \frac{d_3}{d},$$

ku

$$d_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & -5 \\ 5 & 1 & 2 \\ 8 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -23 \quad d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -5 \\ -2 & 5 & 2 \\ -3 & 8 & -4 \end{vmatrix} = -115 \quad d_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -2 & 1 & 5 \\ -3 & 3 & 8 \end{vmatrix} = -23.$$

Përcaktori d_i merret nga përcaktori d ashtu që shtylla e i -të e tij zëvendësohet me shtyllën e gjymtyrëve të lira $(6, 5, 8)$. Tani

$$x = \frac{d_1}{d} = \frac{-23}{-23} = 1, \quad y = \frac{d_2}{d} = \frac{-115}{-23} = 5, \quad z = \frac{d_3}{d} = \frac{-23}{-23} = 1.$$

D.m.th. treshja e renditur $(1, 5, 1)$ është e vetmja zgjidhje e sistemit.

Shembulli 3.25. Janë dhënë sistemet e ekuacioneve lineare

$$(a) \left. \begin{array}{l} mx + y = 1 \\ x + my = 1 \end{array} \right\} \quad (b) \left. \begin{array}{l} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{array} \right\}.$$

Të zgjidhen dhe të diskutohet bashkësia e zgjidhjeve për vlera të ndryshme të parametrin real m .

Zgjidhje. (a) Do të zbatojmë metodën e Kramerit (pasi që numri i ekuacioneve është i barabartë me numrin e të panjohurave).

$$d = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1, \quad d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m - 1, \quad d_2 = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m - 1.$$

1. Nëse $d \neq 0$, d.m.th. $m \neq \pm 1$, atëherë sistemi është i zgjidhshëm dhe i caktuar dhe zgjidhja e tij është dyshja e renditur (x, y) , ku

$$x = \frac{d_1}{d} = \frac{m-1}{m^2-1} = \frac{m-1}{(m-1)(m+1)} = \frac{1}{m+1}, \quad y = \frac{d_2}{d} = \frac{m-1}{m^2-1} = \frac{1}{m+1}.$$

2. Nëse $d = 0$, d.m.th. $m \in \{-1, 1\}$ dallojmë dy nënraste:

(a) Nëse $m = -1$, atëherë sistemi merr formën

$$\left. \begin{array}{l} -x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{array} \right\},$$

që pasi t'i mbledhim anë për anë marrim formulën e pasaktë $0 = 2$, që d.m.th. se për këtë vlerë sistemi nuk ka zgjidhje.

(b) Nëse $m = 1$, atëherë sistemi merr formën

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{array} \right\} \sim x + y = 1 \sim y = 1 - x,$$

d.m.th. se për këtë vlerë të m -it sistemi është i zgjidhshëm dhe i pacaktuar. Bashkësia e zgjidhjeve është $B = \{(\alpha, 1 - \alpha) | \alpha \in \mathbf{R}\}$.

(b) I njehsojmë përcaktorët

$$d = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m-1)^2(m+2), \quad d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m & 1 \\ m^2 & 1 & m \end{vmatrix} = -(m+1)(m-1)^2,$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & m^2 & m \end{vmatrix} = (m-1)^2 \quad d_3 = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 1 & 1 & m^2 \end{vmatrix} = (m-1)^2(m+1)^2.$$

1. Nëse $d \neq 0$, d.m.th. $m \neq 1, m \neq -2$, sistemi është i zgjidhshëm dhe i caktuar. Zgjidhja e vetme e tij është

$$\begin{aligned}x &= \frac{d_1}{d} = \frac{-(m-1)^2(m+1)}{(m-1)^2(m+2)} = -\frac{m+1}{m+2}, \\y &= \frac{d_2}{d} = \frac{(m-1)^2}{(m-1)^2(m+2)} = \frac{1}{m+2}, \\z &= \frac{d_3}{d} = \frac{(m-1)^2(m+1)^2}{(m-1)^2(m+2)} = \frac{(m+1)^2}{m+2}.\end{aligned}$$

2. Nëse $d = 0$, d.m.th. $m = 1$, ose $m = -2$, dallojmë dy nënraste:

- (a) Nëse $m = 1$, atëherë $d_1 = d_2 = d_3 = 0$, d.m.th. sistemi është i zgjidhshëm dhe i pacaktuar. Në këtë rast sistemi është ekuivalent me ekuacionin $x + y + z = 1$. Bashkësia e zgjidhjeve në këtë rast është $B = \{(\alpha, \beta, 1 - \alpha - \beta) | \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$.
- (b) Nëse $m = -2$, atëherë $d_1 = -(-2+1)(-2-1)^2 = 9 \neq 0, d_2 = (-2-1)^2 = 9 \neq 0, d_3 = (-2-1)^2(-2+1)^2 = 9 \neq 0$. Meqë $d_1 \neq 0$ (mjafton vetëm një nga përcaktorët d_i , ($i = 1, 2, 3$) të jetë i ndryshëm nga zero), atëherë sistemi është i pazgjidhshëm (nuk ka zgjidhje). Pra $B = \emptyset$.

3.2.1. Zbatimet e sistemeve të ekuacioneve lineare

Shembulli 3.26. Nëse nga klasa A kalon një nxënës në klasën B , atëherë numri i nxënësve do të barazohej. Por, nëse nga klasa B kalon një nxënës në klasën A , atëherë numri i nxënësve në klasën A do të jetë dy herë më i madh se numri i nxënësve të mbetur në klasën B . Nga sa nxënës kanë klasat A dhe B ?

Zgjidhje. Nëse me x shënojmë numrin e nxënësve në klasën A , ndërsa me y numrin e nxënësve në klasën B , atëherë marrim sistemin e ekuacioneve lineare

$$\left. \begin{aligned}x - 1 &= y + 1 \\x + 1 &= 2(y - 1)\end{aligned} \right\} \sim \left. \begin{aligned}x &= 7 \\y &= 5\end{aligned} \right\}.$$

Shembulli 3.27. Tregoni se çdo numër i thjeshtë, ¹⁾përveç numrit 2, mund të shkruhet si ndryshim i katrorëve të dy numrave natyralë.

Zgjidhje. Le të jetë p një numër i thjeshtë dhe supozojmë se $p = m^2 - n^2$, ku $m, n \in \mathbf{N}, m > n$. Atëherë nga barazimi $1 \cdot p = (m - n)(m + n)$ marrim se $m + n = p$ dhe $m - n = 1$. Prandaj $m = \frac{p+1}{2} \in \mathbf{N}$ dhe $n = \frac{p-1}{2} \in \mathbf{N}$. Pse numrat $m, n \in \mathbf{N}$?

Shembulli 3.28. Dy punëtorë së bashku mund ta kryejnë një punë A për 8 orë. Ndodhi që njëri punoi 6, ndërsa tjetri 9 orë dhe me atë rast ata

¹⁾ Çdo numër natyral i cili plotëpjesëtohet vetëm me numrin një dhe vetveten quhet i numër i thjeshtë

përfunduan $\frac{51}{56}$ të punës A . Njehsoni se për sa orë secili nga punëtorët do ta kryente punën A duke punuar i vetëm.

Zgjidhje. Le të shënojmë me $P_i, t_i (i = 1, 2)$ "fuqinë" e punëtorit të i -të, respektivisht kohën për të cilën punëtori i kryen punën A . Atëherë $A = P_1 t_1 = P_2 t_2$. D.m.th. $P_i = \frac{A}{t_i} (i = 1, 2)$. Nga kushtet e detyrës kemi sistemin

$$\left. \begin{array}{l} A = (P_1 + P_2) \cdot 8 \\ 6P_1 + 9P_2 = \frac{51}{56}A \end{array} \right\} \sim \left. \begin{array}{l} A = \left(\frac{A}{t_1} + \frac{A}{t_2}\right) \cdot 8 \\ 6\frac{A}{t_1} + 9\frac{A}{t_2} = \frac{51}{56}A \end{array} \right\} \sim \left. \begin{array}{l} \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = \frac{1}{8} \\ \frac{6}{t_1} + \frac{9}{t_2} = \frac{51}{56} \end{array} \right\}.$$

Pasi ta zgjidhim këtë sistem marrim se $t_1 = 14$ orë, ndërsa $t_2 = 18\frac{2}{3}$ orë.

Shembulli 3.29. Para 4 viteve i ati ka qenë 7 herë më i vjetër se i biri, ndërsa pas 4 viteve i ati do të jetë 3 herë më i vjetër si i biri. Nga sa vite kanë secili prej tyre?

Zgjidhje. Nëse me x dhe y shënojmë numrin e viteve të të atit, respektivisht të birit, atëherë kemi sistemin

$$\left. \begin{array}{l} x - 4 = 7(y - 4) \\ x + 4 = 3(y + 4) \end{array} \right\} \sim \left. \begin{array}{l} x = 32 \\ y = 8 \end{array} \right\}.$$

3.3. Proporcionet dhe zbatimet e tyre

Të krahasuarit e dy madhësive është një proces shumë i rëndësishëm në matematikë dhe lëmitë tjera. Vlera absolute e diferencës mes tyre, e cila shpreh "largesën" mes tyre, ndonjëherë nuk është metodë shumë efikase për të bërë krahasimin mes tyre. Prandaj shtrohet nevoja që të zbatohet ndonjë metodë tjetër, në mënyrë që krahasimi të jetë më i kuptueshëm. P.sh. po të spjegohej shkalla e pjesëmarrjes së oksigjenit, apo azotit në ajër përmes masës së tyre (pra në kg), do të ishte shumë vështirë për nxënësin që t'i mbajë mend të gjitha ato shifra; ndërsa po të spjegohej pjesëmarrja e tyre përmes përqindjes (pra proporcioneve), atëherë do të ishte dukshëm më lehtë që nxënësi t'i mbajë mend ato të dhëna. Ngjashëm, strukturën nacionale të një vendi e shprehim në përqindje, pra jo në shifra të sakta, e kështu me radhë. Proporcionet luajnë një rol të rëndësishëm edhe ke thjeshtimet e thyesave në matematikë. P.sh. $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$, që d.m.th. se 3 rrin me 12 njësoj sikur 1 me 4. Proporcionet gjejnë zbatim në shumë fusha tjera, si në demografi, statistikë, kimi, aeronautikë, etj. Duke shfrytëzuar faktin se shumëkëndëshat e ngjashëm i kanë brinjët proporcionale, ne mund të zgjidhim shumë probleme praktike siç tregon shembulli vijues.

Shembulli 3.30. Të njehsojmë lartësinë e pemës e cila ndodhet 100 m larg pozitës sonë, ndërsa nga pika e vendqëndrimit tonë pema shihet nën të njëjtin kënd sikur një trup me lartësi 1.5 m i cili është 10 m larg pozitës sonë (shih fig. 3.1).

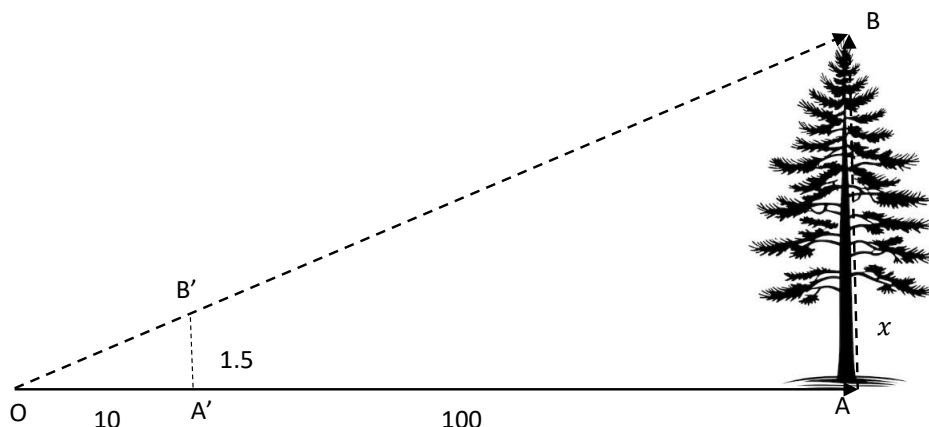


Fig. 3.1

Zgjidhje. Supozojmë se ne ndodhemi në pikën O . Nëse me x shënojmë lartësinë e pemës, atëherë trekëndëshat $\triangle OAB$ dhe $\triangle OA'B'$ janë të ngjashëm (pse?), prandaj brinjët i kanë proporcionale. D.m.th. vlen barazimi

$$x : 100 = 1.5 : 10 \iff x = \frac{1.5}{10} \cdot 100 = 15.$$

Kështu, lartësia e pemës është 15 m.

Ndonjëherë, në vend të ":" , për të shprehur proporcionin, do të përdorim vijën thyesore. D.m.th.

$$a : b = c : d \iff \frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

ndërsa relacioni i fundit lexohet: "a rrin me b sikurse c me d." Po ashtu, përkufizohet proporcioni edhe për tri e më tepër madhësi në këtë mënyrë:

$$a : b : c = m : n : p \iff a : b = m : n \wedge b : c = n : p.$$

Vetitë e proporcioneve:

Nëse $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, atëherë

- (1) $(a \pm b) : b = (c \pm d) : d$,
- (2) $(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d)$,
- (3) $(a \pm \beta \cdot b) : b = (c \pm \beta \cdot d) : d$,
- (2) $(\alpha \cdot a + \beta \cdot b) : (\alpha \cdot a - \beta \cdot b) = (\alpha \cdot c + \beta \cdot d) : (\alpha \cdot c - \beta \cdot d)$.

Shembulli 3.31. Nëse $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p} = 4$, atëherë njehsoni

$$(a) \frac{a - 3b + 2c}{m - 3n + 2p}, \quad (b) \frac{a + b + c}{m + n + p}.$$

Zgjidhje. Meqenëse $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p} = 4$, atëherë kemi $a = 4m, b = 4n, c = 4p$. Prandaj

$$(a) \frac{a - 3b + 2c}{m - 3n + 2p} = \frac{4m - 12n + 8p}{m - 3n + 2p} \\ = \frac{4(m - 3n + 2p)}{m - 3n + 2p} = 4.$$

(b) Ngjashëm marrim se $\frac{a + b + c}{m + n + p} = 4$.

Shembulli 3.32. Nga 66 kg lëndë e parë stof, përfitohen 165 m^2 stof. Sa metra katrorë stof do të përfitoheshin nga 112 kg lëndë e parë?

Zgjidhje. Nëse me x e shënojmë numrin e metrave katrore të stofit të përfituar nga lënda e parë prej 112 kg, atëherë kemi proporcionin $x : 112 = 165 : 66$, prej nga marrim se $x = 280 \text{ m}^2$.

Shembulli 3.33. Një dhëmbëzor me 54 dhëmbë i një makine i bën 84 rrotullime në minut. Nëse ai i përcjell rrotullimet në një dhëmbëzor tjetër i cili i bën 126 rrotullime në minut, atëherë sa dhëmbë do të ketë dhëmbëzori i dytë?

Zgjidhje. Nëse me x shënojmë numrin e dhëmbëve të dhëmbëzorit të dytë, atëherë kemi proporcionin $x : 54 = 126 : 84$, prej nga marrim se $x = 36$.

Shembulli 3.34. 21 punëtorë duke punuar nga 8 orë në ditë për 6 ditë i prodhojnë 720 profile metalike. Për sa ditë 28 punëtorë duke punuar nga 7 orë në ditë do t'i prodhonin 1260 profile të njëjta metalike?

Zgjidhje. Le të shënojmë me x numrin e ditëve gjatë të cilave duhet punuar grupi i dytë prej 28 punëtorëve nga 7 orë në ditë. Atëherë numri total i orëve të punës që bën grupi i dytë është $28 \cdot x \cdot 7$ —orë, ndërsa i pari do të ketë gjithsej $21 \cdot 6 \cdot 8$ —orë pune. Meqenëse prodhimtaria është proporcionale me numrin e orëve të punës, atëherë kemi proporcionin $28 \cdot x \cdot 7 : 21 \cdot 6 \cdot 8 = 1260 : 720$, prej nga marrim se $x = 9$. D.m.th. grupi prej 28 punëtorëve duhet punuar 9 ditë nga 7 orë në ditë në mënyrë që të prodhojë 1260 profile metalike.

Vërejtje 3.1. Këtu kemi konsideruar se të gjithë punëtorët në kushte të njëjta prodhojnë numër të barabartë të profileve metalike.

Shembulli 3.35. Nëse një sallë ndriçohet prej 15 llampave të fuqisë 60 W, atëherë sa llampa të fuqisë 75 W do të nevojiteshin për ndriçimin e njëjtë të të njëjtës sallë?

Zgjidhje. Le të jetë x numri i llampave prej 75 W të nevojshme për të dhënë ndriçimin e njëjtë të të njëjtës sallë. Atëherë, këtu kemi proporcionin e zhdrejtë; d.m.th. numri i llampave prej 75 W rrin me numrin e llampave prej 60 W sikur fuqia e të dytave me fuqinë e të parave, d.m.th. sikur 60:75. Pra, vlen proporcioni $x : 15 = 60 : 75$, prej nga marrim se $x = 12$.

Shembulli 3.36. Dy shokë luajnë së bashku loto dhe njëri investon \$650, ndërsa tjetri \$750. Si do të duhej ndarë preminë prej \$270000, nëse ata e fitojnë atë?

Zgjidhje. Le të jetë x numri i dollarëve që do të merr garuesi i parë i cili ka investuar \$650. Meqenëse ndarja duhet të jetë proporcionale me investimin që kanë bërë lojtarët, atëherë kemi $x : (270000 - x) = 650 : 750 = 13 : 15$, prej nga marrim se $x = 130000$. D.m.th. garuesi i parë merr \$130000, ndërsa i dyti \$140000.

Shembulli 3.37. Si t'u ndahet shuma prej \$728000 tre personave, ashtu që secilit person që vjen t'i jepet 20% më shumë se atij paraprak?

Zgjidhje. Nëse me x shënojmë numrin e dollarëve që i jepen personit të parë, atëherë të dytit do t'i jepen $x + \frac{20}{100} \cdot x = \frac{6}{5}x$, ndërsa të tretit do t'i jepen $\frac{6}{5}x + \frac{20}{100} \cdot \frac{6}{5}x = \frac{36}{25}x$. Prandaj kemi ekuacionin $x + \frac{6}{5}x + \frac{36}{25}x = 728000$, prej nga marrim se $x = 200000$. D.m.th. personi i parë merr \$200000, i dyti merr \$240000, ndërsa i tretë merr \$288000.

Shembulli 3.38. Rezistencat e tre rezistorëve të lidhur në seri qëndrojnë në raport sikur $2 : 3 : 7$. Nëse rezistenca e përgjithëshme e qarkut është 24Ω , atëherë caktoni rezistencën e secilit rezistor.

Zgjidhje. Nëse R_1, R_2, R_3 janë rezistencat përkatëse të tyre, atëherë rezistenca totale R_{tot} te lidhja serike është $R_{\text{tot}} = R_1 + R_2 + R_3$. Meqenëse $R_{\text{tot}} = 24\Omega$, ndërsa $R_1 : R_2 : R_3 = 2 : 3 : 7$, atëherë marrim ekuacionet $R_1 : R_2 = 2 : 3$ dhe $R_2 : R_3 = 3 : 7$, respektivisht $R_1 = \frac{2}{3} \cdot R_2$ dhe $R_3 = \frac{7}{3} \cdot R_2$. Tani,

$$24 = \frac{2}{3} \cdot R_2 + R_2 + \frac{7}{3} \cdot R_2 \iff R_2 = 6\Omega,$$

ndërsa $R_1 = 4\Omega$ dhe $R_3 = 14\Omega$.

Shembulli 3.39. Rezistencat e tre rezistorëve të lidhur në mënyrë paralele qëndrojnë në raport sikur $1 : 2 : 5$. Nëse rezistenca e përgjithëshme e qarkut është 10Ω , atëherë caktoni rezistencën e secilit rezistor.

Zgjidhje. Nëse R_1, R_2, R_3 janë rezistencat përkatëse të tyre, atëherë rezistenca totale R_{tot} te lidhja paralele është $\frac{1}{R_{\text{tot}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$. Meqenëse $R_{\text{tot}} = 10\Omega$, ndërsa $R_1 : R_2 : R_3 = 1 : 2 : 5$, atëherë marrim ekuacionet $R_1 : R_2 = 1 : 2$ dhe $R_2 : R_3 = 2 : 5$, respektivisht $R_1 = \frac{1}{2} \cdot R_2$ dhe $R_3 = \frac{5}{2} \cdot R_2$. Tani,

$$\frac{1}{10} = \frac{1}{R_{\text{tot}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{2}{R_2} + \frac{1}{R_2} + \frac{2}{5R_2} = \frac{17}{5R_2},$$

prej nga marrim se $R_1 = 17\Omega$, $R_2 = 34\Omega$ dhe $R_3 = 85\Omega$.

Detyra në lidhje me sistmet e ekuacioneve lineare

1. Të zgjidhen sistmet e ekuacioneve lineare

$$(a) \begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + 2y = 8 \\ y = \frac{3}{2}x \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad (d) \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

2. Të zgjidhen dhe diskutohen bashkësitë e zgjidhjeve të tyre varësisht nga ndërrimi i vlerave të parametrin real

$$(a) \begin{cases} mx + y = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} mx - 9y = 14m \\ 2mx + 3y = 7m \end{cases} \quad (c) \begin{cases} mx + ny = m^2 + n^2 \\ mx - ny = m^2 - n^2 \end{cases}$$

3. Të zgjidhen sistemet

$$(a) \begin{cases} x + 2y - 5z = 6 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ -3x + 3y - 4z = 8 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 4y - 6z = -2 \\ -x + 2y + 6z = 4 \end{cases} \quad (c) \left. \begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{4}{y} + \frac{5}{z} = 4 \\ \frac{3}{x} + \frac{8}{y} + \frac{5}{z} = 4 \\ \frac{9}{x} + \frac{12}{y} - \frac{10}{z} = 4 \end{cases} \right\}.$$

Udhëzim. Në rastin (c) merrni zëvendësimet: $\frac{1}{x} = u$, $\frac{1}{y} = v$ dhe $\frac{1}{z} = t$.

4. Ndryshimi, shumja dhe prodhimi i dy numrave qëndrojnë në raport sikur $1 : 3 : 6$. Gjeni këta dy numra.
5. Shuma e shifrave të një numri dyshifror është 8. Nëse shifrat i ndërrojnë vendet merret numri për 36 më i madh se i pari. Cili është ai numër?
6. Shuma e viteve e një nëne dhe bijës së saj është 46. Pas 10 viteve nëna do të jetë 2 herë më e vjetër se e bija. Nga sa vite kanë nëna dhe vajza e saj?
7. Shuma e tre numrave është 80. Nëse numri i parë pjesëtohet me të dytin, merret herësi 2 dhe mbetja 3; ndërsa kur numrin e tretë e pjesëtojmë me të parin marrim herësin dhe mbetjen e njëjtë. Cilët janë këta tre numra?
8. Nga sa litra ujë të temperaturave 40°C dhe 25°C duhet përzier në mënyrë që të fitojmë 90 litra ujë me temperaturë 30°C ?

Rez. 30l ujë të temperaturës 40°C dhe 60l ujë të temperaturës 25°C .

9. Ajri i pastër përmban 78% azot dhe 21% oksigjen, ndërsa 1% e përbëjnë gazrat tjerë. Gjeni sasinë e secilit prej tyre (gazrave) në 546 litra ajër.

Rez. Azot=439,921, O=118,441 dhe gazra tjerë X=5,641.

3.4. Inekuacionet lineare

Përkufizim 3.4.1. Çdo inekuacion i formës $ax * b$, ku $*$ $\in \{<, \leq, >, \geq\}$ apo që mund të transformohet në këtë formë, ku $a, b \in \mathbf{R}$, ndërsa x është e panjohur quhet inekuacion linear me një të panjohur.

Përkufizim 3.4.2. Çdo parametër real α i tillë që kur x -in e zëvendësojmë me α , inekuacioni shndërrohet në formulë të saktë, quhet zgjidhje e inekuacionit.

Për zgjidhjen e këtyre inekuacioneve shfrytëzohen vetitë e ngjashme me ato të ekuacioneve, por duhet pasur kujdes se kur shumëzoni apo pjesëtoni me ndonjë shprehje (numër) negative ndërron shenja e jobarazimit.

Shembulli 3.40. Të zgjidhen inekuacionet

$$\begin{aligned} (a) \quad & \frac{3x-1}{5} - \frac{x+1}{2} < 1 - \frac{x}{7}, \\ (b) \quad & 9(4x+1)^2 - 4(6x-2)(6x+2) < 43, \\ (c) \quad & \frac{2x-21}{4} - \frac{3x-14}{9} \geq \frac{5}{72} - \frac{7+51x}{18}. \end{aligned}$$

Zgjidhje. (a) E shumëzojmë inekuacionin e dhënë me shmvp $(5, 2, 7) = 70$. Pasi t'i bartim të panjohurat në një rën anë dhe të njohurat në anën tjetër, marrim inekuacionin $17x < 119$, respektivisht $x < 7$. D.m.th. bashkësia e zgjidhjeve e inekuacionit është intervali $B = (-\infty, 7)$.

(b) Krejtësisht në mënyrë të ngjashme marrim se $x < \frac{1}{4}$, respektivisht $B = \left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$.

(c) (Provoni vetë!)

Edhe këtu, *sistem të inekuacioneve* lineare quajmë bashkësinë e dy apo më tepër inekuacioneve të lidhura me shenjën e konjuksionit (dhe) mes veti. Prerja e bashkësisë së zgjidhjeve të të gjitha inekuacioneve që marrin pjesë në sistem paraqet bashkësinë e zgjidhjeve të sistemit të dhënë.

Shembulli 3.41. Të zgjidhen sistemet e inekuacioneve lineare

$$\begin{aligned} (a) \quad & \left. \begin{aligned} x+3 > 1 \\ x+4 > 5 \end{aligned} \right\} \quad (b) \quad \left. \begin{aligned} 2x+5 < 1 \\ -3x < 9 \end{aligned} \right\} \quad (c) \quad \left. \begin{aligned} 2x-6 < 0 \\ x-\frac{3}{2} < 0 \\ x+1 > 0 \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Zgjidhje. (a) Vlen

$$\left. \begin{array}{l} x + 3 > 1 \\ x + 4 > 2 \end{array} \right\} \sim \left. \begin{array}{l} x > -2 \\ x > 1 \end{array} \right\} \sim x > 1.$$

D.m.th. bashkësia e zgjidhjeve e sistemit të inekuacioneve është $B = (1, \infty)$.

(b) Ngjashëm marrim se bashkësia e zgjidhjeve e sistemit të inekuacioneve për këtë rast është $B = (-3, -2)$.

(c) (Provoni!)

Shembulli 3.42. Për vlera të ndryshme të parametrin real m të zgjidhen dhe të diskutohen bashkësitë e zgjidhjeve për inekuacionet

$$(a) \quad m(x - 1) < x + 2, \quad (b) \quad m(mx - 5) < 4x - 10.$$

(a) Jobarazimi i dhënë është ekuivalent me jobarazimin $(m - 1)x < m + 2$. Dallojmë rastet:

1. Nëse $m - 1 > 0$, d.m.th. $m > 1$, inekuacioni i dhënë është ekuivalent me inekuacionin $x < \frac{m + 2}{m - 1}$. D.m.th. bashkësia e zgjidhjeve e inekuacionit është intervali $B = \left(-\infty, \frac{m + 2}{m - 1}\right)$.

2. Nëse $m - 1 < 0$, d.m.th. $m < 1$, inekuacioni i dhënë është ekuivalent me inekuacionin $x > \frac{m + 2}{m - 1}$. D.m.th. bashkësia e zgjidhjeve e inekuacionit është intervali $B = \left(\frac{m + 2}{m - 1}, \infty\right)$.

3. Nëse $m - 1 = 0$, d.m.th. $m = 1$, inekuacioni i dhënë merr formën $0 \cdot x < 3$, gjë që është një formulë e saktë për çdo $x \in \mathbf{R}$, prandaj $B = \mathbf{R}$.

(b) Ngjashëm, marrim inekuacionin $(m^2 - 4)x < 5(m - 2)$.

1. Nëse $m^2 - 4 > 0$, d.m.th. $m \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$, inekuacioni i dhënë është ekuivalent me inekuacionin $x < \frac{5}{m + 2}$. D.m.th. bashkësia e zgjidhjeve e inekuacionit është intervali $B = \left(-\infty, \frac{5}{m + 2}\right)$.

2. Nëse $m^2 - 4 < 0$, d.m.th. $m \in (-2, 2)$, inekuacioni i dhënë është ekuivalent me inekuacionin $x > \frac{5}{m + 2}$. D.m.th. bashkësia e zgjidhjeve e inekuacionit është intervali $B = \left(\frac{5}{m + 2}, \infty\right)$.

3. Nëse $m^2 - 4 = 0$, d.m.th. $m \in \{-2, 2\}$, dallojmë dy nënraste:

3a. Për $m = -2$, marrim inekuacionin $0 \cdot x < -20$, d.m.th. $B = \emptyset$.

3b. Për $m = 2$, marrim inekuacionin $0 \cdot x < 0$, d.m.th. $B = \emptyset$.

Shembulli 3.43. Të zgjidhen inekuacionet

$$\begin{aligned} (a) \quad |x - 3| &\leq 3, & (d) \quad |3 - 2x| &> 5, \\ (b) \quad |2x + 3| &< 5, & (e) \quad |5x - 3| &\geq 8, \\ (c) \quad |x| &> 5, & (f) \quad |x + 1| &\geq 2|x + 2|. \end{aligned}$$

Zgjidhje. (a) Për zgjidhjen e këtyre inekuacioneve shfrytëzojmë këto ekuivalenca

$$\begin{aligned} |x| \leq a &\iff -a \leq x \leq a, \forall a \geq 0, \\ |x| \geq a &\iff x \leq -a \vee x \geq a, \forall a \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

respektivisht

$$\begin{aligned} |x| \leq a &\iff x \in [-a, a], \quad \forall a \geq 0, \\ |x| \geq a &\iff x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty), \quad \forall a \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Prandaj inekuacioni $|x - 3| \leq 1$ është ekuivalent me sistemin e inekuacioneve $-1 \leq x - 3 \leq 1$, respektivisht $2 \leq x \leq 4$. Pra, bashkësia e zgjidhjeve e inekuacionit të dhënë është $B = [2, 4]$.

(b) Ngjashëm si rasti (a). Këtu $B = (-4, 1)$.

(c) Këtu $x \in (-\infty, -5) \cup (5, \infty)$.

(d) D.m.th. $3 - 2x > 5$ ose $3 - 2x < -5$, respektivisht $x < -1$ ose $x > 4$. Pra, $B = (-\infty, -1) \cup (4, \infty)$.

(e) Ngjashëm si rasti (d). Bashkësia e zgjidhjeve e inekuacionit të dhënë është $B = (-\infty, -1] \cup \left[\frac{11}{5}, \infty\right)$.

(f) Me ndihmën e pikave $x_1 = -2$ dhe $x_2 = -1$, bashkësia e numrave realë ndahet në katër intervale. Prandaj dallojmë këto raste:

1. Për $x \in (-\infty, -2]$, $x + 1 < 0$ dhe $x + 2 \leq 0$, prandaj $|x + 1| = -x - 1$ dhe $|x + 2| = -x - 2$. Tani inekuacioni e merr formën $-x - 1 \geq 2(-x - 2)$, bashkësia e zgjidhjeve e të cilit është intervali $[-3, \infty)$. Prandaj $B_1 = (-\infty, -2] \cap [-3, \infty) = [-3, -2]$.

2. Për $x \in [-2, -1]$, $x + 1 \leq 0$ dhe $x + 2 \geq 0$, prandaj $|x + 1| = -x - 1$ dhe $|x + 2| = x + 2$. Tani inekuacioni e merr formën $-x - 1 \geq 2(x + 2)$, bashkësia e zgjidhjeve e të cilit është intervali $\left(-\infty, -\frac{5}{3}\right]$. Prandaj $B_2 = [-2, -1] \cap \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right] = \left[-2, -\frac{5}{3}\right]$.

3. Për $x \in [-1, \infty)$, $x + 1 \geq 0$ dhe $x + 2 > 0$, prandaj $|x + 1| = x + 1$ dhe $|x + 2| = x + 2$. Tani inekuacioni e merr formën $x + 1 \geq 2(x + 2)$, bashkësia e zgjidhjeve e të cilit është intervali $(-\infty, -3]$. Prandaj $B_3 = [-1, \infty) \cap (-\infty, -3] = \emptyset$. Përfundimisht, bashkësia e zgjidhjeve e inekuacionit të dhënë është $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 = [-3, -2] \cup \left[-2, -\frac{5}{3}\right] \cup \emptyset = \left[-3, -\frac{5}{3}\right]$.

Shembulli 3.44. Të zgjidhen inekuacionet

$$\begin{aligned} (a) \quad (x-1)(x-4) > 0, & \quad (b) \quad (x+3)(x-5) \leq 0, \\ (c) \quad \frac{x-2}{5-x} > 0, & \quad (d) \quad \frac{x+3}{x-4} \leq 0. \end{aligned}$$

Zgjidhje. (a) Meqenëse prodhimi apo herësi i dy shprehjeve është pozitiv (negativ) atëherë dhe vetëm atëherë, kur ato dy shprehje kanë shenja të njëjta (të kundërta), prandaj inekuacioni i dhënë është ekuivalent me sistemet

$$\left. \begin{array}{l} x-1 > 0 \\ x-4 > 0 \end{array} \right\} \vee \left. \begin{array}{l} x-1 < 0 \\ x-4 < 0 \end{array} \right\}.$$

Bashkësia e zgjidhjeve e sistemit të parë është $B_1 = (4, \infty)$, ndërsa e të dytit është $B_2 = (-\infty, 1)$, prandaj bashkësia e zgjidhjeve e inekuacionit të dhënë është $B = B_1 \cup B_2 = (-\infty, 1) \cup (4, \infty)$.

(b) Ngjashëm, marrim sistemet

$$\left. \begin{array}{l} x+3 \leq 0 \\ x-5 \geq 0 \end{array} \right\} \vee \left. \begin{array}{l} x+3 \geq 0 \\ x-5 \leq 0 \end{array} \right\}.$$

Bashkësia e zgjidhjeve e sistemit të parë është $B_1 = \emptyset$, ndërsa e të dytit është $B_2 = [-3, 5]$, prandaj bashkësia e zgjidhjeve e inekuacionit të dhënë është $B = B_1 \cup B_2 = [-3, 5]$.

(c) Inekuacioni i dhënë është ekuivalent me sistemet e inekuacioneve $x-2 > 0 \wedge 5-x > 0$ ose $x-2 < 0 \wedge 5-x < 0$, respektivisht $x \in (2, 5) = B_1$ ose $B_2 = \emptyset$. Pra, $B = B_1 = (2, 5)$.

(d) Duke patur parasysh se emëruesi i thyesës nuk guxon të jetë zero, prandaj inekuacioni i dhënë është ekuivalent me sistemet e inekuacioneve $x+3 \leq 0 \wedge x-4 > 0$ ose $x+3 \geq 0 \wedge x-4 < 0$, respektivisht $B_1 = \emptyset$ ose $B_2 = [-3, 4)$. Pra, $B = B_1 \cup B_2 = [-3, 4)$.

Shembulli 3.45. Të zgjidhen inekuacionet

$$\begin{aligned} (a) \quad \frac{x-1}{x-2} < \frac{3}{2}, & \quad (b) \quad \frac{5-2x}{5+x} \leq \frac{1}{2}, \\ (c) \quad \frac{6-x}{3-x} < -2, & \quad (d) \quad \frac{2x-3}{4-x} \geq 3. \end{aligned}$$

Zgjidhje. (a) Këto jobarazime së pari kthehen në formën $\frac{ax+b}{cx+d} * 0$, ku $* \in \{<, \leq, >, \geq\}$ e pastaj zgjidhen si në shembullin paraprak. Vlen

$$\frac{x-1}{x-2} < \frac{3}{2} \sim \frac{x-1}{x-2} - \frac{3}{2} < 0 \sim \frac{-x+4}{2(x-2)} < 0,$$

bashkësia e zgjidhjeve e të cilit është $B = (-\infty, 2) \cup (4, \infty)$.

Në mënyrë analoge zgjidhen rastet tjera, prandaj vetëm po i japim rezultatet:

$$(b) \quad B = (-\infty, -5) \cup [1, \infty).$$

$$(c) \quad B = (3, 4).$$

$$(d) \quad B = [3, 4).$$

Shembulli 3.46. Të zgjidhen inekuacionet

$$(a) \quad \frac{x-1}{x^2+2} < 0, \quad (b) \quad \frac{(2x+1)^2}{x-5} > 0,$$

$$(c) \quad \frac{(x-1)^2}{x+2} \geq 0, \quad (d) \quad \frac{|x-1|}{x} < 0.$$

Zgjidhje. (a) Meqenëse $x^2 + 2 > 0$ për çdo numër real x , atëherë inekuacioni i dhënë është ekuivalent me inekuacionin $x - 1 < 0$. D.m.th. $B = (-\infty, 1)$.

(b) Ngjashëm, meqenëse $(2x + 1)^2 > 0$ për çdo $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$, prandaj $x - 5 > 0$. D.m.th. $B = (5, \infty)$.

(c) Meqenëse $(x - 1)^2 \geq 0$ për çdo $x \in \mathbf{R}$, atëherë $x + 2 > 0$, respektivisht $x \in (-2, \infty)$.

Vërejtje 3.2. Sikur të kishim shenjën $>$ në vend të \geq , atëherë bashkësia e zgjidhjeve e inekuacionit do të ishte $B = (-2, 1) \cup (1, \infty)$ (pse?).

(d) Meqë $|x - 1| > 0$ për çdo $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$, atëherë $x < 0$. D.m.th. $B = (-\infty, 0)$.

Shembulli 3.47. Ta zgjidhim jobarazimin $\frac{|x-1|}{x} < 1$.

Zgjidhje. Së pari $x \neq 0$ (pse?), ndërsa binomi $x - 1$ e ndërron shenjën në pikën $x = 1$, prandaj kemi rastet:

1. Për $x \in (-\infty, 1] \setminus \{0\}$, $x - 1 \leq 0$, prandaj $|x - 1| = -x + 1$, ndërsa inekuacioni merr formën $\frac{-x+1}{x} - 1 < 0$, bashkësia e zgjidhjeve e të cilit është $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$. D.m.th. $B_1 = ((-\infty, 1] \setminus \{0\}) \cap \left(\left(-\infty, 0\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)\right) = (-\infty, 0) \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

2. Për $x \in [1, \infty)$, $x - 1 \geq 0$, prandaj inekuacioni i dhënë merr formën $\frac{x-1}{x} - 1 < 0$, respektivisht $\frac{1}{x} > 0$, bashkësia e zgjidhjeve e të cilit është $(0, \infty)$.

Por $x \in [1, \infty)$, prandaj $B_2 = [1, \infty)$. Përfundimisht, bashkësia e zgjidhjeve e inekuacionit të dhënë është $B = B_1 \cup B_2 = (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.

Detyra në lidhje me inekuacionet

1. Të zgjidhen inekuacionet

$$(a) \quad \frac{5x-1}{4} - \frac{3x-13}{10} < \frac{5x+1}{3},$$

$$(b) \quad 5 - \frac{x-1}{4} \geq 2 + \frac{5(x+1)}{8},$$

$$(c) \quad 2x(2x-5) - (2x+1)^2 < -1,$$

Rez. (a) $x \in B = (-\infty, 3]$; (b) $x \in B = \left(-\infty, \frac{9}{8}\right]$; (c) $x \in B = (0, \infty)$.

2. Të zgjidhen sistemet e inekuacioneve

$$(a) \quad \left. \begin{array}{l} (x-1)^2 + (x-2)^2 \geq 2(x-3)^2 - 1 \\ \frac{x-1}{3} + \frac{1-2x}{3} \geq \frac{x-3}{6} - \frac{1}{2} \end{array} \right\} \quad (b) \quad \left. \begin{array}{l} 2(2x+1) > 3 - \frac{1+x}{5} \\ \frac{x-3}{9} > 1 + \frac{2x-7}{2} \end{array} \right\}$$

Rez. (a) $x \in B = \emptyset$; (b) $x \in B = \left(\frac{4}{19}, \frac{4}{9}\right)$.

3. Të zgjidhen inekuacionet

$$(a) \quad x^2 + 5x - 6 \leq 0, \quad (c) \quad \frac{2x+1}{x+2} \geq 1,$$

$$(b) \quad \frac{1}{x+2} > \frac{1}{3}, \quad (d) \quad \frac{x+1}{x^2-x+1} \geq 0.$$

Rez.

(a) **Udhëzim.** Vlen $x^2 + 5x - 6 \equiv (x-1)(x+6)$. $x \in B = [-6, 1]$.

(b) $x \in B = (-2, 1]$.

(c) $x \in B = (4, \infty)$.

(d) Meqenëse $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$ për çdo $x \in \mathbf{R}$, atëherë $x+1 \geq 0$, d.m.th. $x \in B = [-1, \infty)$.

Kapitulli IV

Ekuacioni kuadratik dhe funksioni kuadratik

4.1. Ekuacioni kuadratik

Përkufizim 4.1.1. Çdo ekuacion i formës

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (1)$$

apo që mund të transformohet në këtë formë, ku $a, b, c \in \mathbf{R}$ dhe $a \neq 0$, ndërsa x është e panjohura, quhet ekuacion kuadratik (i shkallës së dytë) me një të panjohur.

Ekuacionet $x^2 - 8x + 5 = 0$, $\frac{(x+1)^2}{2} - \frac{2x-3}{7} = \frac{1}{3}$, $\sqrt{3} \cdot x^2 - 3x + 6 = 0$ janë kuadratike, ndërsa ekuacionet $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$, $x^{\frac{1}{2}} - 2x = 3$, etj. nuk janë kuadratike.

Përkufizim 4.1.2. Çdo vlerë $\alpha \in \mathbf{R}$ apo $\alpha \in \mathbf{C}$ e tillë që kur x -in e zëvendësojmë me α ekuacioni shndërrohet në formulë të saktë, quhet zgjidhje e ekuacionit.

D.m.th. bashkësia B e zgjidhjeve e ekuacionit (1) është

$$B = \{\alpha | \alpha \in \mathbf{R} (\alpha \in \mathbf{C}) \quad \mathcal{V}(a\alpha^2 + b\alpha + c = 0) = \top\}. \quad (2)$$

Ekuacioni kuadratik çdo herë ka të paktën një zgjidhje reale (të dyfishtë) apo komplekse. Pra, $B \neq \emptyset$.

Bashkësia e zgjidhjeve e ekuacionit $x^2 + 3x - 4 = 0$ është $B = \{1, -4\}$, ndërsa ekuacionit $x^2 + x + 1 = 0$ është $B = \left\{ \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right\}$ ku $i^2 = -1$.

Nëse në ekuacionin (1) $c = 0$, atëherë forma e fituar $ax^2 + bx = 0$ quhet *jo e plotë*. Është e qartë se bashkësia e zgjidhjeve e këtyre ekuacioneve është $b = \{0, -\frac{b}{a}\}$.

Nëse në ekuacionin (1) $b = 0$, atëherë ekuacioni (1) merr formën $ax^2 + c = 0$. Në këtë rast bashkësia e zgjidhjeve është $B = \{-\sqrt{-\frac{c}{a}}, \sqrt{-\frac{c}{a}}\}$.

Në vazhdim do të gjejmë formulat për gjetjen e zgjidhjeve të ekuacionit (1).

Ngjashëm si te ekuacionet lineare, për dy ekuacione kuadratike themi se janë *ekuivalente* nëse bashkësitë e zgjidhjeve i kanë të barabarta. Prandaj bashkësia e zgjidhjeve e një ekuacioni nuk ndërron nëse:

1. Dy anët e tij i ndërrojnë vendet,
2. Të dy anët e tij i shumëzojmë ose i pjesëtojmë me një shprehje të ndryshme nga zero,
3. Të dy anëve të ekuacionit u shtojmë ose u zbresim shprehje të njëjta algjebrike të shumëzuara me ndonjë shprehje të njëjtë, etj.

Ekuacioni (1) është ekuivalent me ekuacionin

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} \right) + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0 \end{aligned}$$

respektivisht

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Tani

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|},$$

q.d.m.th.

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|}. \quad (2)$$

Nëse $a > 0$, atëherë ekuacioni (2) merr formën

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

ndërsa për $a < 0$, kemi

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{-2a} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Meqenësë bashkësia e zgjidhjeve nuk varet nga renditja e tyre (elementeve), përfundojmë se formula për gjetjen e zgjidhjeve të ekuacionit (1) është

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (3)$$

Nëse b është numër çift, d.m.th. i formës $b = 2k, k \in \mathbf{Z}$, atëherë preferohet formula më e thjeshtë

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}. \quad (3')$$

Nëse $D = b^2 - 4ac$, atëherë formula (3) merr formën

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad (4)$$

prej nga shihet se natyra e zgjidhjeve të ekuacionit kuadratik (1) varen prej D dhe ate:

1. Nëse $D > 0$ zgjidhjet janë reale dhe të ndryshme,
2. Nëse $D = 0$ zgjidhjet janë reale dhe të barabarta $x_1 = x_2$, dhe
3. Nëse $D < 0$ zgjidhjet janë të konjuguara komplekse, d.m.th. $\bar{x}_1 = x_2$.

Për këtë arsye madhësia D quhet *dallor* (*diskriminantë*) e ekuacionit.

Rregullat e Viet-it

Po t'i mbledhim dhe pastaj shumëzojmë zgjidhjet x_1 dhe x_2 nga ekuacioni (3), do të marrim

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 &= \frac{c}{a} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

të cilat formula njihen si *formulat e Viet-it* (François Viète (1540–1603), matematikan francez). Këto luajnë rol të rëndësishëm në matematikë. Me ndihmën e tyre mund ta shkruajmë ekuacionin kuadratik kur i dijmë zgjidhjet e tij.

Nëse ekuacionin (1) e pjesëtojmë me a ($a \neq 0$) dhe zëvendësojmë $\frac{b}{a} = p$ dhe $\frac{c}{a} = q$, atëherë ekuacioni (1) merr formën $x^2 + px + q = 0$, e cila quhet *forma normale* e ekuacionit të shkallës së dytë, ndërsa rregullat e Viet-it do të jenë

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 &= -p \\ x_1 \cdot x_2 &= q \end{aligned} \right\}. \quad (5')$$

Duke i shfrytëzuar rregullat e Viet-it, marrim identitetin

$$ax^2 + bx + c \equiv a(x - x_1)(x - x_2), \quad (6)$$

ku x_1, x_2 janë zgjidhjet e ekuacionit $ax^2 + bx + c = 0$.

Shembulli 4.1. T'i zgjidhim ekuacionet që vijojnë

$$(a) \quad 4x^2 - 9 = 0, \quad (b) \quad 3x^2 - 6x = 0, \quad (c) \quad x^2 + 3x - 4 = 0, \quad (d) \quad x^2 - 4x + 4 = 0.$$

Zgjidhje. (a) Ekuacioni i dhënë është ekuivalent me ekuacioni $x^2 = \frac{9}{4}$, prej nga marrim se $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} = \pm\frac{3}{2}$, respektivisht bashkësia e zgjidhjeve është $B = \left\{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}$.

(b) Ekuacioni i dhënë është ekuivalent me ekuacionin $x(x-2) = 0$ (më parë kemi pjesëtuar me 3 e pastaj kemi faktorizuar x -in). Zgjidhjet e ekuacionit të fundit janë $x_1 = 0, x_2 = 2$, respektivisht bashkësia e zgjidhjeve është $B = \{0, 2\}$.

(c) Në këtë rast zbatojmë formulën (3). Duhet patur kujdes gjatë leximit të koeficientëve a, b dhe c , veçanërisht kur kemi të bëjmë me ekuacione ku na paraqiten edhe parametra. Po ashtu preferohet që së pari të njehsohet dallori $D = b^2 - 4ac$ në mënyrë që menjëherë të kemi pasqyrën e saktë për natyrën e zgjidhjeve. Në këtë rast kemi $a = 1, b = 3, c = -4$, ndërsa $D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25 > 0$. D.m.th. zgjidhjet janë reale dhe të ndryshme. Pra

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2},$$

respektivisht $x_1 = -4, x_2 = 1$.

(d) Në këtë rast $a = 1, b = -4, c = 4$, ndërsa $D = 0$. D.m.th. $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = 2$. Pra $B = \{2\}$.

Po ta vërejmë me kujdes trinomin $x^2 - 4x + 4$, atëherë përfundojmë se ai është katror i binomit $x - 2$. Prandaj ekuacioni është ekuivalent me ekuacionin $(x - 2)^2 = 0$, respektivisht $x - 2 = 0$. Meqë ekuacioni është i shkallës së dytë, përfundojmë se $x_1 = x_2 = 2$.

Shembulli 4.2. Të zgjidhen ekuacionet

$$(a) (x - 2)^2 + (2x + 3)^2 = 13 - 4x,$$

$$(b) (2x - 15)(2x - 7) - (x - 36)(x - 8) + 36 = 0,$$

$$(c) a^2x^2 + bx = b^2x^2 + ax,$$

$$(d) (y - m)^2 + (y + n)^2 = m^2 + n^2.$$

Zgjidhje. (a) Ekuacioni i dhënë është ekuivalent me ekuacionin $5x^2 + 12x = 0$. Prandaj $x_1 = 0$, ndërsa $x_2 = -\frac{12}{5}$.

(b) Ekuacioni i dhënë është ekuivalent me ekuacionin $x^2 = 49$, prandaj $x_1 = -7$, ndërsa $x_2 = 7$.

(c) Kujdes! Në të shumtën e rasteve studentët së pari pjesëtojnë me x të ekuacionet e formës (c), që është një gabim trashanik, sepse në atë rast humbet një zgjidhje $x_1 = 0$. Prandaj pjesëtimi lejohet vetëm me shprehje për të cilat jemi të sigurtë se janë të ndryshme nga zero, p.sh. konstantet, apo shprehjet $x^2 + 1 > 0$, $-(x^2 + 4) < 0$, ku $x \in \mathbf{R}$, etj.

Ekuacioni i dhënë në rastin (c) është ekuivalent me ekuacionin $x(x(a^2 - b^2) + (b - a)) = 0$, prandaj $x = 0$, ose $x(a^2 - b^2) + (b - a) = 0$. Tani dallojmë dy raste:

1. Nëse $a^2 \neq b^2$, d.m.th. $a \neq b$ dhe $a \neq -b$ atëherë $x = \frac{a - b}{(a - b)(a + b)} = \frac{1}{a + b}$. D.m.th. $B = \left\{0, \frac{1}{a + b}\right\}$.

2. Nëse $a = b$, pas zëvendësimit në ekuacionin fillestar marrim ekuacionin $a^2x^2 + ax = a^2x^2 + ax$, për të cilin bashkësia e zgjidhjeve është e tërë bashkësia e numrave realë \mathbf{R} ose kompleksë \mathbf{C} . Pra $B = \mathbf{R}$ ($B = \mathbf{C}$).

3. Nëse $a = -b \neq 0$, pas zëvendësimit në ekuacionin fillestar marrim ekuacionin $a^2x^2 + ax = a^2x^2 - ax$, i cili është ekuivalent me ekuacionin $2ax = 0$ për të cilin bashkësia e zgjidhjeve është $B = \{0\}$, ndërsa për $a = b = 0$ bashkësia e zgjidhjeve është e tërë bashkësia e numrave realë \mathbf{R} . Pra $B = \mathbf{R}$.

(d) Ekuacioni i dhënë është ekuivalent me ekuacionin $y^2 - (m+n)y = 0$, prej nga për bashkësi të zgjidhjeve kemi $B = \{0, m-n\}$.

Shembulli 4.3. Të caktohet bashkësia e zgjidhjeve e ekuacioneve

$$\begin{aligned} (a) \quad & x^2 - (3 + 2\sqrt{5})x + 7 + 3\sqrt{5} = 0, \\ (b) \quad & x^2 - (3 - 2\sqrt{2})x + 4 - 3\sqrt{2} = 0, \\ (c) \quad & (1 + \sqrt{2})x^2 - 2(1 - \sqrt{2})x - 3\sqrt{2} + 1 = 0. \end{aligned}$$

Zgjidhje. (a) Këtu $D = b^2 - 4ac = 1$, prandaj $B = \{2 + \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}\}$.

(b) Ngjashëm $D = b^2 - 4ac = 1$, prandaj $B = \{2 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}\}$.

(c) Këtu $a = 1 + \sqrt{2}, b = -2(1 - \sqrt{2}), c = -3\sqrt{2} + 1, D = b^2 - 4ac = 32 > 0$, prandaj $B = \left\{1, \frac{1 - 3\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}\right\} = \{1, 4\sqrt{2} - 7\}$.

Shembulli 4.4. Në vazhdim do t'i zgjidhim disa ekuacione ku e panjohura paraqitet nën vlerën absolute.

$$\begin{aligned} (a) \quad & |x-1| \cdot |x+2| = 4, & (b) \quad & 2x|x-3| + |x+5| = 0, \\ (c) \quad & |x^2 - 8x + 12| = x^2 - 8x + 12, & (d) \quad & x^2 + |x+3| + |x-3| = 4, 5|x| + 6, \end{aligned}$$

Zgjidhje. (a) Meqë për $x = 1(-2)$ vlerat absolute anulohen, prandaj zgjidhjet i kërkojmë në këto intervale $(-\infty, -2], (-2, 1], (1, \infty)$.

1. Për $x \in (-\infty, -2], x-1 < 0, x+2 \leq 0$, prandaj $|x-1| = -(x-1), |x+2| = -(x+2)$. Tani zëvendësojmë në ekuacion dhe marrim:

$$-(x-1)(-(x+2)) = 4 \iff x^2 + x - 6 = 0 \iff x_1 = -3, x_2 = 2.$$

Meqë vetëm $x_1 = -3 \in (-\infty, -2]$, prandaj vetëm kjo është zgjidhje. Pra $B_1 = \{-3\}$.

2. Për $x \in (-2, 1], x-1 \leq 0, x+2 > 0$, prandaj $|x-1| = -(x-1), |x+2| = x+2$. Tani zëvendësojmë në ekuacion dhe marrim:

$$-(x-1)(x+2) = 4 \iff -x^2 - x - 2 = 0 \iff x^2 + x + 2 = 0.$$

Meqë $D = -7 < 0$ përfundojmë se ekuacioni nuk ka zgjidhje në intervalin $(-2, 1]$. Pra $B_2 = \emptyset$.

3. Për $x \in (1, \infty)$, $x-1 > 0, x+2 > 0$, prandaj $|x-1| = x-1, |x+2| = x+2$. Tani pas zëvendësimit në ekuacion marrim

$$(x-1)(x+2) = 4 \iff x^2 + x - 6 = 0 \iff x_1 = -3, x_2 = 2.$$

Meqë vetëm $x_2 = 2 \in (1, \infty)$, prandaj vetëm kjo është zgjidhje e ekuacionit. Pra $B_3 = \{2\}$. Kështu, bashkësia e zgjidhjeve e ekuacionit fillestar është

$$B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \{-3, 2\}.$$

(b) Ngjashëm si në rastin (a) dallojmë rastet:

1. Për $x \in (-\infty, -5)$, $x-3 < 0, x+5 < 0$, prandaj $|x-3| = -(x-3), |x+5| = -(x+5)$. Zëvendësojmë në ekuacion dhe marrim $-2x(x-3)-(x+5) = 0$, respektivisht $-2x^2 + 5x - 5 = 0$. Meqë $D = -15 < 0$, përfundojmë se ekuacioni nuk zgjidhje në intervalin $(-\infty, -5)$. Pra $B_1 = \emptyset$.

2. Për $x \in [-5, 3)$, $x-3 < 0, x+5 \geq 0$, prandaj $|x-3| = -(x-3), |x+5| = x+5$. Pas zëvendësimit në ekuacion marrim $-2x(x-3) + (x+5) = 0$, respektivisht $-2x^2 + 7x + 5 = 0$. zgjidhjet e të cilit janë $x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{89}}{-4}$. Meqë vetëm $x_1 = \frac{-7 + \sqrt{89}}{-4} = \frac{7 - \sqrt{89}}{4} \in [-5, 3)$, prandaj vetëm kjo është zgjidhje, d.m.th. $B_2 = \left\{ \frac{7 - \sqrt{89}}{4} \right\}$.

3. Për $x \in [3, \infty)$, $x-3 \geq 0, x+5 > 0$, prandaj $|x-3| = x-3, |x+5| = x+5$. Zëvendësojmë në ekuacion dhe marrim $2x(x-3) + (x+5) = 0$, respektivisht $2x^2 - 5x + 5 = 0$. Meqë $D = -15 < 0$, përfundojmë se ekuacioni nuk zgjidhje në intervalin $[3, \infty)$. Pra $B_3 = \emptyset$. Përfundimisht

$$B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \left\{ \frac{7 - \sqrt{89}}{4} \right\}.$$

(c) Në bazë të përkufizimit të vlerës absolute, ekuacioni nën rastin (c) është i saktë për të gjitha vlerat $x \in \mathbf{R}$ për të cilat $x^2 - 8x + 12 \geq 0$. Jobarazimi i fundit është ekuivalent me jobarazimin $(x-2)(x-6) \geq 0$, bashkësia e zgjidhjeve e të cilit është $B = (-\infty, 2] \cup [6, \infty)$, që njëkohësisht paraqet edhe bashkësinë e zgjidhjeve të ekuacionit.

(d) Ngjashëm si në rastet (a) dhe (b), dallojmë rastet

1. Për $x \in (-\infty, -3]$, $x+3 \leq 0, x-3 < 0, x < 0$, prandaj $|x+3| = -(x+3), |x-3| = -(x-3), |x| = -x$. Ekuacioni i dhënë merr formën $x^2 - (x+3) - (x-3) = -4, 5x+6$, i cili është ekuivalent me ekuacionin $x^2 + 2.5x - 6 = 0$, zgjidhjet e të cilit janë $x_1 = -4, x_2 = 1.5$. Meqë $x_1 \in (-\infty, -3]$, ndërsa

$x_2 \notin (-\infty, -3]$, përfundojmë se vetëm $x_1 = -4$ është zgjidhje e ekuacionit. D.m.th. $B_1 = \{-4\}$.

2. Për $x \in (-3, 0]$, $x+3 > 0, x-3 < 0, x < 0$, prandaj $|x+3| = x+3, |x-3| = -(x-3), |x| = -x$. Ekuacioni i dhënë merr formën $x^2 + (x+3) - (x-3) = -4, 5x+6$, i cili është ekuivalent me ekuacionin $x^2 + 4, 5x = 0$, zgjidhjet e të cilit janë $x_1 = 0, x_2 = -4, 5$. Meqë $x_1 \in (-3, 0]$, ndërsa $x_2 \notin (-3, 0]$, përfundojmë se vetëm $x_1 = 0$ është zgjidhje e ekuacionit. D.m.th. $B_2 = \{0\}$.

3. Për $x \in (0, 3]$, $x+3 > 0, x-3 \leq 0, x > 0$, prandaj $|x+3| = x+3, |x-3| = -(x-3), |x| = x$. Ekuacioni i dhënë merr formën $x^2 + (x+3) - (x-3) = 4, 5x+6$, i cili është ekuivalent me ekuacionin $x^2 - 4, 5x = 0$, zgjidhjet e të cilit janë $x_1 = 0, x_2 = 4, 5$. Meqë $x_1, x_2 \notin (0, 3]$, përfundojmë se $B_3 = \emptyset$.

4. Për $x \in (3, \infty)$, $x+3 > 0, x-3 > 0, x > 0$, prandaj $|x+3| = x+3, |x-3| = x-3, |x| = x$. Ekuacioni i dhënë merr formën $x^2 + (x+3) + (x-3) = 4, 5x+6$, i cili është ekuivalent me ekuacionin $x^2 - 2.5x - 6 = 0$, zgjidhjet e të cilit janë $x_1 = 4, x_2 = -1.5$. Meqë $x_1 \in (3, \infty)$, ndërsa $x_2 \notin (3, \infty)$, përfundojmë se vetëm $x_1 = 4$ është zgjidhje e ekuacionit. D.m.th. $B_4 = \{4\}$.

Përfundimisht, bashkësia e zgjidhjeve e ekuacionit $x^2 + |x+3| + |x-3| = 4, 5|x|+6$ është

$$B = \bigcup_{i=1}^4 B_i = \{-4, 0, 4\}$$

Vërejtje 4.1. Vërejmë që në rastin 2 kemi konstatuar se 0 është zgjidhje e ekuacionit, ndërsa në rastin 3 kemi shënuar se nuk është zgjidhje. Që t'i ikim kësaj situatë të pakëndshme, preferohet që intervalet e shqyrtimit të merren të mbyllura apo gjysmë të mbyllura. D.m.th. në rastin 2 $x \in (-3, 0]$, ndërsa edhe në rastin 3 $x \in [0, 3]$. Pra 0 dy herë shqyrtohet nëse është zgjidhje e ekuacionit.

Vërejtje 4.2. Nëse e studiojmë me kujdes ekuacionin, vërejmë se ai është simetrik, ndaj numrit 0, d.m.th. nëse $f(x) \equiv x^2 + |x+3| + |x-3| - 4, 5|x| - 6$ atëherë $f(-x) = f(x)$. Prandaj mjafton t'i gjejmë zgjidhjet vetëm në intervalin $[0, \infty)$ e pastaj t'i marrim edhe ato simetrike ndaj numrit 0. (Shih zgjidhjet -4 dhe 4).

Shembulli 4.5. Caktoni parametrin real m në mënyrë që ekuacionet

$$\begin{aligned} (a) \quad & 4x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3m - 1 = 0, & (b) \quad & x^2 - 2(m-2)x - (2m-4) = 0, \\ (c) \quad & x^2 + 2(3-m)x + 2m - 3 = 0, & (d) \quad & 3mx^2 + 2(3m+4)x + 3m - 5 = 0, \end{aligned}$$

të kenë zgjidhje reale të dyfishtë.

Zgjidhje. (a) Ekuacioni kuadrtik ka vetëm një zgjidhje (dhe atë reale) atëherë dhe vetëm atëherë, nëse $D = b^2 - 4ac = 0$. D.m.th. $(-2(m+1))^2 - 4 \cdot 4(m^2 - 3m - 1) = 0$, respektivisht $-3m^2 + 14m + 5 = 0$, zgjidhjet e të cilit janë $m_1 = 5$ dhe $m_2 = -\frac{1}{3}$. D.m.th. për $m \in \{5, -\frac{1}{3}\}$ ekuacioni i dhënë ka vetëm një zgjidhje $(x_1 = x_2 = \frac{m+1}{4})$ dhe atë:

1. Për $m = 5$ $x_1 = x_2 = \frac{3}{2}$ dhe

2. Për $m = -\frac{1}{3}$ $x_1 = x_2 = \frac{1}{6}$.

Në mënyrë analoge zgjidhen rastet (b), (c) dhe (d).

Shembulli 4.6. Për vlera të ndryshme të parametrin real k të shqyrtohen dhe të zgjidhen ekuacionet:

$$(a) (k-2)x^2 - (k+1)x + k + 1 = 0, \quad (b) (k-2)x^2 - (k+1)x + 4 = 0,$$

$$(c) (4k-3)x^2 + 2(3k-2)x + 7 - 6k = 0, \quad (d) k^2x^2 - k(5k+1)x - (4k+2) = 0.$$

Zgjidhje. (a) Meqë natyra e zgjidhjeve të një ekuacioni kuadratik varet nga dallori (diskriminanta) $D = b^2 - 4ac$, prandaj së pari njehsojmë D . Vlera e D është

$$D = (k+1)^2 - 4(k-2)(k+1) = k^2 + 2k + 1 - 4(k^2 - k - 2) = -3k^2 + 6k + 9$$

$$= -3(k^2 - 2k - 3) = -3(k-3)(k+1).$$

Dallojmë rastet:

1. Nëse $D = 0$, d.m.th. $k \in \{3, -1\}$ ekuacioni (a) ka vetëm një zgjidhje (të dyfishtë), $x_1 = x_2 = \frac{k+1}{2(k-2)}$ dhe atë:

(1a) Për $k = 3$, $x_1 = x_2 = \frac{3+1}{2(3-2)} = 2$ dhe

(1b) Për $k = -1$, $x_1 = x_2 = \frac{-1+1}{2(-1-2)} = 0$.

2. Nëse $D > 0$, d.m.th. $k \in (-1, 3)$ ekuacioni i dhënë ka dy zgjidhje reale të ndryshme

$$x_{1,2} = \frac{k+1 \pm \sqrt{-3(k-3)(k+1)}}{2(k-2)}.$$

3. Nëse $D < 0$, d.m.th. $k \in (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$ ekuacioni i dhënë nuk ka zgjidhje reale, por ka dy zgjidhje të konjuguara komplekse

$$x_{1,2} = \frac{k+1 \pm i\sqrt{3(k-3)(k+1)}}{2(k-2)}.$$

Në mënyrë të ngjashme shqyrtohen rastet tjera.

Në vazhdim t'i shohim ca zbatime të rregullave të Viet-it.

Shembulli 4.7. Formoni ekuacionin kuadratik zgjidhjet e të cilit janë

$$\begin{aligned} (a) \quad x_1 = -7, x_2 = -3, & & (b) \quad x_1 = \frac{8}{3}, x_2 = \frac{3}{2}, \\ (c) \quad x_1 = 5 + \sqrt{2}, x_2 = 5 - \sqrt{2}, & & (d) \quad x_1 = \frac{5 + 3\sqrt{2}}{6}, x_2 = \frac{5 - 3\sqrt{2}}{6}, \\ (e) \quad x_1 = 2 + 3i, x_2 = 2 - 3i, & & (f) \quad x_1 = 3 + \sqrt{3} \cdot i, x_2 = 3 - \sqrt{3} \cdot i. \end{aligned}$$

Zgjidhje. (a) E konsiderojmë ekuacionin e kërkuar në formën $ax^2 + bx + c = 0$, i cili është ekuivalent me ekuacionin $x^2 + px + q = 0$ (forma normale e ekuacionit kuadratik), ku $p = \frac{b}{a}, q = \frac{c}{a}$ dhe pastaj caktojmë koeficientët p dhe q . Në bazë të rregullave të Viet-it kemi:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 = -p &\iff p = -(-7 + (-3)) = 10, \\ x_1 \cdot x_2 = q &\iff q = (-7)(-3) = 21. \end{aligned}$$

D.m.th. ekuacioni i kërkuar është $x^2 + 10x + 21 = 0$.

Ngjashëm zgjidhen rastet tjera.

Shembulli 4.8. Nëse x_1, x_2 janë zgjidhjet e ekuacionit $3x^2 - x - 7 = 0$, atëherë pa i gjetur zgjidhjet x_1 dhe x_2 njehsoni

$$(a) \quad x_1^3 + x_2^3, \quad (b) \quad x_1^3 \cdot x_2^3, \quad (c) \quad 4x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^3 + 4x_2^3.$$

Zgjidhje. (a) Në bazë të rregullave të Viet-it kemi

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{1}{3}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{7}{3}.$$

Tani

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 &= (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = \frac{1}{3}((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9} - 3\frac{-7}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9} + 7\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{64}{9} = \left(\frac{4}{3}\right)^3. \end{aligned}$$

$$(b) \quad \text{Vlen } x_1^3 \cdot x_2^3 = (x_1 \cdot x_2)^3 = \left(\frac{-7}{3}\right)^3 = -\left(\frac{7}{3}\right)^3.$$

(c) Vlen

$$4x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^3 + 4x_2^3 = 4(x_1^3 + x_2^3) + 3x_1x_2(x_2 + x_1) = 4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 + 3 \cdot \frac{-7}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{193}{27}.$$

Shembulli 4.9. Nëse x_1, x_2 janë zgjidhjet e ekuacionit $5x^2 - 3x - 1 = 0$, atëherë pa i gjetur zgjidhjet x_1 dhe x_2 njehsoni

$$\begin{aligned} (a) \quad &2x_1^3 - 3x_1^2x_2 + 2x_2^3 - 3x_1x_2^2, \\ (b) \quad &\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1}{x_2 + 1} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_2}{x_1 + 1} + \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right)^2, \end{aligned}$$

Zgjidhje. (a) Si në shembullin e mëparshëm kemi $x_1 + x_2 = \frac{3}{5}$ dhe $x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{5}$. Tani

$$\begin{aligned} 2x_1^3 - 3x_1^2x_2 + 2x_2^3 - 3x_1x_2^2 &= 2(x_1^3 + x_2^3) - 3x_1x_2(x_1 + x_2) \\ &= 2(x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2) + 3 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} \\ &= 2 \cdot \frac{3}{5} \left(\left(\frac{3}{5} \right)^2 + \frac{3}{5} \right) + \frac{9}{25} = \frac{189}{125}. \end{aligned}$$

(b) Vlen

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1}{x_2+1} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_2}{x_1+1} + \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right)^2 &= \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} + \frac{x_1^2 + x_1 + x_2^2 + x_2}{(x_1+1)(x_2+1)} + \\ + \frac{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2}{x_1^2x_2^2} &= \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} \left(1 + \frac{1}{x_1x_2} \right) + \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2}{x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1} = \dots \\ &= -\frac{1114}{35} \end{aligned}$$

Shembulli 4.10. Pa e zgjidhur ekuacionin kuadratik, caktoni parametrin real m në mënyrë që zgjidhjet e tij të plotësojnë relacionin e dhënë.

$$\begin{aligned} (a) \quad 2x^2 + 5x + 2m^2 - 4m + 2 &= 0, & x_1 - 2x_2 &= 1, \\ (b) \quad (m+2)x^2 - 3mx + 2m &= 0, & 2x_1 - x_2 &= 3, \\ (c) \quad 3(m-1)x^2 - 4(m-1)x + 2m - 1 &= 0, & x_2 &= 3x_1, \\ (d) \quad (m-2)x^2 - 2(m-1)x + m &= 0, & \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} &= \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Zgjidhje. (a) Nga rregullat e Viet-it marrim $x_1 + x_2 = -\frac{5}{2}$, ndërsa $x_1x_2 = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2$. Nga sistemi i ekuacioneve

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{5}{2} \\ x_1 - 2x_2 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

marrim se $x_1 = -\frac{4}{3}$ dhe $x_2 = -\frac{7}{6}$. Këto vlera i zëvendësojmë në ekuacionin

$$x_1x_2 = (m-1)^2 \text{ marrim se } m_{1,2} = 1 \pm \frac{\sqrt{14}}{3}$$

(b) Ngjashëm,

$$\left. \begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \frac{2m}{m+3} \\ x_1 + x_2 &= \frac{3m}{m+3} \\ 2x_1 - x_2 &= 3 \end{aligned} \right\}$$

marrim se $m = -1$, ndërsa $x_1 = 0.5$ dhe $x_2 = -2$.

Në mënyrë analoge shqyrtohen dy rastet e mbetura.

Shembulli 4.11. Për cilat vlera të parametrin real m ekuacionet

$$(a) \quad 2x^2 - (3m + 2)x + 1 = 0 \quad \text{dhe} \quad 4x^2 - (9m - 2)x + 2 = 0,$$

$$(b) \quad x^2 + mx - 2m = 0 \quad \text{dhe} \quad x^2 - 2mx + m = 0,$$

kanë zgjidhje të përbashkëta ?

Zgjidhje. (a) Në bazë të rregullave të Viet-it dhe kushteve të detyrës kemi

$$\frac{3m + 2}{2} = \frac{9m - 2}{4} \iff m = 2 \quad \text{dhe} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2}.$$

(b) Ngjashëm,

$$-m = 2m \quad \text{dhe} \quad -2m = m \iff m = 0.$$

Në vazhdim do të shohim rëndësinë e identitetit

$$ax^2 + bx + c \equiv a(x - x_1)(x - x_2)$$

në faktorizimin e polinomeve të shkallës së dytë.

Shembulli 4.12. Të thjeshtohen thyesat

$$(a) \quad \frac{4x^2 - 19x + 12}{12x^2 - x - 6}, \quad (b) \quad \frac{a^2 + 6a + 8}{a^3 + 5a^2 + 4a},$$

$$(c) \quad \frac{x^2 - 4ax + 3a^2}{x^2 - (a + b)x + ab}, \quad (d) \quad \frac{x^4 - 7x^3 + 12x^2}{3x^3 - 48x}.$$

Zgjidhje. (a) Së pari njehsojmë x_1, x_2 për trinomin $4x^2 - 19x + 12$. Pra

$$x_{1,2} = \frac{19 \pm 13}{8} \implies x_1 = \frac{3}{4}, x_2 = 4,$$

d.m.th.

$$4x^2 - 19x + 12 \equiv 4 \left(x - \frac{3}{4} \right) (x - 4) \equiv (4x - 3)(x - 4).$$

Ngjashëm,

$$12x^2 - x - 6 \equiv 12 \left(x + \frac{2}{3} \right) \left(x - \frac{3}{4} \right) \equiv (3x + 2)(4x - 3).$$

Tani,

$$\frac{4x^2 - 19x + 12}{12x^2 - x - 6} = \frac{(4x - 3)(x - 4)}{(3x + 2)(4x - 3)} = \frac{x - 4}{3x + 2}, \quad x \neq -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}.$$

Ngjashëm zgjidhen rastet tjera.

Shembulli 4.13. Nëse nga katrori i një numri x zbresim prodhimin a atij numri me numrin 7 marrim ndryshimin i cili është tri herë më i madh se vetë numri x . Caktoni numrin e tillë.

Zgjidhje. Nga kushti i detyrës kemi ekuacionin $x^2 - 7x = 3x$, prej nga marrim se $x \in \{0, 10\}$.

Shembulli 4.14. Caktoni ata tre numra të plotë, çift dhe fqinj ashtu që shuma e katrorëve të tyre të jetë 200.

Zgjidhje. Nëse $2x$ është numri i parë dhe çift, atëherë dy numrat tjerë pasues janë $2(x+1)$ dhe $2(x+2)$. Prandaj

$$4x^2 + 4(x+1)^2 + 4(x+2)^2 = 200 \iff x^2 + 2x - 15 = 0.$$

Pasi ta zgjidhim këtë ekuacion, marrim që numrat e kërkuar janë $\{-10, -8, -6\}$ respektivisht $\{6, 8, 10\}$.

Shembulli 4.15. Nëse dy punëtorë punojnë së bashku, atëherë ata e kryejnë një punë A për 12 ditë. Nëse punojnë ndaras, atëherë njërit i duhen 10 ditë më tepër se tjetrit për ta përfunduar të njëjtën punë A . Nga sa ditë u nevojiten secilit punëtor për ta kryer punën A ?

Zgjidhje. Nëse me x shënojmë numrin e ditëve që i duhen punëtorit më të "shkathët" për ta kryer punën A , atëherë tjetrit do t'i duhen $x+10$ ditë. Tani vlen ekuacioni

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+10} = \frac{1}{12},$$

i cili është ekuivalent me ekuacionin $x^2 - 14x - 120 = 0$, zgjidhjet e të cilit janë $x_1 = 20$ dhe $x_2 = -6$. Meqë fjala është për numër të ditëve, atëherë $x_2 = -6$ nuk mund të jetë zgjidhje e problemit. Prandaj $x = x_1 = 20$. D.m.th. punëtorit të "shkathët" i nevojiten 20 ditë, ndërsa tjetrit 30.

Shembulli 4.16. Lartësia e një trekëndëshi barakrahësh është sa $\frac{2}{3}$ e bazës. Nëse syprina e tij është 48 cm^2 , atëherë caktoni gjatësinë e brinjëve dhe lartësisë së tij.

Zgjidhje. Meqë syprina e trekëndëshit është

$$S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}, \quad (*)$$

dhe faktit se $h_a = \frac{2}{3}a$, marrim ekuacionin

$$2S = ah_a = a \cdot \frac{2}{3}a = \frac{2}{3}a^2,$$

respektivisht $a^2 = 144$, që d.m.th. $a = 12 \text{ cm}$, kurse $h_a = 8 \text{ cm}$.

Në bazë të teoremës së Pitagorës kemi

$$b^2 = h_a^2 + \frac{a^2}{4} = 100 \implies b = 10 \text{ cm}.$$

Nëse na duhet të njehsojmë edhe lartësinë h_b , atëherë nga ekuacioni (*) marrim se $ah_a = bh_b$, respektivisht $h_b = \frac{ah_a}{b} = \frac{48}{5}$ cm.

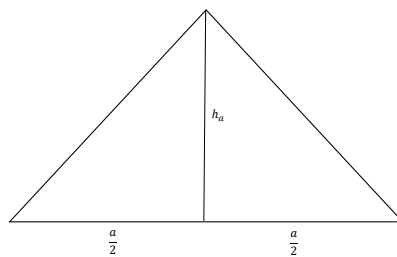


Fig. 4.1

Shembulli 4.17. Në cilin shumëkëndësh numri i diagonaleve është i barabrtë me numrin e brinjëve?

Zgjidhje. Numri $d(n)$ i diagonaleve të n -këndëshit konveks është $d(n) = \frac{n(n-3)}{2}$. Nga kushti i detyrës kemi që $d(n) = \frac{n(n-3)}{2} = n$, prej nga marrim se $n = 5$.

4.2. Ekuacioni bikuadratik

Përkufizim 4.2.1. Ekuacioni i formës

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \quad a \neq 0 \quad (8)$$

quhet ekuacion bikuadratik.

Zgjidhja e këtyre ekuacioneve realizohet me ndihmën e zëvendësimit $x^2 = t$, pas të cilit ekuacioni (8) bëhet i formës kuadratike $at^2 + bt + c = 0$. Pasi ta zgjidhim sipas t , vlerat t_1 dhe t_2 i zëvendësojmë në ekuacionin $x^2 = t$, prej nga marrim se $x_{1,2} = \pm\sqrt{t_1}$ dhe $x_{3,4} = \pm\sqrt{t_2}$.

Shembulli 4.18. Të zgjidhen ekuacionet bikuadratike

$$\begin{aligned} (a) \quad x^4 - 4x^2 + 3 &= 0, & (b) \quad x^4 - 5x^2 - 36 &= 0, \\ (c) \quad x^4 - 9x^2 + 20 &= 0, & (c) \quad x^4 + 40x^2 + 144 &= 0. \end{aligned}$$

Zgjidhje. (a) Pas zëvendësimit $x^2 = t$, ekuacioni transformohet në ekuacionin $t^2 - 4t + 3 = 0$, zgjidhjet e të cilit janë $t_1 = 1, t_2 = 3$, ndërsa $x_{1,2} = \pm 1$ dhe $x_{3,4} = \pm\sqrt{3}$.

Në mënyrë analoge zgjidhen ekuacionet tjera.

Detyra në lidhje e ekuacionet kuadratike dhe ato bikuadratike

1. Caktoni bashkësinë e zgjidhjeve të ekuacioneve

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \frac{3x^2 - 1}{2} + \frac{2x + 1}{3} = \frac{x^2 - 2}{4} + \frac{1}{3}, \\
 (b) \quad & \frac{(2x + 3)^2}{3} - \frac{3x - 2}{5} = \frac{11}{5}, \\
 (c) \quad & \frac{x - 1}{3} + \frac{x^2}{2} = \frac{3(x - 1)}{8} - \frac{x + 11}{24}, \\
 (d) \quad & \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{x + 2} + \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x - 2} = 0, \\
 (e) \quad & \frac{2x - 1}{x^2 + 2x - 3} - \frac{3x + 1}{(x - 1)(x - 5)} = \frac{x - 20}{x^2 - 2x - 15}, \\
 (f) \quad & \frac{x(x + 5)}{x^2 - 8x + 12} + \frac{x + 1}{x + 7} = \frac{2x - 2}{x + 7} + \frac{12(x - 1)}{x^2 - 8x + 12}.
 \end{aligned}$$

2. Të zgjidhen sipas x -it (a, b -parametra) ekuacionet

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & x^2 + 2bx - a^2 + 8ab - 15b^2 = 0, & (b) \quad & x^2 - 3ax + 2a^2 + a - 1 = 0, \\
 (c) \quad & x^2 + a^n x = a^{3n} + a^{4n}, & (c) \quad & (a^2 - b^2)x^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0.
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \frac{2x - 5}{x - 11} + \frac{7 - 3x}{(x - 6)^2 + 1} = \frac{x - 4}{x - 11} + \frac{(x - 3)^2}{(x - 6)^2 + 1}, \\
 (b) \quad & \frac{x(x + 5)}{x^2 - 8x + 29} - \frac{x}{x + 5} = \frac{4}{x + 5} - \frac{3x + 16}{x^2 - 8x + 29}, \\
 (c) \quad & \frac{1}{x^2 - 3x - 10} - \frac{1}{x^2 + 7x + 10} = \frac{1}{x^2 - 4} + \frac{1}{x^2 - 7x + 10}, \\
 (d) \quad & \frac{x + 1}{x^2 - 3x} + \frac{x}{2x^2 - 18} - \frac{2x - 3}{x^2 + 3x} = \frac{18}{10x - 30}.
 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & |x - 1| + x^2 - 3x + 2 = 0, & (b) \quad & x^2 - 3|x| + 2 = 0, \\
 (c) \quad & x^2 - 8|x| + 15 = 0, & (d) \quad & x^2 + 2x - 3|x = 1| + 3 = 0.
 \end{aligned}$$

5. Caktoni bashkësinë e zgjidhjeve të ekuacioneve, ku m, n janë parametra realë.

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \frac{m^2}{m - x} + \frac{x^2}{x - m} = 1 + nx, & (b) \quad & \frac{1}{x - m} + \frac{1}{x - n} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}, \\
 (c) \quad & \frac{x - n}{x - m} + \frac{x - m}{x - n} = \frac{10}{3}, & (d) \quad & \frac{x + m}{x - n} - \frac{x - n}{x + m} = \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

6. Tregoni se njëra zgjidhje e ekuacionit

$$2x^2 - (a + b)x + \sqrt{ab}(a + b - 2x) = 0, \quad a, b \in \mathbf{R}$$

është mesi aritmetik i numrave a dhe b , ndërsa tjetra është mesi gjeometrik i a dhe b .

Udhëzim. Mes *aritmetik (gjeometrik)* i dy numrave a dhe b quhet numri $\frac{a+b}{2}$ (\sqrt{ab}).

7. Tregoni se njëra zgjidhje e ekuacionit

$$2(a+b)x^2 - (a+b)^2x - 2ab(2x - a - b) = 0, \quad a, b \in \mathbf{R}$$

është mesi aritmetik i numrave a dhe b , ndërsa tjetra është mesi harmonik i a dhe b .

Udhëzim. Mes *harmonik* i dy numrave $a \neq 0$ dhe $b \neq 0$ quhet numri $\left(\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

8. Për vlera të ndryshme të parametrin real m shqyrtoni natyrën e zgjidhjeve të ekuacioneve

$$(a) \quad (m+1)x^2 + 2(m-1)x + 4m + 1 = 0,$$

$$(b) \quad (2m-1)x^2 + (m+2)x + m - 1 = 0,$$

$$(c) \quad \frac{2x}{m^2 + 3m} - \frac{1}{3a - a^2} = \frac{x^2 + 8}{a^2 - 9},$$

$$(d) \quad \frac{x-m}{x-2} + \frac{10}{x+2} + \frac{44}{x^2-4} = 0.$$

9. Nëse a, m, n janë numra realë, atëherë tregoni se zgjidhjet e ekuacionit

$$\frac{1}{x-m} + \frac{1}{x-n} = \frac{1}{a^2}, \quad a \neq 0$$

janë reale.

Udhëzim. Pasi ta keni kthyer ekuacionin në formën (1), duhet të tregoni se dallori $D = b^2 - 4ac$ është jonegativ për $a, m, n \in \mathbf{R}$, ku $a \neq 0$.

10. Pa e zgjidhur ekuacionin $x^2 + x - 1 = 0$ tregoni se numrat $x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-3}$

dhe $x_2 = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+3}$ janë zgjidhjet e tij.

Udhëzim. Shfrytëzoni rregullat e Viet-it

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 &= \frac{c}{a} \end{aligned} \right\}.$$

11. Pa i zgjidhur ekuacionet që vijojnë, të caktohet parametri real m në mënyrë që zgjidhjet x_1 dhe x_2 të plotësojnë kushtin e dhënë.

$$\begin{array}{ll}
 (a) & x^2 - mx - m^2 - 5 = 0, & 2x_1 + 2x_2 - x_1x_2 = 8, \\
 (b) & x^2 - 2mx + m^2 + 1 = 0, & x_1^2 + x_2^2 = 16, \\
 (c) & (m-2)x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0, & 3x_1^2 + 3x_2^2 = 10x_1^2x_2^2, \\
 (d) & x^2 + (m-3)x + 1 - 2m = 0, & \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = -6, \\
 (e) & x^2 - x + m = 0, & x_1^3 + x_2^3 = 7, \\
 (f) & mx^2 - (2m+1)x + 1 = 0, & x_1x_2^2 + x_1^2x_2 = 4.
 \end{array}$$

12. Caktoni parametrin real m në mënyrë që shuma e katrorëve të zgjidhjeve të ekuacionit $(m-2)x^2 - 2(m+1)x + m + 3 = 0$ të jetë e barabartë me 52.
13. Caktoni parametrin real m në mënyrë që shuma e kubeve e zgjidhjeve të ekuacionit $x^2 - 2(3m-1)x + 2m + 3 = 0$ të jetë e barabartë me shumën e vetë zgjidhjeve.
14. Nëse x_1 dhe x_2 janë zgjidhjet e ekuacionit $ax^2 + bx + c = 0$, ($a \neq 0$), atëherë njehsoni

$$(a) \quad x_1^2 + x_2^2, \quad (b) \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}, \quad (c) \quad x_1^3 + x_2^3, \quad (d) \quad \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3}.$$

15. Caktoni parametrin real k në mënyrë që zgjidhjet e ekuacionit $(k-1)x^2 + (k-5)x - (k+2) = 0$ të plotësojnë jobarazimet:

$$(a) \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 2, \quad (b) \quad x_1^2 + x_2^2 < 2, \quad (c) \quad x_1^2x_2 + x_1x_2^2 < 2.$$

15. Caktoni parametrin real m në mënyrë që zgjidhjet e ekuacionit $x^2 - (m+3)x + m + 2 = 0$ të plotësojnë sistemin e jobarazimeve

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > \frac{1}{2} \wedge x_1^2 + x_2^2 < 5.$$

16. Caktoni ata tre numra të plotë dhe të njëpasnjëshëm të tillë që shuma e katrorëve të tyre është 110.
17. Cilët janë ata dy numra të plotë dhe të njëpasnjëshëm të tillë që ndryshimi i kubeve të tyre të jetë 91.
18. Gjeni atë numër dyshifror, shifra e njëshëve e të cilit është për një më e madhe se shifra e dhjetshëve, ndërsa prodhimi i atij numri me shumën e shifrave të tij është 616.

19. Dy çeshme e mbushin një pishinë për $1\frac{7}{8}$ orë. Nëse njëra do ta mbushte pishinën dy orë më shpejt se tjetra, atëherë gjeni kohën për të cilën secila çeshme ndaras do ta mbushte pishinën.
20. Cili shumëkëndësh ka 170 diagonale?
21. Brinja e njërit katror është për 2 m më e gjatë se brinja e katrorit tjetër. Nëse syprinat e tyre qëndrojnë në raport sikur $\frac{9}{4}$, atëherë njehsoni gjatësitë e brinjëve të tyre.
22. Të zgjidhen ekuacionet bikuadratike

$$(a) \quad x^4 - 109x^2 + 900 = 0,$$

$$(b) \quad x^4 - 9\frac{1}{9}x^2 + 1 = 0,$$

$$(c) \quad 4x^4 - 17x^2 + 4 = 0,$$

$$(d) \quad (4x^2 + 5)(x^2 - 5) = 6x^2,$$

$$(e) \quad (x^2 + 2)^2 + (x^2 - 3)^2 = 625,$$

$$(f) \quad 25x^4 - 299x^2 - 324 = 0.$$

4.3. Funkzioni kuadratit $y = ax^2 + bx + c$

Përkufizim 4.3.1. *Funksioni $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ i përkufizuar me barazimin*

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0) \quad (1)$$

quhet funksion kuadratit. Grafiku i funksionit (1) quhet parabolë.

Relacioni (1) është ekuivalent me barazimin

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}, \quad (2)$$

i cili quhet *forma kanonike* e funksionit (1). Për arsye të thjeshtësimit, barazimin (2) shpesh e shkruajmë në formën

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta, \quad (3)$$

ku

$$\alpha = -\frac{b}{2a}, \quad \beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}. \quad (4)$$

Nga relacioni (2), gjegjësisht (3), vërejmë se për $x = \alpha = -\frac{b}{2a}$ funksioni arrin vlerën ekstreme dhe atë për $a < 0$ maksimum, ndërsa për $a > 0$ minimum të barabartë me $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$. Pika $K(\alpha, \beta)$ quhet *kulmi* i parabolës.

Po ashtu, nuk është vështirë për të përfunduar se për $a > 0$ funksioni (1) është monotono-zvogëlues në intervalin $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$, ndërsa është monotono-ritës në intervalin $\left[-\frac{b}{2a}, \infty\right)$. Në pikën $-\frac{b}{2a}$ funksioni arrin vlerën minimale të barabartë me $-\frac{b^2 - 4ac}{4a} = y_{\min}$.

Me të vërtetë, për $x_1, x_2 \in \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ dhe $x_1 \leq x_2$ rrjedh që $x_1 \leq -\frac{b}{2a}$; $x_2 \leq -\frac{b}{2a}$ dhe $x_1 + \frac{b}{2a} \leq x_2 + \frac{b}{2a} \leq 0$. Kështu $\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq \left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2$. Meqë $a > 0$, prandaj

$$f(x_1) = a \cdot \left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \geq a \cdot \left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = f(x_2).$$

Kjo do të thotë se funksioni është monotono-zvogëlues në intervalin $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$.

Ngjashëm, për për $x_1, x_2 \in \left[-\frac{b}{2a}, \infty\right)$ dhe $x_1 \leq x_2$ rrjedh që $x_1 \geq -\frac{b}{2a}$; $x_2 \geq -\frac{b}{2a}$ dhe $0 \leq x_1 + \frac{b}{2a} \leq x_2 + \frac{b}{2a}$. Kështu $\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq \left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2$. Meqë $a > 0$, prandaj

$$f(x_1) = a \cdot \left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \leq a \cdot \left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = f(x_2).$$

Kjo do të thotë se funksioni është monotono-rritës në intervalin $\left[-\frac{b}{2a}, \infty\right)$ (shih fig. 4.2, fig. 4.3, fig. 4.4).

Në mënyrë analoge, për $a < 0$ funksioni (1) është monotono-rritës në intervalin $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$, ndërsa është monotono-zvogëlues në intervalin $\left[-\frac{b}{2a}, \infty\right)$.

Prandaj në pikën $x = \alpha - \frac{b}{2a}$ funksioni arrin vlerën maksimale të barabartë me $-\frac{b^2 - 4ac}{4a} = \beta = y_{\max}$ (shih fig. 4.5, fig. 4.6, fig. 4.7). Pika $K(\alpha, \beta)$ paraqet kulmin e parabolës.

Prandaj, funksioni (1) ka minimum (maksimum) varësisht nga fakti se $a > 0$ ($a < 0$).

Nëse ekuacioni $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ ka zgjidhje reale të ndryshme x_1, x_2 , d.m.th. $D = b^2 - 4ac > 0$, gjeometrikisht do të thotë se grafiku e pret boshtin Ox . Si rast i veçantë, kur $x_1 = x_2$ parabola vetëm e takon boshtin Ox në pikën $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$. Nëse $D < 0$, d.m.th. ekuacioni $ax^2 + bx + c = 0$ nuk ka zgjidhje reale, gjeometrikisht do të thotë se parabola (grafiku) nuk e pret boshtin Ox , kjo tregon se parabola ndodhet mbi boshtin Ox nëse $a > 0$ dhe nën boshtin Ox nëse $a < 0$.

Nga kjo që shënuam më lartë, për të vizatuar grafikun e një parabole të dhënë me ekuacionin (1) veprojmë sipas kësaj procedure (algoritmi):

1. Së pari caktojmë shenjëën e a dhe njehsojmë dallorin $D = b^2 - 4ac$.
2. Nëse $D > 0$ atëherë gjejmë zgjidhjet x_1, x_2 të ekuacionit $ax^2 + bx + c = 0$.
3. Caktojmë kulmin $K\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$ të parabolës.
4. Caktojmë pikëprerjen e parabolës me boshtin Oy , duke zëvendësuar $x = 0$ në ekuacionin (1). D.m.th. çdo parabolë e pret boshtin Oy në pikën $y = c$.

Funksioni $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ quhet çift (tek) nëse $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$). Nëse funksioni është çift (tek) grafiku i tij është simetrik ndaj boshtit Oy (origjinës $O(0, 0)$). Në vend të domenës \mathbf{R} të funksionit çift (tek) $f(x)$ ndonjëherë mund të jetë edhe ndonjë interval simetrik ndaj origjinës.

Për të thjeshtësuar paraqitjen grafike të një funksioni kuadratik, dallojmë gjithsej gjashtë raste:

1. Nëse $a > 0$ dhe $D = b^2 - 4ac > 0$, grafiku i funksionit kuadratik e pret boshtin Ox në pikat x_1 dhe x_2 , ku

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a};$$

ka minimum të barabartë me $y_{\min} = \beta = -\frac{D}{4a}$ që arrihet në pikën $\alpha = -\frac{b}{2a}$; e pret boshtin Oy në pikën $y = c$; është monotono-zvogëlues në intervalin $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$, kurse monotono-rritës në intervalin $[-\frac{b}{2a}, \infty)$. Grafiku i tij është simetrik ndaj drejtëzës $x = -\frac{b}{2a}$ (shih fig. 4.2).

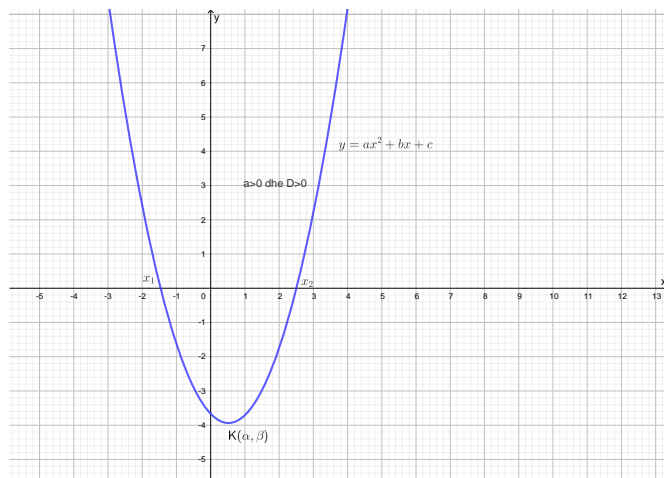


Fig. 4.2

2. Nëse $a > 0$ dhe $D = b^2 - 4ac = 0$, grafiku i funksionit kuadratik e takon boshtin Ox në pikën $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$; ka minimum të barabartë me $y_{\min} = \beta = -\frac{D}{4a} = \frac{0}{2a} = 0$ që arrihet në pikën $\alpha = -\frac{b}{2a}$; e pret boshtin Oy në pikën $y = c$; është monotono-zvogëlues në intervalin $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$, kurse monotono-rritës në intervalin $[-\frac{b}{2a}, \infty)$. Grafiku i tij është simetrik ndaj drejtëzës $x = -\frac{b}{2a}$ (shih fig. 4.3).

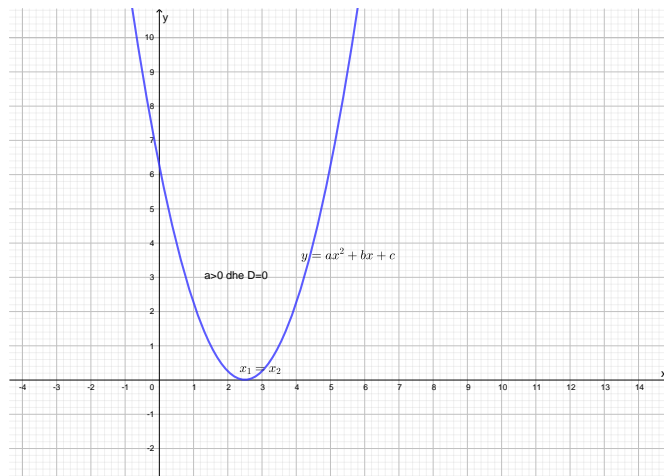


Fig. 4.3

3. Nëse $a > 0$ dhe $D = b^2 - 4ac < 0$, grafiku i funksionit kuadratik nuk e pret dhe as nuk e takon boshtin Ox , sepse $x_1, x_2 \notin \mathbf{R}$; ka minimum të barabartë me $y_{\min} = \beta = -\frac{D}{4a}$ që arrihet në pikën $\alpha = -\frac{b}{2a}$; e pret boshtin Oy në pikën $y = c$; është monotono-zvogëlues në intervalin $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$, kurse monotono-rritës në intervalin $[-\frac{b}{2a}, \infty)$. Grafiku i tij është simetrik ndaj drejtëzës $x = -\frac{b}{2a}$ (shih fig. 4.4).

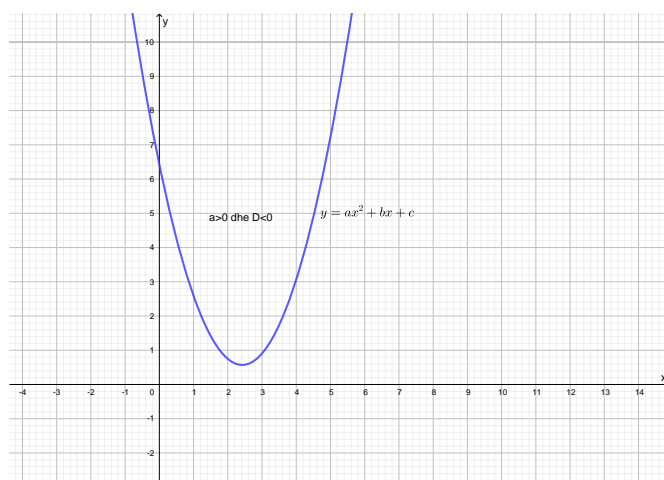


Fig. 4.4

4. Nëse $a < 0$ dhe $D = b^2 - 4ac > 0$, grafiku i funksionit kuadratik e pret boshtin Ox në pikat x_1 dhe x_2 ; ka maksimum të barabartë me $y_{\max} = \beta = -\frac{D}{4a}$ që arrihet në pikën $\alpha = -\frac{b}{2a}$; e pret boshtin Oy në pikën $y = c$; është monotono-rritës në intervalin $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$, kurse monotono-zvogëlues në intervalin $[-\frac{b}{2a}, \infty)$. Grafiku i tij është simetrik ndaj drejtëzës $x = -\frac{b}{2a}$ (shih fig. 4.5).

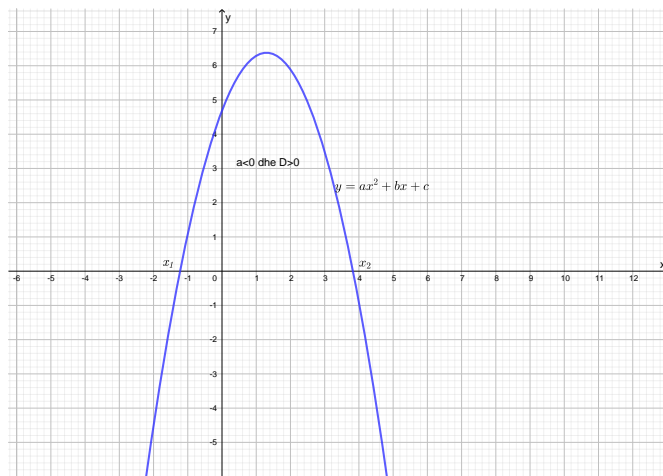


Fig. 4.5

5. Nëse $a < 0$ dhe $D = b^2 - 4ac = 0$, grafiku i funksionit kuadratik e takon boshtin Ox në pikën $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$; ka maksimum të barabartë me $y_{\max} = \beta = -\frac{D}{4a} = -\frac{0}{4a} = 0$ që arrihet në pikën $\alpha = -\frac{b}{2a}$; e pret boshtin Oy në pikën $y = c$; është monotono-rritës në intervalin $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$, kurse monotono-zvogëlues në intervalin $[-\frac{b}{2a}, \infty)$. Grafiku i tij është simetrik ndaj drejtëzës $x = -\frac{b}{2a}$ (shih fig. 4.6).

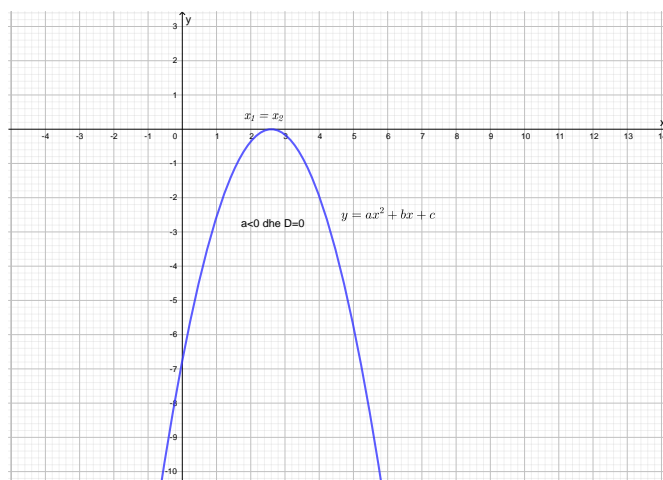


Fig. 4.6

6. Nëse $a < 0$ dhe $D = b^2 - 4ac < 0$, grafiku i funksionit kuadratik nuk e pret dhe as nuk e takon boshtin Ox , sepse $x_1, x_2 \notin \mathbf{R}$; ka maksimum të barabartë me $y_{\max} = \beta = -\frac{D}{4a}$ që arrihet në pikën $\alpha = -\frac{b}{2a}$; e pret boshtin Oy në pikën $y = c$; është monotono-rritës në intervalin $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$, kurse monotono-zvogëlues në intervalin $[-\frac{b}{2a}, \infty)$. Grafiku i tij është simetrik ndaj drejtëzës $x = -\frac{b}{2a}$ (shih fig. 4.7).

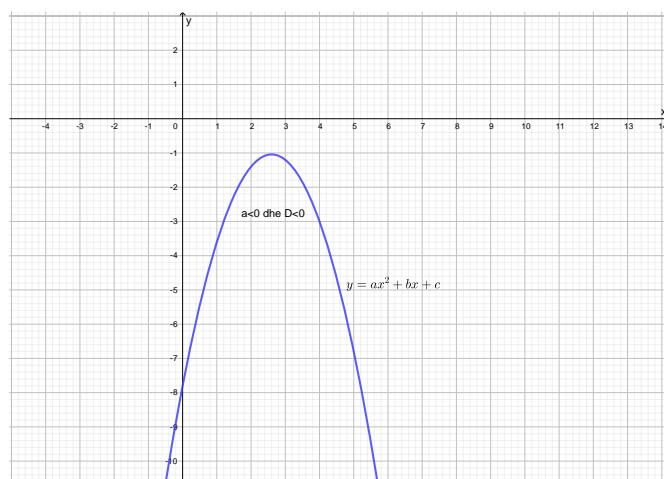


Fig. 4.7

Shembulli 4.19 Të shqyrtojmë dhe vizatojmë grafikun e përafërt të parabolave

$$\begin{array}{ll}
 (a) & y = x^2, \\
 (b) & y = -x^2, \\
 (c) & y = 2x^2, \\
 (d) & y = (x - 3)^2, \\
 (e) & y = x^2 + 4, \\
 (f) & y = x^2 - 4,
 \end{array}$$

Zgjidhje. (a) Funksioni $f(x) = x^2$ është i përkufizuar për çdo $x \in \mathbf{R}$. Është e qartë se $a = 1 > 0$ dhe $D = 0$, prandaj funksioni ka minimum dhe e takon boshtin Ox në pikën $x_1 = x_2 = 0$, të cilat janë edhe zerot e funksionit. Funksioni $f(x) = x^2 \geq 0$ për çdo $x \in \mathbf{R}$, prandaj grafiku ndodhet mbi boshtin Ox . Kulmi i parabolës është vetë origjina e sistemit koordinativ $O(0, 0)$. Funksioni është monotono-zvogëlues në intervalin $(-\infty, 0]$, ndërsa është monotono-rritës në intervalin $[0, \infty)$. Me të vërtetë, për çdo $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ dhe $x_1 \leq x_2$ marrim se $x_1^2 \geq x_2^2$. D.m.th. se $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Ngjashëm për çdo $x_1, x_2 \in [0, \infty)$ dhe $x_1 \leq x_2$ marrim se $x_1^2 \leq x_2^2$. D.m.th. se $f(x_1) \leq f(x_2)$, që d.m.th. se funksioni është monotono-rritës në intervalin $[0, \infty)$.

Vërejmë se $f(-x) = f(x)$ për çdo $x \in \mathbf{R}$, që d.m.th. funksioni është çift, prandaj grafiku i tij është simetrik ndaj boshtit Oy . Po ashtu, parabola e pret boshtin Oy në pikën $y = 0$. Për ta paraqitur grafikun e përafërt së pari i paraqesim zerot, kulmin dhe pikëprerjen e parabolës me boshtin Oy .

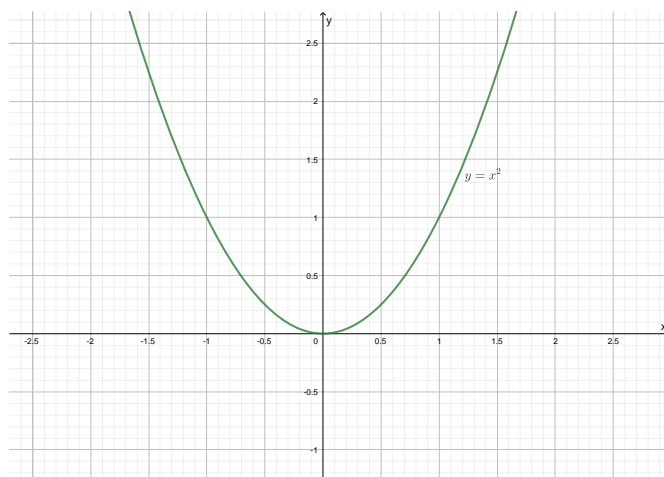


Fig. 4.8

(b) Ndonjëherë lexuesit i duket më lehtë sikur shqyrtimi i një funksioni të ndahet në pika, si vijon:

1. *Fusha e përkufizimit (domena) e funksionit.* Funksioni $f(x) = -x^2$ është i përkufizuar për çdo $x \in \mathbf{R}$.

2. *Zerot dhe shenja.* Funksioni $f(x) = -x^2$ është i barabartë me zero atëherë dhe vetëm atëherë, $x_1 = x_2 = 0$, d.m.th. parabola e takon boshtin Ox . Për $x \in (-\infty, \infty)$ $f(x) = -x^2 \leq 0$. Kjo do të thotë se grafiku ndodhet nën boshtin Ox .

3. *Monotonia dhe vlerat ekstreme.* Kulmi i parabolës është pika $O(0,0)$. Pra funksioni $f(x) = -x^2$ në pikën $x_0 = 0$ e ndërron monotoninë. Prandaj për çdo $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ dhe $x_1 \leq x_2$ marrim se $x_1^2 \geq x_2^2$ respektivisht $-x_1^2 \leq -x_2^2$, që d.m.th. $f(x_1) \leq f(x_2)$, prandaj funksioni është monotono-rritës në intervalin $(-\infty, 0]$. Ngjashëm marrim se funksioni është monotono-zvogëlues në intervalin $[0, \infty)$. Prandaj në pikën $x = 0$ funksioni arrin vlerën maksimale të barabartë me 0.

4. Meqë $f(-x) = -(-x)^2 = -x^2 = f(x)$, d.m.th. funksioni është çift, prandaj grafiku është simetrik ndaj boshtit Oy .

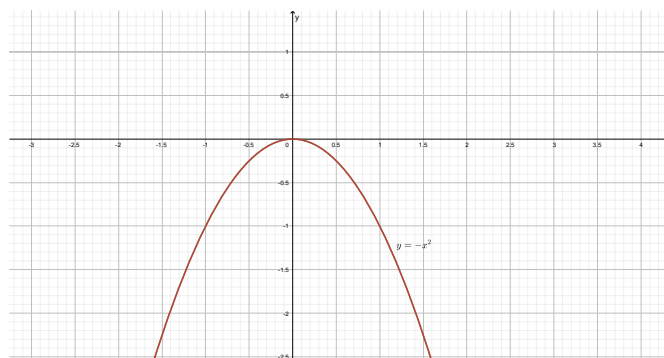


Fig. 4.9

(c) Për rastin $f(x) = 2x^2$ mund ta shfrytëzojmë rastin (a) ashtuqë vlerat e funksionit $f(x) = x^2$ shumëzohen me 2, ose mund të shqyrtohet në mënyrë të pavarur.

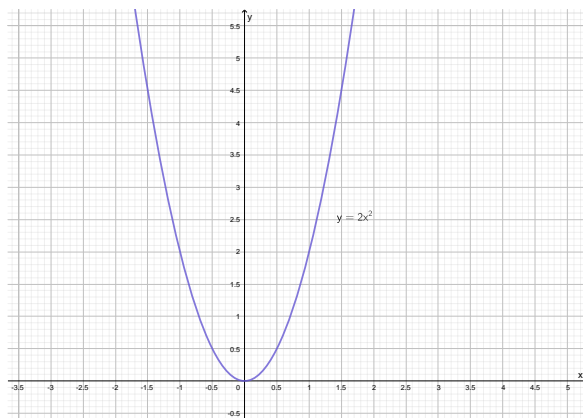


Fig. 4.10

(d) Edhe ky rast mund ta shfrytëzoj rastin (a) ashtuqë grafiku i funksionit $f(x) = (x - 3)^2$ në fakt është zhvendosje grafikut të funksionit $f(x) = x^2$ për 3 njësi në drejtim dhe kahje të boshtit Ox .

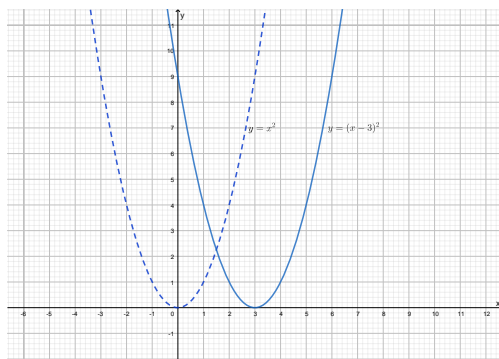


Fig. 4.11

(e) Edhe për grafikun e funksionit $f(x) = x^2 + 4$ mund ta shfrytëzojmë grafikun e funksionit të rasti (a) $f(x) = x^2$ ashtu që këtë të fundit e zhvendosim për 2 njësi në drejtim dhe kahje të boshtit Oy .

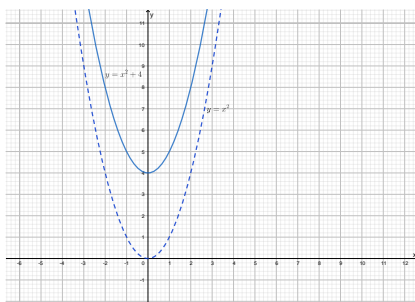


Fig. 4.12

(f) Edhe për grafikun e funksionit $f(x) = x^2 - 4$ mund ta shfrytëzojmë grafikun e funksionit të rasti (a) $f(x) = x^2$ duke e zhvendosur këtë të fundit për

4 njësi në drejtim por kahje të kundërt me atë të boshtit Oy , megjithatë do ta shqyrtojmë në mënyrë të pavarur.

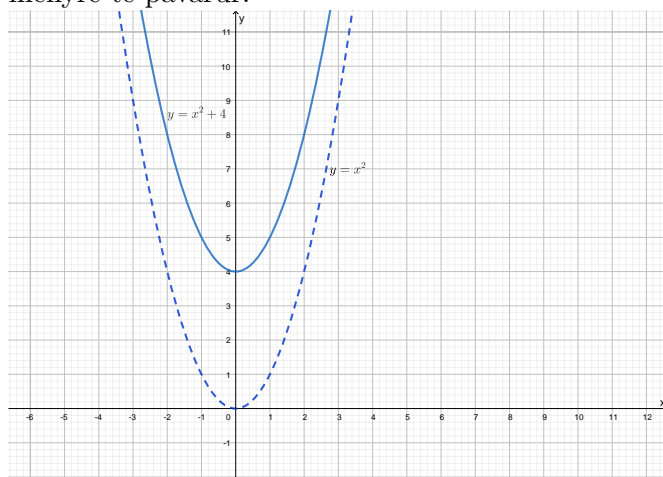


Fig. 4.13

1. *Fusha e përkufizimit (domena) e funksionit.* Funksioni $f(x) = x^2 - 4$ është i përkufizuar për çdo $x \in \mathbf{R}$.

2. *Zerot dhe shenja.* Funksioni $f(x) = x^2 - 4$ është i barabartë me zero atëherë dhe vetëm atëherë, $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, d.m.th. parabola e pret boshtin Ox në pikat $x_1 = -2$ dhe $x_2 = 2$. Për $x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$ $f(x) = x^2 - 4 \geq 0$, kjo do të thotë se grafiku ndodhet mbi boshtin Ox për $x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$. Kurse për $x \in [-2, 2]$ funksioni $f(x) = x^2 - 4 \leq 0$, që d.m.th. se grafiku ndodhet nën boshtin Ox për $x \in [-2, 2]$.

3. *Monotonia dhe vlerat ekstreme.* Kulmi i parabolës është pika $K(0, -4)$. Pra funksioni $f(x) = x^2 - 4$ në pikën $x_0 = 0$ e ndërron monotoninë. Prandaj për çdo $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ dhe $x_1 \leq x_2$ marrim se $x_1^2 - 4 \geq x_2^2 - 4$, që d.m.th. $f(x_1) \geq f(x_2)$, prandaj funksioni është monotono-zvogëlues në intervalin $(-\infty, 0]$. Ngjashëm marrim se funksioni është monotono-rritës në intervalin $[0, \infty)$. Prandaj në pikën $x = 0$ funksioni arrin vlerën minimale të barabartë me $-\frac{D}{4a} = -4$.

4. Meqë $f(-x) = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4 = f(x)$, d.m.th. funksioni është çift, përfundojmë se grafiku është simetrik ndaj boshtit Oy .

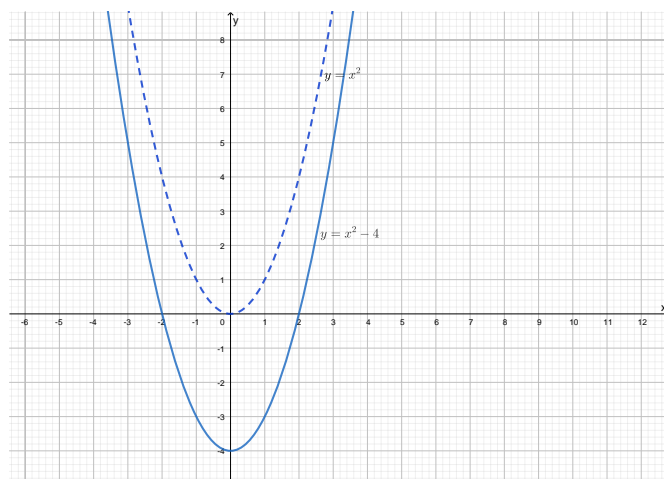


Fig. 4.14

Shembulli 4.20. Të shqyrtohen dhe vizatohen grafikët e këtyre funksioneve duke i kthyer ato në formën kanonike

- | | |
|---------------------------|--------------------------|
| (a) $y = x^2 - 6x + 9,$ | (b) $y = -x^2 - 2x - 1,$ |
| (c) $y = -x^2 + 3x,$ | (d) $y = 2x^2 - 5x,$ |
| (e) $y = -2x^2 + 5x + 2,$ | (f) $y = x^2 + 6x - 8,$ |
| (g) $y = x^2 + 6x - 5,$ | (h) $y = x^2 + 2x + 4.$ |

Zgjidhje. (a) Është e qartë se $y = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$, të cilin funksion e kemi shqyrtuar në shembullin papraprak.

(b) Funksioni $y = -x^2 - 2x - 1 = -(x + 1)^2$, që d.m.th. parabola shtrihet e tëra nën boshtin Ox , e takon boshtin Ox në pikën $x = -1$, boshtin Oy e pret në pikën $y = -1$, ndërsa kulmi i parabolës është pika $K(-1, 0)$. Funksioni ka maksimum të barabartë me zero, i cili arrihet në pikën $x = -1$.

(c) Vlen $y = -x^2 + 3x = -(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{9}{4}$, prej nga shihet se kulmi i parabolës është pika $K(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$. Parabola e pret boshtin Ox në pikat $x_1 = 0$ dhe $x_2 = 3$, ndërsa boshtin Oy e pret në pikën $y = 0$. Funksioni ka maksimum të barabartë me $\frac{9}{4}$, i cili arrihet në pikën $\frac{3}{2}$.

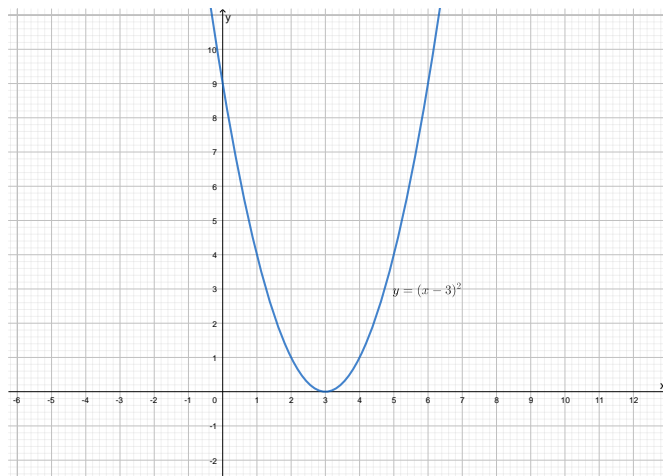


Fig. 4.15

(d) Forma kanonike e funksionit $y = 2x^2 - 5x$, është $y = 2\left(x^2 - 2 \cdot x \frac{5}{4}\right) = 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{8}$, prej nga shihet se kulmi i parabolës është pika $K\left(\frac{5}{4}, -\frac{25}{8}\right)$. Pra funksioni ka minimum të barabartë me $y = -\frac{25}{8}$ i cili arrihet në pikën $x = \frac{5}{4}$. Parabola e pret boshtin Ox në pikat $x_1 = 0$ dh $x_2 = \frac{5}{2}$, ndërsa boshtin Oy në pikën $y = 0$, që d.m.th. se parabola kalon nëpër pikën $O(0,0)$.

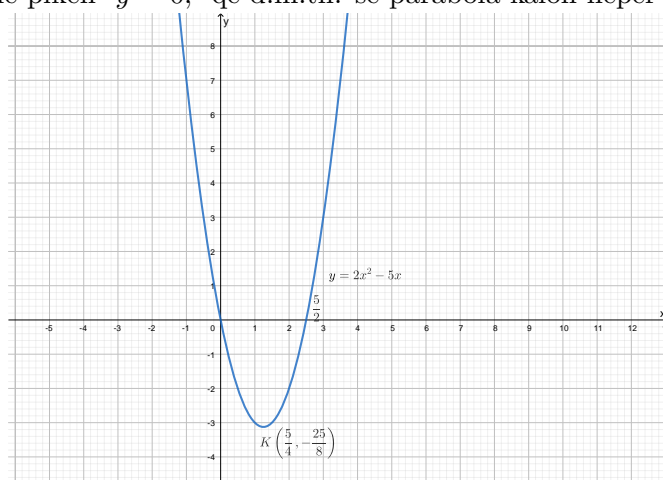


Fig. 4.16

(e) Ngjashëm si në rastin (d) kemi

$$y = -2x^2 + 5x + 2 = -2\left(x^2 - \frac{5}{2}x\right) + 2 = -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{41}{8}.$$

Tani është e qartë se kulmi i parabolës është pika $K\left(\frac{5}{4}, \frac{41}{8}\right)$. Meqë $a < 0$, funksioni ka maksimum të barabartë me $y = \frac{41}{8}$ i cili arrihet në pikën $x = \frac{5}{4}$.

Meqë $D = 41 > 0$, parabola e pret boshtin Ox në pikat $x_1 = \frac{-5 + \sqrt{41}}{-4} = \frac{5 - \sqrt{41}}{4}$ dhe $x_2 = \frac{-5 - \sqrt{41}}{-4} = \frac{5 + \sqrt{41}}{4}$, ndërsa boshtin Oy në pikën $y = 2$, që d.m.th. se parabola kalon nëpër pikën $P(0, 2)$ të boshtit Oy .

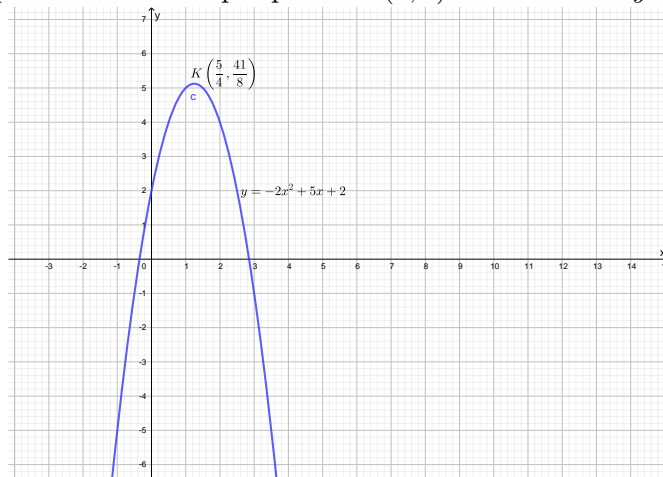


Fig. 4.17

(f) Ngjashëm si në rastet (d) dhe (e) kemi

$$y = x^2 + 6x - 8 = (x + 3)^2 - 17.$$

Tani është e qartë se kulmi i parabolës është pika $K(-3, -17)$. Meqë $a > 0$, funksioni ka minimum të barabartë me $y = -17$ i cili arrihet në pikën $x = -3$.

Meqë $D = 68 > 0$, parabola e pret boshtin Ox në pikat $x_1 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$ dhe $x_2 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}$, ndërsa boshtin Oy në pikën $y = -8$, që d.m.th. se parabola kalon nëpër pikën $P(0, -8)$ të boshtit Oy . Sa i përket monotonisë përfundojmë se funksioni është monotono-rritës (monotono-zvogëlues) në intervalin $[-3, \infty)$ ($(-\infty, -3]$).

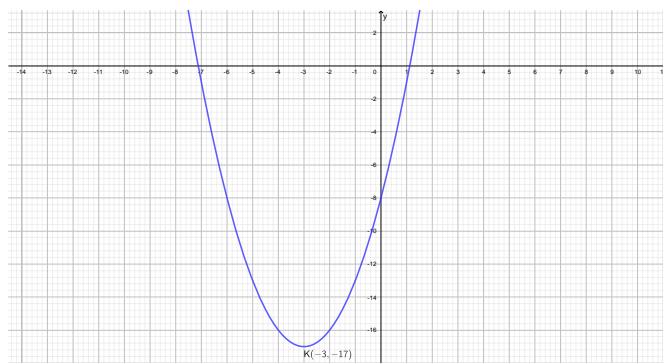


Fig. 4.18

Rastet (g) dhe (h) shqyrtohen në mënyrë analoge sikurse rasti (f). Vlen të përmendet fakti se në rastin (h), ku $y = x^2 + 2x + 4$ parabola nuk e pret

fare boshtin Ox sepse $D = -12 < 0$. Nga qe $a > 0$ përfundojmë se grafiku i funksionit i tëri shtrihet mbi boshtin Ox . Në aspektin algjebrik përfundojmë se trinomi $x^2 + 2x + 4$ është pozitiv për çdo $x \in \mathbf{R}$.

Shembulli 4.21. T'i shqyrtojmë disa funksione kuadratike ku na paraqitet vlera absolute.

$$(a) \quad f(x) = x^2 - 2x - 6|x - 1| + 6, \quad (b) \quad f(x) = -x^2 - 2x + 4|x + 1| - 4.$$

Zgjidhje. Edhe këtu, ngjashëm si te ekuacionet, së pari duhet të lirohemi nga vlera absolute.

(a) Vlen

$$f(x) = x^2 - 2x - 6|x - 1| + 6 = \begin{cases} x^2 + 4x, & \text{për } x \in (-\infty, 1] \\ x^2 - 8x + 12, & \text{për } x \in [1, \infty). \end{cases}$$

D.m.th dallojmë dy raste. Kjo do të thotë se në rastin e parë; për $x \in (-\infty, 1]$ e shqyrtojmë funksionin $y = x^2 + 4x$, ndërsa në rastin e dytë; për $x \in [1, \infty)$ e shqyrtojmë funksionin $y = x^2 - 8x + 12$. Për shkak të vazhdueshmërisë, të dy grafikët e tyre "ngjiten" në pikën $x = 1$, pra aty ku vlera absolute e $x - 1$ bëhet zero.

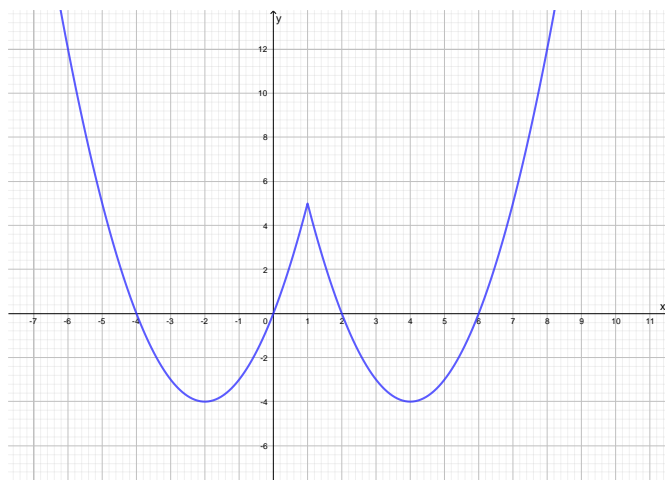


Fig. 4.19

(b) Ngjashëm

$$f(x) = -x^2 - 2x + 4|x + 1| - 4 = \begin{cases} -x^2 - 6x - 8, & \text{për } x \in (-\infty, -1] \\ -x^2 + 2x, & \text{për } x \in [-1, \infty). \end{cases}$$

D.m.th dallojmë dy raste. Në rastin e parë, pra për $x \in (-\infty, -1]$ e shqyrtojmë funksionin $y = -x^2 - 6x - 8$ dhe e vizatojmë grafikun e parabolës përkatëse vetëm në gjysmërafshin nga është $x \leq -1$, ndërsa në rastin e dytë; për $x \in [-1, \infty)$ e shqyrtojmë funksionin $y = -x^2 + 2x$ dhe e vizatojmë grafikun e parabolës përkatëse vetëm në gjysmërafshin nga është $x \geq -1$.

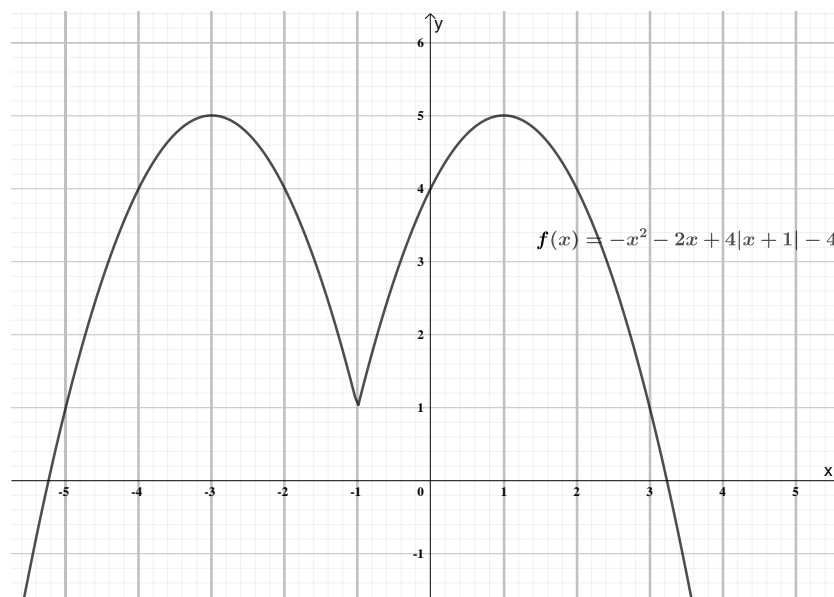


Fig. 4.20

Shembulli 4.22. Të vizatohenn grafikët e funksioneve

$$(a) \quad y = |1 - x^2|, \quad (b) \quad y = |x^2 - 1| + 3x - 3,$$

$$(c) \quad y = |-x^2 + 4|x| - 5|, \quad (d) \quad y = |x^2 + |x| + 1|.$$

Zgjidhje. (a). Meqenëse ekuacioni $1 - x^2 = 0$ ka dy zgjidhje $x_1 = -1$ dhe $x_2 = 1$, ndërsa $1 - x^2 \geq 0$ në bashkësinë $[-1, 1]$, kurse $1 - x^2 \leq 0$ në bashkësinë $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ (pse?). Ngjashëm si në shembullin paraprak marrim se

$$y = |1 - x^2| = \begin{cases} -1 + x^2, & \text{për } x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \\ 1 - x^2, & \text{për } x \in [-1, 1]. \end{cases}$$

Tani nuk e kemi të vështirë t'i vizatojmë grafikët e këtyre funksioneve. Vërjemë se grafiku ndodhet mbi boshtin Ox , sepse $y = |1 - x^2| \geq 0$ për çdo $x \in \mathbf{R}$.

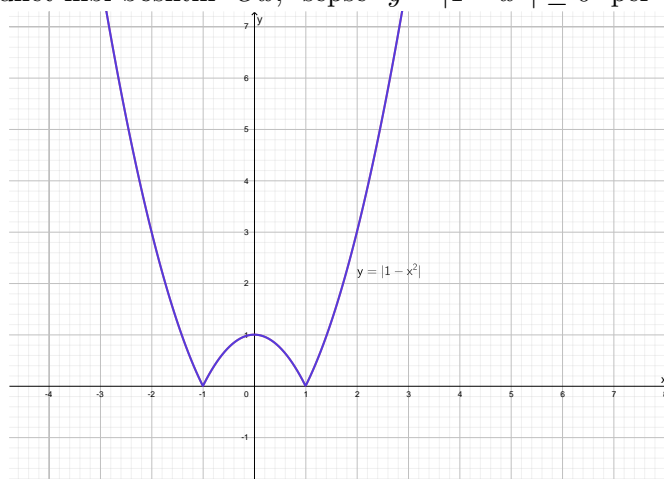
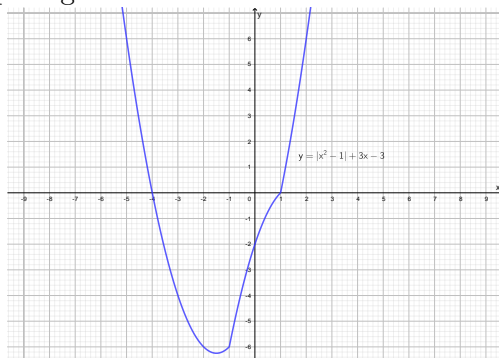


Fig. 4.21

(b) Ngjashëm, ekuacioni $x^2 - 1 = 0$ ka dy zgjidhje $x_1 = -1$ dhe $x_2 = 1$, ndërsa $x^2 - 1 \geq 0$ në bashkësinë $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ (pse?), kurse $x^2 - 1 \leq 0$ në bashkësinë $[-1, 1]$. Prandaj

$$y = |x^2 - 1| + 3x - 3 = \begin{cases} x^2 + 3x - 4, & \text{për } x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \\ -x^2 + 3x - 2, & \text{për } x \in [-1, 1]. \end{cases}$$

Si në rastin (a) nuk është vështirë t'i vizatojmë grafikët e këtyre funksioneve, të cilët së bashku paraqesin grafikun e funksionit të dhënë.

**Fig. 4.22**

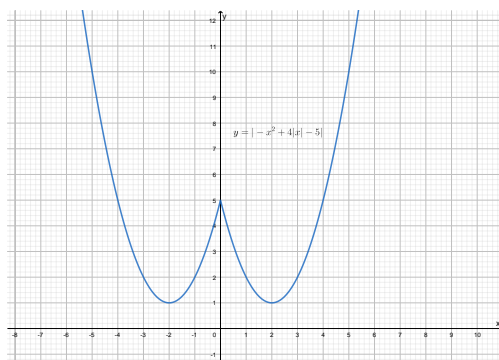
(c) Vlen

$$y = |-x^2 + 4|x| - 5| = \begin{cases} |-x^2 + 4x - 5|, & \text{për } x \geq 0 \\ |-x^2 - 4x - 5|, & \text{për } x \leq 0. \end{cases}$$

Meqenëse $-x^2 + 4x - 5 = -(x-2)^2 - 1 \leq -1 < 0$, përfundojmë se $|-x^2 + 4x - 5| = -(-x^2 + 4x - 5) = x^2 - 4x + 5$. Ngjashëm, nga $-x^2 - 4x - 5 = -(x+2)^2 - 1 \leq -1 < 0$, përfundojmë se $|-x^2 - 4x - 5| = -(-x^2 - 4x - 5) = x^2 + 4x + 5$. D.m.th.

$$y = |-x^2 + 4|x| - 5| = \begin{cases} x^2 - 4x + 5, & \text{për } x \geq 0 \\ x^2 + 4x + 5, & \text{për } x \leq 0. \end{cases}$$

Tani nuk është vështirë të vizatohet grafiku i përafërt për funksionin y .

**Fig. 4.23**

(d) Në mënyrë analoge

$$y = |x^2 + |x| + 1| = \begin{cases} |x^2 + x + 1|, & \text{për } x \geq 0 \\ |x^2 - x + 1|, & \text{për } x \leq 0. \end{cases}$$

Meqenëse $x^2 + x + 1 > 0$ për $x \geq 0$, përfundojmë se $|x^2 + x + 1| = x^2 + x + 1$ në intervalin $[0, \infty)$. Ngjashëm, nga $x^2 - x + 1 > 0$ për $x \leq 0$, përfundojmë se $|x^2 - x + 1| = x^2 - x + 1$ në intervalin $(-\infty, 0]$. Prandaj

$$y = |x^2 + |x| + 1| = \begin{cases} x^2 + x + 1, & \text{për } x \geq 0 \\ x^2 - x + 1, & \text{për } x \leq 0. \end{cases}$$

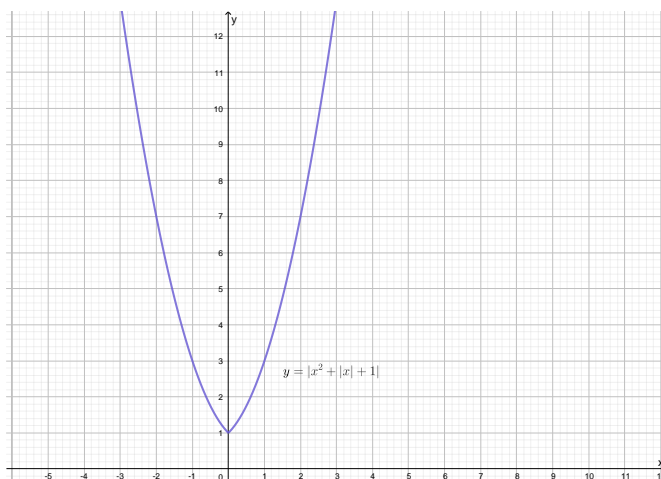


Fig. 4.24

4.4. Shenja e trinomit kuadratik $ax^2 + bx + c$

Për caktimin e shenjës së trinomit $ax^2 + bx + c$ do të shfrytëzojmë grafikun e përafërt të parabolës përkatëse $y = ax^2 + bx + c$. Kjo do të thotë se jobarazimi $ax^2 + bx + c \geq 0$ është ekuivalent me bashkësinë e vlerave $x \in \mathbf{R}$ për të cilat grafiku i parabolës $y = ax^2 + bx + c$ ndodhet mbi boshtin Ox , ndërsa jobarazimi $ax^2 + bx + c \leq 0$ është ekuivalent me bashkësinë e vlerave $x \in \mathbf{R}$ për të cilat grafiku i parabolës $y = ax^2 + bx + c$ ndodhet nën boshtin Ox . Kjo metodë është shumë efikase për zgjidhjen e jobarazimeve të shkallës së dytë. Për këtë mjafton të caktojmë formën e parabolës (ka maksimum apo minimum—të cilën e përcakton shenja e a —së) dhe faktin se parabola e pret ose nuk e pret boshtin Ox , d.m.th. duhet vlerësuar shenjën e $D = b^2 - 4ac$. Nëse $D \geq 0$, atëherë duhet gjetur zgjidhjet e ekuacionit $ax^2 + bx + c = 0$. Prandaj dallojmë këto raste:

1. Nëse $a > 0$ dhe $D > 0$, parabola e pret boshtin Ox në dy pika të ndryshme $x_{1,2}$, p.sh. $x_1 < x_2$ dhe ka minimum. Prandaj

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \iff x \in (-\infty, x_1] \cup [x_2, \infty),$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0 \iff x \in [x_1, x_2],$$

$$ax^2 + bx + c > 0 \iff x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty),$$

$$ax^2 + bx + c < 0 \iff x \in (x_1, x_2).$$

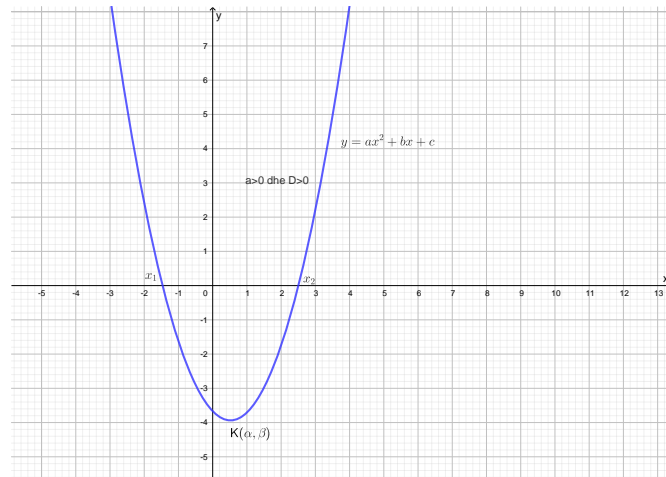


Fig. 4.25

2. Nëse $a > 0$ dhe $D = 0$, parabola e takon boshtin Ox në pikën $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$. Në këtë rast kemi

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \iff x \in \mathbf{R},$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0 \iff x \in \left\{ -\frac{b}{2a} \right\},$$

$$ax^2 + bx + c > 0 \iff x \in \left(-\infty, -\frac{b}{2a} \right) \cup \left(-\frac{b}{2a}, \infty \right) = \mathbf{R} \setminus \left\{ -\frac{b}{2a} \right\},$$

$$ax^2 + bx + c < 0 \iff x \in \emptyset.$$

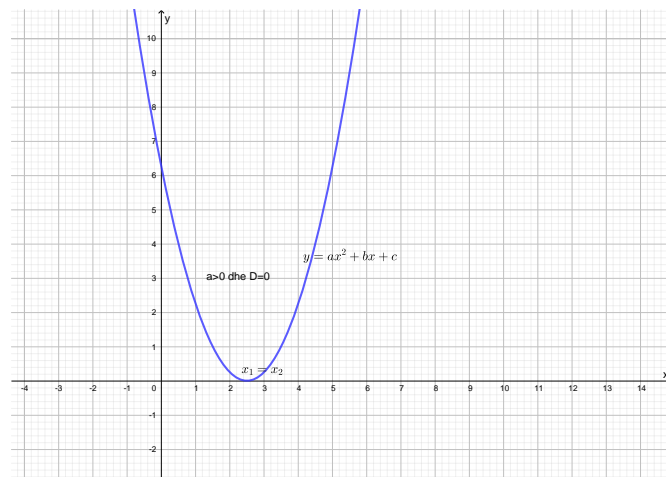


Fig. 4.26

3. Nëse $a > 0$ dhe $D < 0$, parabola nuk e pret fare boshtin Ox . Meqenëse $a > 0$, parabola ka minimum, prandaj i tërë grafiku ndodhet nën boshtin Ox .

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \iff x \in \mathbf{R} = (-\infty, \infty),$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0 \iff x \in \emptyset.$$

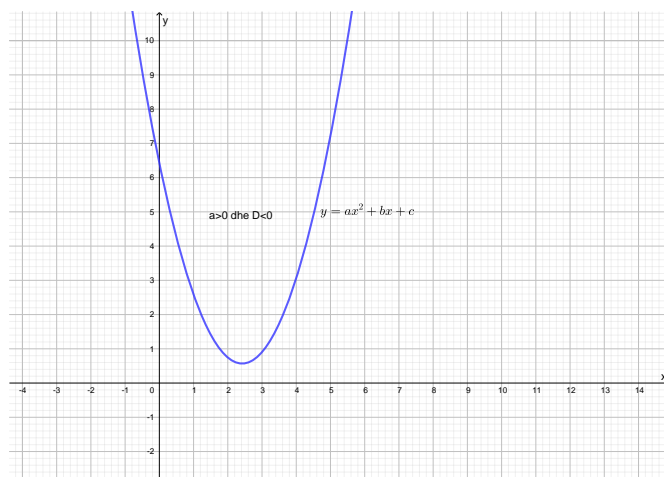


Fig. 4.27

4. Nëse $a < 0$ dhe $D > 0$, parabola e pret boshtin Ox në dy pika të ndryshme $x_{1,2}$, p.sh. $x_1 < x_2$ dhe ka maksimum. Prandaj

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &\geq 0 \iff x \in [x_1, x_2], \\
 ax^2 + bx + c &\leq 0 \iff x \in (-\infty, x_1] \cup [x_2, \infty), \\
 ax^2 + bx + c &> 0 \iff x \in (x_1, x_2), \\
 ax^2 + bx + c &< 0 \iff x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty).
 \end{aligned}$$

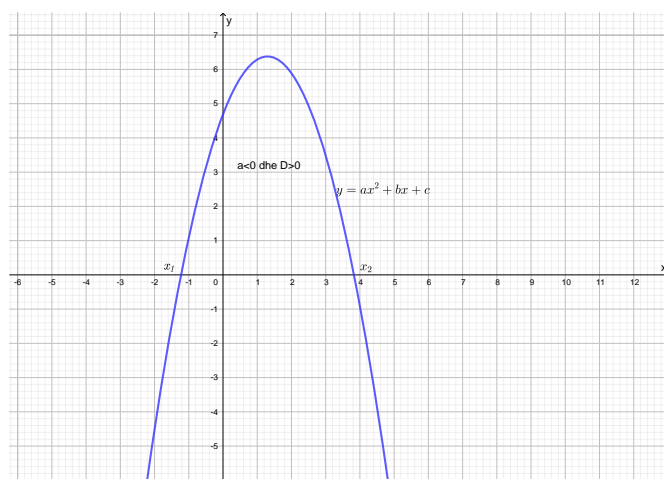


Fig. 4.28

5. Nëse $a < 0$ dhe $D = 0$, parabola e takon boshtin Ox (nga poshtë) në

pikën $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$. Në këtë rast kemi

$$ax^2 + bx + c \leq 0 \iff x \in \mathbf{R},$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \iff x \in \left\{ -\frac{b}{2a} \right\},$$

$$ax^2 + bx + c < 0 \iff x \in (-\infty, -\frac{b}{2a}) \cup (-\frac{b}{2a}, \infty) = \mathbf{R} \setminus \left\{ -\frac{b}{2a} \right\},$$

$$ax^2 + bx + c > 0 \iff x \in \emptyset.$$

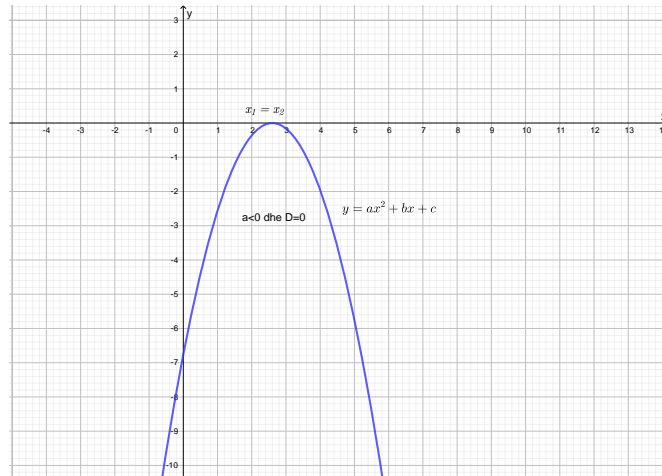


Fig. 4.29

6. Nëse $a < 0$ dhe $D < 0$, parabola nuk e pret fare boshtin Ox . Meqenëse $a < 0$, parabola ka minimum, prandaj i tërë grafiku shtrihet nën boshtin Ox , d.m.th.

$$ax^2 + bx + c \leq 0 \iff x \in \mathbf{R} = (-\infty, \infty),$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \iff x \in \emptyset.$$

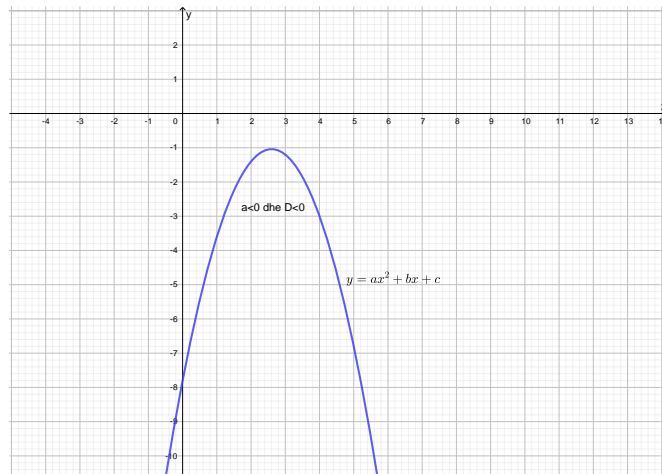


Fig. 4.30

Tri rastet e fundit mund të kthehen në ndonjërin prej rasteve 1 – 3 duke e shumëzuar me -1 jobarazimin përkatës me çrast merret $-a > 0$.

Shembulli 4.23. Të caktojme shenjën e këtyre trinomeve

$$\begin{aligned} (a) \quad & 3x^2 - 11x - 4, & (d) \quad & -5x^2 - x + 4, \\ (b) \quad & 2x^2 - 7x + 6, & (e) \quad & 9x^2 + 12x + 4, \\ (c) \quad & -4x^2 - 6x + 4, & (f) \quad & -x^2 - 6x - 8. \end{aligned}$$

Zgjidhje. (a) Vërejmë se $a = 3 > 0$ dhe $D = 169 > 0$ prandaj jemi në rastin e parë. Njehsojmë $x_1 = -\frac{1}{3}$ dhe $x_2 = 4$. Prandaj

$$\begin{aligned} 3x^2 - 11x - 4 \geq 0 &\iff x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup [4, \infty), \\ 3x^2 - 11x - 4 \leq 0 &\iff x \in \left[-\frac{1}{3}, 4\right]. \end{aligned}$$

(c) Këtu $a = -4 < 0$ dhe $D = 100 > 0$, kurse $x_1 = -2$, ndërsa $x_2 = \frac{1}{2}$. Ngjashëm si më lartë, kemi

$$\begin{aligned} -4x^2 - 6x + 4 \leq 0 &\iff x \in (-\infty, -2] \cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right), \\ -4x^2 - 6x + 4 \geq 0 &\iff x \in \left[-2, \frac{1}{2}\right]. \end{aligned}$$

Rastet e mbetura shqyrtohen në mënyrë analoge.

Shembulli 4.25. Të zgjidhen jobarazimet

$$\begin{aligned} (a) \quad & 4x^2 > 4x - 1, & (b) \quad & (3x - 2)^2 + (x - 2)^2 < 2, \\ (c) \quad & \frac{4x - x^2}{x^2 - x + 1} \geq 0, & (d) \quad & \frac{x^2 - 3x + 4}{1 - x^2} \geq 0, \\ (e) \quad & (x^2 - 4x - 5)(x^2 + 2x - 3) < 0, & (f) \quad & (x^2 - 6x - 7)(x^2 + 2x - 8) > 0, \\ (g) \quad & \frac{-x^2 + 2x - 5}{2x^2 - x - 1} \leq -1 & (h) \quad & \frac{x^2 + 2x - 63}{x^2 - 8x + 7} \geq 7. \end{aligned}$$

Zgjidhje. (a) Jobarazimi i dhënë është ekuivalent me jobarazimin $4x^2 - 4x + 1 > 0$. Nga se $a > 0$, $D = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0$, përfundojmë se $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$, që d.m.th. parabola $y = 4x^2 - 4x + 1$ e takon boshtin Ox në pikën $x = \frac{1}{2}$ dhe i tërë grafiku ndodhet mbi boshtin Ox .

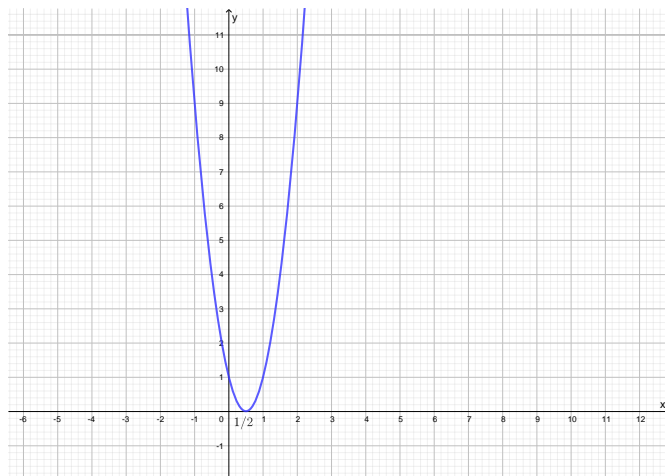


Fig. 4.31

Prandaj $y = 4x^2 - 4x + 1$ është pozitiv për çdo $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\} = (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$. Pra bashkësia e zgjidhjeve është $\mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\} = (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$.

Te i njëjti rezultat mund të vijmë edhe me mënyrat tjera të zgjidhjeve të jobarazimeve. P.sh. po të vërejmë me kujdes trinomin $4x^2 - 4x + 1$ konstatojmë se ai është katrori i binomit $2x - 1$. D.m.th. $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$. Ky i fundit shihet qartë se është pozitiv për çdo $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

(b) Jobarazimi i dhënë është ekuivalent me jobarazimin $5x^2 - 8x + 3 < 0$. Tani $a = 5 > 0$, $D = (-8)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 3 = 4 > 0$. Tani njehsojmë $x_{1,2} = \frac{8 \pm 2}{10}$, prej nga $x_1 = \frac{3}{5}$ dhe $x_2 = 1$. D.m.th. bashkësia e zgjidhjeve është $B = \left(\frac{3}{5}, 1 \right)$.

(c) Po të shqyrtojmë shenjën e trinomit në emërues $x^2 - x + 1$ do të kemi se ai është pozitiv për çdo $x \in \mathbf{R}$, sepse $a = 1 > 0$ dhe $D = -3 < 0$ (shih rastin 3.). Prandaj jobarazimi $\frac{4x - x^2}{x^2 - x + 1} \geq 0$ është ekuivalent me jobarazimin $4x - x^2 \geq 0$, që d.m.th. se në këtë rast guxojmë të shumëzojmë me emëruesin e thyesës. Bashkësia e zgjidhjeve e jobarazimit $4x - x^2 \geq 0$ është $B = [0, 4]$, sepse $a = -1 < 0$, $D = 16 > 0$ dhe $x_1 = 0, x_2 = 4$.

(d) Meqenëse $x^2 - 3x + 4 > 0$ për çdo $x \in \mathbf{R}$ (pse?), prandaj jobarazimi $\frac{x^2 - 3x + 4}{1 - x^2} \geq 0$ është ekuivalent me jobarazimin $1 - x^2 > 0$. Bashkësia e zgjidhjeve e jobarazimit të fundit është $x \in (-1, 1)$. D.m.th. bashkësia e zgjidhjeve është e barabartë me $(-1, 1) = B$.

(e) Jobarazimi $(x^2 - 4x - 5)(x^2 + 2x - 3) < 0$ është ekuivalent me sistemin e jobarazimeve

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - 4x - 5 > 0 \\ x^2 + 2x - 3 < 0 \end{array} \right\} \quad \text{ose} \quad \left. \begin{array}{l} x^2 - 4x - 5 < 0 \\ x^2 + 2x - 3 > 0 \end{array} \right\}$$

Tani,

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - 4x - 5 > 0 \\ x^2 + 2x - 3 < 0 \end{array} \right\} \sim \left. \begin{array}{l} x \in (-\infty, -1) \cup (5, \infty) \\ x \in (-3, 1) \end{array} \right\} \sim x \in (-3, -1) = B.$$

(f) Jobarazimi $(x^2 - 6x - 7)(x^2 + 2x - 8) > 0$ është ekuivalent me sistemin e jobarazimeve

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - 6x - 7 > 0 \\ x^2 + 2x - 8 > 0 \end{array} \right\} \quad \text{ose} \quad \left. \begin{array}{l} x^2 - 6x - 7 < 0 \\ x^2 + 2x - 8 < 0 \end{array} \right\}$$

Tani, vlen

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - 6x - 7 > 0 \\ x^2 + 2x - 8 > 0 \end{array} \right\} \sim \left. \begin{array}{l} x \in (-\infty, -1) \cup (7, \infty) \\ x \in (-\infty, -4) \cup (2, \infty) \end{array} \right\} \sim \\ \sim x \in (-\infty, -4) \cup (7, \infty) = B_1,$$

si dhe

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - 6x - 7 < 0 \\ x^2 + 2x - 8 < 0 \end{array} \right\} \sim \left. \begin{array}{l} x \in (-1, 7) \\ x \in (-4, 2) \end{array} \right\} \sim x \in (-1, 2) = B_2.$$

Kurse bashkësia e zgjidhjeve e jobarazimit (f) është $B = B_1 \cup B_2 = (-\infty, -4) \cup (-1, 2) \cup (7, \infty)$.

(g) Te këto lloje të jobarazimeve duhet t'i bartim të gjitha gjymtyrët në një të njëjtë të jobarazimit.

$$\frac{-x^2 + 2x - 5}{2x^2 - x - 1} \leq -1 \sim \frac{-x^2 + 2x - 5}{2x^2 - x - 1} + 1 \leq 0 \sim \frac{2x^2 + x - 6}{2x^2 - x - 1} \leq 0.$$

Tani, si në shembullin e mëparshëm, marrim se bashkësia e zgjidhjeve është $B = [-3, -\frac{1}{2}) \cup (1, 2]$.

(h) Në mënyrë analoge si në rastin (g) marrim se bashkësia e zgjidhjeve është $B = (1, \frac{8}{3})$.

Shembulli 4.26. Të zgjidhim jobarazimin $\frac{3x^2 + 3x - 4}{1 - x + x^2} > 2$.

Zgjidhje. Vërejmë se emëruesi i thyesës është trinom $x^2 - x + 1$ i cili është pozitiv për çdo $x \in \mathbf{R}$, sepse $a = 1 > 0$ dhe $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$, prandaj mund të shumëzojmë këtë jobarazim me këtë trinom dhe me atë rast nuk ndërron shenja e jobarazimit. Pra jobarazimi i dhënë është ekuivalent me jobarazimin

$$3x^2 + 3x - 4 > 2 - 2x + 2x^2 \sim x^2 + 5x - 6 > 0 \sim x \in (-\infty, -6) \cup (1, \infty).$$

Ky shembull tregon se kur jemi të sigurt në shenjën e emëruesit mund të shumëzojmë jobarazimin me atë trinom.

Shembulli 4.27. Jobarazimin $\frac{4x+1}{-x^2+3x-4} \leq \frac{1}{2}$ guxojmë ta shumëzojmë me dyfishin e trinomit në emërues $-x^2+3x-4$, spese $a = -1 < 0$ dhe $D = -7 < 0$, d.m.th. $-x^2+3x-4 < 0$ për çdo $x \in \mathbf{R}$ dhe me atë rast ndërron shenja e jobarazimit (pse?). Pra

$$\frac{4x+1}{-x^2+3x-4} \leq \frac{1}{2} \sim 8x+2 \geq -x^2+3x-4 \sim x^2+5x+6 \leq 0 \sim x \in [-3, -2] = B.$$

Shembulli 4.28. Është dhënë ekuacioni $2x^2 + (a-9)x + a^2 + 3a + 4 = 0$. Caktoni parametrin real a në mënyrë që ekuacioni i dhënë të ketë zgjidhje reale.

Zgjidhje. Ekuacionet e shkallës së dytë kanë zgjidhje reale atëherë dhe vetëm atëherë, nëse $D \geq 0$. D.m.th. $D = (a-9)^2 - 4(a^2+3a+4) \geq 0$ i cili jobarazim është ekuivalent me jobarazimin $-7(a^2-6a+7) \geq 0$, ndësa ky i fundit është ekuivalent me jobarazimin $a^2-6a+7 \leq 0$, kurse bashkësia e zgjidhjeve e këtij të fundit është boshe (\emptyset) (pse?).

Shembulli 4.29. Tregoni se ekuacioni $(m^2+5)x^2 + 2(m+3)x + 3 = 0$ nuk ka zgjidhje reale për asnjë vlerë $m \in \mathbf{R}$.

Zgjidhje. Duhet treguar se dallori $D = b^2 - 4ac$ është negativ për çdo $m \in \mathbf{R}$. Vlen

$$D = b^2 - 4ac = 4(m+3)^2 - 12(m^2+5) = 4(-m^2+6m-3).$$

Trinomi i fundit është negativ për çdo $m \in \mathbf{R}$, sepse $a < 0$ dhe $D < 0$, prandaj ekuacioni nuk ka zgjidhje reale për asnjë vlerë $m \in \mathbf{R}$.

Shembulli 4.30. Caktoni parametrin real m në mënyrë që funksioni $y = (m^2-1)x^2 + 2(m-1)x + 2$ të jetë pozitiv për çdo $x \in \mathbf{R}$.

Zgjidhje. Duhet të vlejë njëkohësisht $a = m^2 - 1 > 0$ dhe $D = 4(m-1)^2 - 8(m^2-1) < 0$. Kështu, kemi sistemin e inekuacioneve

$$\left. \begin{array}{l} m^2 - 1 > 0 \\ 4(m-1)^2 - 8(m^2-1) < 0 \end{array} \right\} \sim \left. \begin{array}{l} m^2 - 1 > 0 \\ -m^2 - 2m + 3 < 0 \end{array} \right\} \sim \left. \begin{array}{l} m \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \\ m \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty) \end{array} \right\} \sim m \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty).$$

D.m.th. $B = (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$.

Shembulli 4.31. Për cilat vlera të parametrin real a trinomi $x^2 - 2ax - 6a + 12$ është më i madh se -4 për çdo $x \in \mathbf{R}$?

Zgjidhje. Caktojmë parametrin real a në mënyrë që bashkësia e zgjidhjeve e inekuacionit $x^2 - 2ax - 6a + 12 > -4 \sim x^2 - 2ax - 6a + 16 > 0$ të jetë e tërë bashkësia e numrave real \mathbf{R} . Nga se $a = 1 > 0$, atëherë duhet që

$D = 4a^2 - 4(-6a + 16) < 0$. Jobarazimi i fundit është ekuivalent me jobarazimin $a^2 + 6a - 16 < 0$, bashkësia e zgjidhjeve e të cilit është intervali $B = (-8, 2)$.

Shembulli 4.32. Caktoni koeficientët a, b, c në mënyrë që bashkësia e zgjidhjeve e jobarazimit $ax^2 + bx + c > 0$ të jetë intervali $(-\infty, 2) \cup (3, \infty) = B$.

Zgjidhje. Duke patur parasysh shenjën e trinomit (rastin 1) duhet që $a > 0$, $D > 0$ dhe $x_1 = 2, x_2 = 3$. Duke zbatuar rregullat e Viet-it marrim se $b = -5a, c = 6a$, ndërsa $a > 0$ numër real i çfarëdoshëm.

Shembulli 4.33. Për cilat vlera të parametrin real m bashkësia e zgjidhjeve e jobarazimit

$$-6 \leq \frac{2x^2 + mx - 4}{x^2 - x + 1} < 4$$

është e tërë bashkësia e numrave realë \mathbf{R} ?

Zgjidhje. Meqenëse trinomi $x^2 - x + 1$ është pozitiv për çdo $x \in \mathbf{R}$ (pse?), atëherë shumëzojmë jobarazimin e dhënë me te dhe marrim

$$\begin{aligned} -6(x^2 - x + 1) \leq 2x^2 + mx - 4 < 4(x^2 - x + 1) &\sim -8x^2 + (6 - m)x - 2 \leq 0 \\ &\wedge 2x^2 - (4 + m)x + 8 > 0. \end{aligned}$$

Bashkësitë e zgjidhjeve të dy jobarazimeve të fundit duhet të jetë e tërë bashkësia e numrave realë, prandaj duhet që

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} (6 - m)^2 - 64 \leq 0 \\ (4 + m)^2 - 64 < 0 \end{aligned} \right\} &\sim \left. \begin{aligned} (6 - m)^2 \leq 64 \\ (4 + m)^2 < 64 \end{aligned} \right\} &\sim \left. \begin{aligned} |6 - m| \leq 8 \\ |4 + m| < 8 \end{aligned} \right\} \sim \\ &\sim \left. \begin{aligned} -8 \leq 6 - m \leq 8 \\ -8 < 4 + m < 8 \end{aligned} \right\} &\sim \left. \begin{aligned} -14 \leq -m \leq 2 \\ -12 < m < 4 \end{aligned} \right\} & m \in [-2, 4). \end{aligned}$$

Shembulli 4.34. Caktoni fushën e përkufizimit të funksionit

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 4x + 3}} + 3.$$

Zgjidhje. Me fushë të përkufizimit të një funksioni kuptojmë bashkësinë e vlerave reale të ndryshores për të cilat ekziston vlera e funksionit. Meqenëse rrënja katrore e numrave negativë nuk është numër real, atëherë shprehja nën rrënjë katrore duhet të jetë jonegative (e njëjta vlen edhe për çdo rrënjë me tregues çift). Prandaj

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 4x + 3} + 3 \geq 0.$$

Bashkësia e zgjidhjeve e jobarazimit të fundit është $B = (-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$, që paraqet fushën e përkufizimit të funksionit $f(x)$.

Shembulli 4.35. Të zgjidhen jobarazimet

$$\begin{aligned} (a) \quad & |x^2 - 5x| \geq 6, & (b) \quad & |x^2 - 4x| \leq 4, \\ (c) \quad & |x^2 - 2x - 3| < x + 1, & (d) \quad & |x^2 - x - 2| > x + 1, \\ (e) \quad & |x^2 - 4x - 5| < x + 1, & (f) \quad & |x^2 - 2x - 3| < 3x - 3. \end{aligned}$$

Zgjidhje. Te të gjitha këto jobarazime së pari duhet të lirohemi nga vlerat absolute duke shfrytëzuar përkufizimin ose vetitë e vlerës absolute. P.sh. është mirë të mbahet mend se për $a \geq 0$ vlen

$$\begin{aligned} |x| \leq a &\iff -a \leq x \leq a \iff x \in [-a, a], \\ |x| \geq a &\iff -\infty < x \leq -a \vee a \leq x < \infty \iff x \in (\infty, -a] \cup [a, \infty). \\ x^2 \leq a^2 &\iff |x| \leq |a|, \quad x^2 \geq a^2 \iff |x| \geq |a|. \end{aligned}$$

(a) Vlen

$$\begin{aligned} |x^2 - 5x| &= \begin{cases} x^2 - 5x, & \text{nëse } x^2 - 5x \geq 0 \\ -(x^2 - 5x), & \text{nëse } x^2 - 5x \leq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} x^2 - 5x, & \text{nëse } x \in (-\infty, 0] \cup [5, \infty) \\ -(x^2 - 5x), & \text{nëse } x \in [0, 5]. \end{cases} \end{aligned}$$

Dallojmë dy raste:

1. Për $x \in (-\infty, 0] \cup [5, \infty)$ jobarazimi i dhënë është ekuivalent me jobarazimin $x^2 - 5x \geq 6$, bashkësia e zgjidhjeve e të cilit është $(-\infty, -1] \cup [6, \infty)$. Por $x \in (-\infty, 0] \cup [5, \infty)$, prandaj prerja e tyre është bashkësia $(-\infty, -1] \cup [6, \infty) = B_1$.

2. Për $x \in [0, 5]$ jobarazimi i dhënë është ekuivalent me jobarazimin $-x^2 + 5x \leq 6$, bashkësia e zgjidhjeve e të cilit është $(-\infty, 2] \cup [3, \infty)$. Por $x \in [0, 5]$, prandaj prerja e tyre është bashkësia $[0, 2] \cup [3, 5] = B_2$. Kurse bashkësia e zgjidhjeve e jobarazimit të dhënë është $B = B_1 \cup B_2 = (-\infty, -1] \cup [6, \infty) \cup [0, 2] \cup [3, 5] = (-\infty, -1] \cup [0, 2] \cup [3, 5] \cup [6, \infty)$.

(b) Jobarazimi $|x^2 - 4x| \leq 4$ është ekuivalent me sistemin e jobarazimeve $-4 \leq x^2 - 4x \leq 4$. Bashkësia e zgjidhjeve e jobarazimit $-4 \leq x^2 - 4x$ është e tërë bashkësia e numrave real $\mathbf{R} = B_1$ (pse?), ndërsa bashkësia e zgjidhjeve e jobarazimit $x^2 - 4x \leq 4$ është $B_2 = (2(1 - \sqrt{2}), 2(1 + \sqrt{2}))$, e rrjedhimisht bashkësia e zgjidhjeve e jobarazimit të dhënë është $B = B_1 \cap B_2 = B_2$.

(c) Ngjashëm si në rastin (a) kemi

$$\begin{aligned} |x^2 - 2x - 3| &= \begin{cases} x^2 - 2x - 3, & \text{nëse } x^2 - 2x - 3 \geq 0 \\ -(x^2 - 2x - 3), & \text{nëse } x^2 - 2x - 3 \leq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} x^2 - 2x - 3, & \text{nëse } x \in (-\infty, -1] \cup [3, \infty) \\ -(x^2 - 2x - 3), & \text{nëse } x \in [-1, 3]. \end{cases} \end{aligned}$$

1. Për $x \in (-\infty, -1] \cup [3, \infty)$ jobarazimi i dhënë është ekuivalent me jobarazimin $x^2 - 2x - 3 < x + 1$, respektivisht $x^2 - 3x - 4 < 0$. Bashkësia e

zgjidhjeve e këtij të fundit është $(-1, 4)$. Por $x \in (-\infty, -1] \cup [3, \infty)$, prandaj $B_1 = ((-\infty, -1] \cup [3, \infty)) \cap (-1, 4) = [3, 4)$.

2. Për $x \in [-1, 3]$ jobarazimi i dhënë është ekuivalent me jobarazimin $-x^2 + 2x + 3 < x + 1$, respektivisht $-x^2 + x + 2 < 0$, bashkësia e zgjidhjeve e të cilit është $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$. Por $x \in [-1, 3]$, prandaj $B_2 = ((-\infty, -1) \cup (2, \infty)) \cap [-1, 3] = (2, 3]$, ndërsa $B = B_1 \cup B_2 = (2, 4)$.

Në mënyrë analoge zgjidhen jobarazimet e mbetura, prandaj po japim vetëm rezultatet.

$$(d) \quad x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (3, \infty) = B,$$

$$(e) \quad x \in (4, 6) = B,$$

$$(f) \quad x \in (2, 5) = B.$$

Shembulli 4.36. Të zgjidhen jobarazimet

$$(a) \quad \frac{x+5}{2x-4} < \frac{x+1}{x-5} < \frac{2}{x+6} \quad (b) \quad \frac{2}{x+6} > \frac{x}{x-4} < \frac{x+2}{2x-4}.$$

Zgjidhje. (a) Këtu është fjala për sistem të jobarazimeve. Prandaj jobarazimi i dhënë është ekuivalent me sistemin e jobarazimeve

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x+5}{2x-4} < \frac{x+1}{x-5} \\ \frac{x+1}{x-5} < \frac{2}{x+6} \end{array} \right\} \sim \left. \begin{array}{l} \frac{x+5}{2x-4} - \frac{x+1}{x-5} < 0 \\ \frac{x+1}{x-5} - \frac{2}{x+6} < 0 \end{array} \right\} \sim \left. \begin{array}{l} \frac{-x^2+2x-21}{2(x-2)(x-5)} < 0 \\ \frac{x^2+5x+16}{(x-5)(x+6)} < 0 \end{array} \right\}.$$

Meqenëse trinomi $-x^2 + 2x - 21$ është negativ për çdo $x \in \mathbf{R}$ (pse?), prandaj jobarazimi $\frac{-x^2+2x-21}{2(x-2)(x-5)} < 0$ është ekuivalent me jobarazimin $(x-2)(x-5) > 0$. Bashkësia e zgjidhjeve e këtij të fundit është $B_1 = (-\infty, 2) \cup (5, \infty)$.

Ngjashëm, meqë $x^2 + 5x + 16 > 0$ për çdo $x \in \mathbf{R}$ (pse?), përfundojmë se $(x-5)(x+6) < 0$, bashkësia e zgjidhjeve e të cilit është intervali $B_2 = (-6, 5)$. Prerja B e bashkësive B_1 dhe B_2 na jep bashkësinë e zgjidhjeve e të sistemit të jobarazimeve të dhëna në fillim. Pra $B = (-6, 2)$.

Në mënyrë të ngjashme zgjidhet sistemi i jobarazimeve (b), bashkësia e zgjidhjeve e të cilit është $B = (-6, -2)$.

Shembulli 4.37. Është dhënë ekuacioni $4x^2 = (3-m)(4x-3)$, m është parametër real. Caktoni parametrin m në mënyrë që zgjidhjet e ekuacionit të jenë reale të ndryshme dhe të plotësojnë jobarazimin $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \leq \frac{14}{3}$.

Zgjidhje. Ekuacioni i dhënë është ekuivalent me ekuacionin $4x^2 - 4(3-m)x + 3(3-m) = 0$. Është e qartë se $m \neq 3$, sepse në atë rast do të kishim

$x_1 = x_2 = 0$. Zbatojmë formulat e Viet-it $x_1 + x_2 = 3 - m$ dhe $x_1 \cdot x_2 = \frac{3}{4}(3 - m)$ dhe do të marrim

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} &= \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2}{x_1 x_2} - 2 \\ &= \frac{(3 - m)^2}{\frac{3}{4}(3 - m)} = \frac{4(3 - m)}{3} \leq \frac{14}{3}. \end{aligned}$$

Nga kushtet e detyrës kemi sistemin

$$\left. \begin{array}{l} 16(3 - m)^2 - 48(3 - m) > 0 \\ \frac{4(3 - m)}{3} \leq \frac{14}{3} \end{array} \right\} \sim \left. \begin{array}{l} m(m - 3) > 0 \\ 12 - 4m \leq 14 \end{array} \right\} \sim \left. \begin{array}{l} m \in (-\infty, 0) \cup (3, \infty) \\ m \in \left[-\frac{1}{2}, \infty\right) \end{array} \right\}$$

$$\sim m \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right) \cup (3, \infty) = B.$$

Kapitulli V

Ekuacionet dhe inekuacionet irracionale

5.1. Ekuacionet irracionale

Përkufizim 5.1.1. Çdo ekuacion tek i cili e panjohura ndodhet nën ndonjë rrënjë quhet ekuacion irracional. Zgjidhje e një ekuacioni irracional quhet çdo vlerë $\lambda \in \mathbf{R}$ për të cilën ekuacioni shndërrohet në formulë të saktë.

Për zgjidhjen e tyre nuk ka formulë, por duhet ditur mirë vetitë e rrënjëve dhe veçanërisht faktin se gjatë ngritjes në fuqi me eksponent numër natyral numri i zgjidhjeve i ekuacionit të fituar rritet, të cilat nuk d.m.th. të jenë zgjidhje të ekuacionit të dhënë në fillim. P.sh. ekuacioni $x = 1$ ka vetëm njëshin zgjidhje, ndërsa pas ngritjes në katror, anë për anë, marrim ekuacionin $x^2 = 1$ i cili ka dy zgjidhje 1 dhe -1 , por kjo e dyta nuk është zgjidhje e ekuacionit të dhënë në fillim. Pra, lejohet ngritja në fuqi arbitrare dhe zgjidhjet e fituara duhet provuar në ekuacionin fillestar. Ka edhe metoda tjera, të cilat shfrytëzojnë ekuivalenca të sistemeve të përbëra prej ekuacionit dhe inekuacioneve. P.sh. ekuacioni $\sqrt[n]{p(x)} = q(x)$ është ekuivalent me sistemin

$$\left. \begin{array}{l} p(x) \geq 0 \\ p(x) = q^{2n}(x) \\ q(x) \geq 0 \end{array} \right\} \quad (1)$$

Në rastin kur treguesi i rrënjës është numër tek, atëherë nuk kemi ndonjë kufizim sa i përket ngritjes në fuqi.

Shembulli 5.1. Të zgjidhim ekuacionin $\sqrt{25 - x^2} = 7 - x$ duke shfrytëzuar formulat në relacionin (1).

Zgjidhje. Vlen

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} \sqrt{25 - x^2} = 7 - x \\ 25 - x^2 \geq 0 \end{array} \right\} \sim \left. \begin{array}{l} 25 - x^2 = (7 - x)^2 \\ 7 - x \geq 0 \end{array} \right\} \sim \\ & \sim \left. \begin{array}{l} x \in [-5, 5] \\ x^2 - 7x + 12 = 0 \\ x \in (-\infty, 7] \end{array} \right\} \sim \left. \begin{array}{l} x \in [-5, 5] \\ x_1 = 3, x_2 = 4 \end{array} \right\} \sim B = \{3, 4\}. \end{aligned}$$

Në këtë rast nuk ka nevojë të provohen se 3 apo 4 janë apo jo zgjidhje të ekuacionit, sepse është shfrytëzuar relacioni (1) i cili garanton që gjatë ngritjes në katror nuk kemi marrë zgjidhje të reja.

Shembulli 5.2. Ta zgjidhim ekuacionin $1 + \sqrt{x^2 - 9} = x$, por duke e shfrytëzuar ngritjen e lirë në fuqi dhe në fund duke i provuar se cilat janë në fakt zgjidhjet e ekuacionit.

Zgjidhje. Ekuacioni $1 + \sqrt{x^2 - 9} = x$ është ekuivalent me ekuacionin $\sqrt{x^2 - 9} = x - 1$. Kujdes, ky i fundit nuk është e thënë të jetë më ekuivalent me ekuacionin $x^2 - 9 = (x - 1)^2$, zgjidhje e të cilit është $x = 5$. Është e qartë se po të zëvendësojmë x -in me 5 ekuacioni do të shndërrohet në formulë të saktë. Pra, bashkësia e zgjidhjeve e ekuacionit $1 + \sqrt{x^2 - 9} = x$ është $B = \{5\}$.

Shembulli 5.3. Të zgjidhet ekuacioni $\sqrt{2x^2 + 7} = x^2 - 4$.

Zgjidhje. Pas ngritjes në katror marrim ekuacionin bikuadratik $2x^2 + 7 = (x^2 - 4)^2$. Pas zëvendësimit $x^2 = t$ dhe rregullimit marrim ekuacionin $t^2 - 10t + 9 = 0$, zgjidhjet e të cilit sipas t janë $t_1 = 1, t_2 = 9$. D.m.th. $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 3, x_4 = -3$. Pas zëvendësimit në ekuacion, përfundojmë se $x_1 = 1$ dhe $x_2 = -1$ nuk janë zgjidhje të ekuacionit, ndërsa $x_3 = 3$ dhe $x_4 = -3$ janë. Pra, $B = \{-3, 3\}$.

Shembulli 5.4. Të zgjidhim ekuacionin $\sqrt{4 + x\sqrt{x^2 - 7}} = 4$.

Zgjidhje. Pas ngritjes në katror dhe rregullimit marrim ekuacionin $x\sqrt{x^2 - 7} = 12$. Edhe njëherë i ngrisim në katror dhe marrim ekuacionin $x^2(x^2 - 7) = 144$. Zëvendësojmë $x^2 = t \geq 0$ dhe marrim $t_1 = -9, t_2 = 16$. Meqë $t \geq 0$, përfundojmë se $t_1 = -9$ nuk mund të konsiderohet për zgjidhje, ndërsa për $t_2 = 16$ marrim se $x_1 = -4, x_2 = 4$. Pas zëvendësimit në ekuacionin e fillimit, marrim se vetëm $x_2 = 4$ është në fakt zgjidhje e ekuacionit. Pra bashkësia e zgjidhjeve e ekuacionit është $B = \{4\}$.

Shembulli 5.5. Të zgjidhet ekuacioni $\sqrt{7x + 1} - \sqrt{3x - 18} = 5$.

Zgjidhje. Ekuacioni $\sqrt{7x + 1} - \sqrt{3x - 18} = 5$ është ekuivalent me ekuacionin $\sqrt{7x + 1} = 5 + \sqrt{3x - 18}$. Pas ngritjes në katror, anë për anë, do të marrim ekuacionin irracional $2x - 3 = 5\sqrt{3x - 18}$. Këtë të fundit e ngrisim prap në katror dhe do të marrim ekuacionin $4x^2 - 87x + 459 = 0$ zgjidhjet e të cilit janë $x_1 = 9$ dhe $x_2 = \frac{51}{4}$. Pas zëvendësimit të këtyre zgjidhjeve në ekuacionin fillestar, konstatojmë se të dy këto janë zgjidhjet e kërkuara.

Shembulli 5.6. Të zgjidhet ekuacioni $\sqrt{2x + 14} - \sqrt{x - 7} = \sqrt{x + 5}$.

Zgjidhje. Ekuacioni i dhënë është ekuivalent me ekuacionin $\sqrt{2x + 14} = \sqrt{x - 7} + \sqrt{x + 5}$. Pas dy ngritjeve në katror, marrim ekuacionin kuadratik $x^2 - 2x - 99 = 0$. Zgjidhjet e këtij ekuacioni janë $x_1 = 11$ dhe $x_2 = -9$. Pas zëvendësimit në ekuacion, konkludojmë se vetëm $x_1 = 11$ është zgjidhje e ekuacionit.

Ndonjëherë duhet të zbatojmë ndonjë zëvendësim, në mënyrë që ekuacioni i ri me të panjohurën e re të jetë më i thjeshtë se ai i fillimit.

Shembulli 5.7. Të zgjidhen ekuacionet

$$\begin{array}{ll}
 (a) \quad \sqrt{x^2 - 9} + x^2 - 9 = 20, & (b) \quad x^2 - 2x + \sqrt{x^2 - 2x + 6} = 6, \\
 (c) \quad \sqrt{3x^2 + 5x + 8} - \sqrt{3x^2 + 5x + 1} = 1, & (d) \quad \sqrt{2x^2 + x} + \sqrt{2x^2 + x - 1} = \sqrt{13}, \\
 (e) \quad \sqrt{3x^2 - 7x - 2} - 2\sqrt{3x^2 - 7x - 5} = 2, & (f) \quad \sqrt{y^2 + 4y + 8} + \sqrt{y^2 + 4y + 4} = \\
 & \quad = \sqrt{2y^2 + 8y + 12}, \\
 (g) \quad \sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = 1 - \frac{1}{x}, \quad x \neq 0 & (h) \quad \frac{x\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x^2} - 1} - \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt[3]{x} + 1} = 4.
 \end{array}$$

Zgjidhje. (a) Zëvendsojmë $x^2 - 9 = t^2$ dhe marrim ekuacionin $|t| + t^2 = 20$. Tani, si zakonisht dallojmë rastet:

1. Për $t \geq 0$, $|t| = t$, ndërsa ekuacioni transformohet në ekuacionin $t + t^2 = 20$ zgjidhjet e të cilit janë $t_1 = -5$ dhe $t_2 = 4$. Meqenëse $t \geq 0$, atëherë vetëm $t_2 = 4$ është zgjidhje e ekuacionit $|t| + t^2 = 20$ në intervalin $[0, \infty)$.

2. Ngjashëm, për $t \leq 0$, $|t| = -t$, ndërsa ekuacioni transformohet në ekuacionin $-t + t^2 = 20$ zgjidhjet e të cilit janë $t_1 = -4$ dhe $t_2 = 5$. Meqenëse $t \leq 0$, atëherë vetëm $t_1 = -4$ është zgjidhje e ekuacionit $|t| + t^2 = 20$ në intervalin $(-\infty, 0]$. D.m.th. bashkësia e zgjidhjeve e ekuacionit $|t| + t^2 = 20$ është $B = \{-4, 4\}$.

Vërejtje 5.1. Për shkak të simetrisë, do të mjaftonte që zgjidhjet të kërkohen në intervalin $[0, \infty)$, e pastaj të merren edhe ato simetrike në intervalin $(-\infty, 0]$.

Nuk është vështirë tani për të përfunduar se bashkësia e zgjidhjeve e ekuacionit në rastin (a) është $B = \{-5, 5\}$.

(b) Zëvendësojmë $x^2 - 2x + 6 = t^2$. Ekuacioni merr formën $t^2 - 6 + |t| = 6$. Ngjashëm si në rastin e parë marrim se bashkësia e zgjidhjeve e ekuacionit është $B = \{-1, 3\}$.

(c) Edhe këtu, ngjashëm si në rastin (b) zëvendësojmë $\sqrt{3x^2 + 5x + 8} = t (\geq 0)$. Ekuacioni $\sqrt{3x^2 + 5x + 8} - \sqrt{3x^2 + 5x + 1} = 1$ është ekuivalent me ekuacionin $t - 1 = \sqrt{t^2 - 7}$. Këtu është e qartë se $t \geq \sqrt{7}$. Pas ngritjes në katror dhe zgjidhjes së ekuacionit të fituar sipas t marrim se $t = 4$. Kthejmë këtë vlerë të t në zëvendësim dhe marrim se bashkësia e zgjidhjeve e ekuacionit të dhënë është $\left\{-\frac{8}{3}, 1\right\}$.

(d) Merret zëvendësimi $\sqrt{2x^2 + x - 1} = t$. Ecuria e punës është e njëjtë si në rastin (c). Bashkësia e zgjidhjeve e ekuacionit është $B = \left\{-\frac{5}{2}, 2\right\}$.

(e) Merret zëvendësimi $3x^2 - 7x - 5 = t^2$. Ecuria e punës është e njëjtë si në rastet (c) dhe (d).

(f) Cilëndo nga rrënjët mund ta zëvendësoni me t me ç'rast në ekuacionin e fituar do të figurojnë dy rrënjë. Bashkësia e zgjidhjeve është $B = \{-2\}$.

(g) Së pari duhet që ta zgjidhim sistemin e jobarazimeve $x - \frac{1}{x} \geq 0$ dhe $1 - \frac{1}{x} \geq 0$. Bashkësia e zgjidhjeve e këtij sistemi është $D = (-1, 0) \cup [1, \infty)$. Për $x \in D$ mund të shkruajmë

$$\sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} - \sqrt{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2} = 0.$$

Ekuacioni i fundit është ekuivalent me ekuacionin

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{x-1}{x}} \left(\sqrt{x+1} - 1 - \sqrt{\frac{x-1}{x}} \right) &= 0 \\ \sqrt{\frac{x-1}{x}} &= 0 \quad \vee \quad \sqrt{x+1} - \sqrt{\frac{x-1}{x}} = 1. \end{aligned}$$

Zgjidhje e ekuacionit të parë është $x_1 = 1$, ndërsa ekuacioni i dytë është ekuivalent me ekuacionin

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} - \sqrt{\frac{x-1}{x}} = 1 &\iff x+1 - 2\sqrt{\frac{x^2-1}{x}} + \frac{x-1}{x} = 1 \\ x - \frac{1}{x} - 2\sqrt{x - \frac{1}{x}} + 1 = 0 &\iff \left(\sqrt{x - \frac{1}{x}} - 1 \right)^2 = 0 \\ x - \frac{1}{x} = 1 &\iff x^2 - x - 1 = 0 \\ x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Pasi t'i provojmë këto vlera, përfundojmë se vetëm $x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ është zgjidhje e ekuacionit. D.m.th. $B = \left\{ 1, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\}$.

(h) Zëvendësojmë $x = t^3$ dhe për bashkësi të zgjidhjeve do të marrim $B = \{8\}$.

Shembulli 5.8. Të zgjidhen ekuacionet

$$(a) \quad 2x^2 + 3x - 5\sqrt{2x^2 + 3x + 9} = -3 \quad (b) \quad \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^5 \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^3 = 1.$$

Zgjidhje. (a) Vlen

$$2x^2 + 3x - 5\sqrt{2x^2 + 3x + 9} = -3 \iff 2x^2 + 3x + 3 = 5\sqrt{2x^2 + 3x + 9}. \quad (1)$$

Tani zëvendësojmë $\sqrt{2x^2 + 3x + 9} = t \geq 0$, prej nga marrim se $2x^2 + 3x + 3 = t^2 - 6$. Ekuacioni (1) është ekuivalent me ekuacionin $t^2 - 5t - 6 = 0$, zgjidhjet e

të cilit janë $t_1 = 6, t_2 = -1$. Meqenëse $t \geq 0$, atëherë për zgjidhje merret vetëm $t_1 = 6$. Pasi të zëvendësojmë këtë vlerë të t marrim ekuacionin $2x^2 + 3x + 9 = 36$, zgjidhjet e të cilit janë $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{33}$.

(b) Ekuacioni i dhënë është ekuivalent me ekuacionin

$$\begin{aligned} (x + \sqrt{x^2 - 1})^2 (x + \sqrt{x^2 - 1})^3 (x - \sqrt{x^2 - 1})^3 &= 1 \\ (x + \sqrt{x^2 - 1})^2 &= 1 \iff x_{1,2} = \pm 1. \end{aligned}$$

Detyra në lidhje me ekuacionet irracionale

1. Të zgjidhen ekuacionet irracionale

$$\begin{array}{ll}
 (a) \sqrt{x^2 - 5x + 10} = 8 - 2x, & (b) 4 + \sqrt{3x^2 - 20x + 16} = x, \\
 (c) \sqrt{(y-2)(4y+1)} = 2(y+1), & (d) \sqrt{12 - x\sqrt{x^2 - 8}} = 3, \\
 (e) \sqrt{y+7} + \sqrt{y^2 - 27} = 2, & (f) \sqrt{x^2 - 6\sqrt{x^2 - 33}} = 5, \\
 (g) \sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x+2} = x, & (h) \sqrt{x^2\sqrt{x^2 - 1}} = -x, \\
 (i) \sqrt{9x^2 - \sqrt{36x^2 - 11}} = 3x - 1, & (j) \sqrt{1 - \sqrt{x^4 - x^2}} = x - 1, \\
 (k) \sqrt{2x+8} + \sqrt{x+5} = 7, & (l) \sqrt{10+x} - \sqrt{10-x} = \sqrt{2x-8}, \\
 (m) \sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} = \sqrt{x+24}, & (n) 3\sqrt{x-2} - 2\sqrt{x-5} = \sqrt{3x-2}, \\
 (o) \sqrt{8 - \sqrt{z+1} + \sqrt{2z^2 + z + 3}} = 2, & \\
 (p) \frac{1}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}} - \frac{1}{\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}} = 1. &
 \end{array}$$

Bashkësia e zgjidhjeve B është:

$$\begin{array}{llll}
 (a) \{3\}, & (e) \{-6\}, & (i) \{1\}, & (m) \{1\}, \\
 (b) \{6\}, & (f) \{-7, -\sqrt{33}, 7, \sqrt{33}\}, & (j) \left\{\frac{5}{4}\right\}, & (n) \{6\}, \\
 (c) \left\{-\frac{2}{5}\right\}, & (g) \{2\}, & (k) \{4\}, & (o) \{-37, 6\}, \\
 (d) \{3\}, & (h) \{-\sqrt{2}\}, & (l) \{6, 8\}, & (p) \{1\}.
 \end{array}$$

2. Duke përdorur metodën e zëvendësimit, të zgjidhen ekuacionet irracionale

$$\begin{array}{l}
 (a) \sqrt{5 + \sqrt[3]{x}} - \sqrt{5 - \sqrt[3]{x}} = \sqrt[3]{x}, \\
 (b) \sqrt{x\sqrt[5]{x}} - \sqrt[5]{x\sqrt{x}} = 56, \\
 (c) 2\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[6]{x} - 18 = 0, \\
 (d) \sqrt[5]{\frac{16x}{x-1}} + \sqrt[5]{\frac{x-1}{16x}} = 5.5
 \end{array}$$

- (e) $\sqrt[3]{(a+x)^2} + 4\sqrt[3]{(a-x)^2} = 5\sqrt[3]{a^2 - x^2}$,
 (f) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$,
 (g) $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}} + \sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}} = 7\sqrt{2}$,
 (h) $\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}} = 1$,
 (i) $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} = 1$,
 (j) $\sqrt[4]{(x-1)^2} + \sqrt[4]{(x+1)^2} = 1.5\sqrt[4]{x^2-1}$,
 (k) $2x^2 + 3x - 5\sqrt{2x^2 + 3x + 9} = -3$,
 (l) $\sqrt[3]{(8-x)^2} + \sqrt[3]{(27+x)^2} - \sqrt[3]{(8-x)(27+x)} = 7$,
 (m) $6\sqrt[3]{x-3} + \sqrt[3]{x-2} = 5\sqrt[6]{(x-2)(x-3)}$,
 (n) $\sqrt[3]{4(3x+4)} - \sqrt[3]{3(4x-7)} = 1$,
 (o) $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}} + \sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}} = 4$,
 (p) $\sqrt[4]{x+15} - \sqrt[4]{x-1} = 2$,
 (q) $\sqrt{x^2+17} - \sqrt[4]{x^2+17} = 6$,
 (r) $\sqrt[5]{(7x-3)^3} + 8\sqrt[5]{(3-7x)^{-3}} = 7$.

Bashkësia e zgjidhjeve B është:

- | | | |
|--|--|---|
| (a) $\{64\}$, | (g) $\{15\}$, | (m) $\left\{\frac{190}{63}, \frac{2185}{728}\right\}$, |
| (b) $\{1024\}$, | (h) $\{x x \in \mathbf{R} \wedge 5 \leq x \leq 8\} = [5, 8]$, | (n) $\left\{4, -\frac{43}{12}\right\}$, |
| (c) $\{64\}$, | (i) $\{x x \in \mathbf{R} \wedge 2 \leq x \leq 5\} = [2, 5]$, | (o) $\{0\}$, |
| (d) $\left\{2, -\frac{1}{511}\right\}$, | (j) $\left\{-\frac{17}{5}\right\}$, | (p) $\{1\}$, |
| (e) $\left\{0, \frac{63a}{65}\right\}$, | (k) $\left\{3, -\frac{9}{2}\right\}$, | (q) $\{-8, 8\}$, |
| (f) $[5, 10]$, | (l) $\{0, -19\}$, | (r) $\left\{5, \frac{2}{7}\right\}$. |

5.2. Inekuacionet (jobarazimet) irracionale

Përkufizim 5.2.1. Çdo inekuacion tek i cili e panjohura ndodhet nën ndonjë rrënjë quhet inekuacion irracional. Zgjidhje e një inekuacioni irracional quhet çdo vlerë $\alpha \in \mathbf{R}$ për të cilën inekuacioni shndërrohet në formulë të saktë.

Ngjashëm, si te ekuacionet irracionale, për zgjidhjen e inekuacioneve irracionale nuk ka formulë, por duhet ditur mirë vetitë e rrënjëve dhe veçanërisht monotoninë e funksioneve $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbf{N}$).

Shembulli 5.8. Bashkësia e zgjidhjeve e inekuacioneve irracionale: $\sqrt{x} \geq 1$, $\sqrt{x} \geq -1$, $\sqrt[3]{x} \leq 1$, $\sqrt[3]{x} \geq -2$, janë me radhë: $[1, \infty)$, $[0, \infty)$, $(-\infty, 1]$ dhe $[-8, \infty)$.

Shembulli 5.9. Të zgjidhen inekuacionet

$$(a) \sqrt{x+7} > 2x-1, \quad (c) \sqrt{(x+2)(x-6)} < 8-x,$$

$$(b) \sqrt{x+6} < x-6, \quad (d) \sqrt{6-x-x^2} < \sqrt{3x+6}.$$

Zgjidhje. (a) Së pari duhet caktuar bashkësinë e zgjidhjeve të jobarazimit $x+7 \geq 0$, sepse shprehjet nën rrënjë me tregues çift nuk guxojnë të jenë negative, d.m.th. $x \in [-7, \infty)$.

Dallojmë dy raste:

1. Për $x \in [-7, \infty)$ dhe $2x-1 \geq 0$, d.m.th. $x \in [1/2, \infty)$ jobarazimi i dhënë është ekuivalent me jobarazimin $x+7 > (2x-1)^2$, sepse funksioni $y = x^2$ është monototo-rritës në intervalin $[0, \infty)$. Bashkësia e zgjidhjeve e jobarazimit të fundit është intervali $\left(-\frac{3}{4}, 2\right)$. Pra bashkësia e zgjidhjeve e jobarazimit të dhënë në rastin (a) është

$$B_1 = \left[\frac{1}{2}, \infty\right) \cap \left(-\frac{3}{4}, 2\right) = \left[\frac{1}{2}, 2\right).$$

2. Për $x \in [-7, \infty)$ dhe $2x-1 < 0$, d.m.th. $x \in \left[-7, \frac{1}{2}\right)$, shprehja $2x-1$ është negative (bile $-15 \leq 2x-1 < 0$), ndërsa $\sqrt{x+7} \geq 0$, prandaj përfundojmë se zgjidhje e jobarazimit është edhe çdo $x \in \left[-7, \frac{1}{2}\right) = B_2$. Përfundimisht, bashkësia e zgjidhjeve e jobarazimit të dhënë është

$$B = B_1 \cup B_2 = \left[\frac{1}{2}, 2\right) \cup \left[-7, \frac{1}{2}\right) = [-7, 2).$$

(b) Edhe këtu, $x + 6 \geq 0$, d.m.th. $x \in [-6, \infty)$. Meqenëse $0 \leq \sqrt{x+6} < x-6$, atëherë edhe $x-6 > 0$. Rrjedhimisht $x \in (6, \infty)$. Prandaj për $x \in (6, \infty)$ guxojmë t'i ngrisim në katror anë për anë; ruhet shenja e jobarazimit (pse?), dhe me atë rast marrim jobarazimin $x^2 - 13x + 30 > 0$, bashkësia e zgjidhjeve e të cilit është $x \in (-\infty, 3) \cup (10, \infty)$. Duke patur parasysh se $x \in (6, \infty)$, prandaj bashkësia e zgjidhjeve e jobarazimit të dhënë në rastin (b) është

$$B = ((-\infty, 3) \cup (10, \infty)) \cap (6, \infty) = (10, \infty).$$

(c) Ngjashëm si në rastin (b), shprehja nën rrënjën katrore nuk guxon të jetë negative, prandaj $(x+2)(x-6) \geq 0$, që është ekuivalent me faktin $x \in (-\infty, -2] \cup [6, \infty)$. Por

$$0 \leq \sqrt{(x+2)(x-6)} < 8-x,$$

prandaj $8-x > 0$, rrjedhimisht $x \in (-\infty, 8)$. Kjo do të thotë se për $x \in (-\infty, 8) \cap ((-\infty, -2] \cup [6, \infty)) = (-\infty, -2] \cup [6, 8)$ guxojmë t'i ngrisim në katror anë për anë dhe në atë rast do të ruhet shenja e jobarazimit. Kemi

$$(x+2)(x-6) < (8-x)^2 = 64 - 16x + x^2 \iff x < \frac{19}{3} \iff x \in \left(-\infty, \frac{19}{3}\right).$$

Bashkësia e zgjidhjeve e jobarazimit të dhënë në rastin (c) është

$$B = \left(-\infty, \frac{19}{3}\right) \cap ((-\infty, -2] \cup [6, 8)) = (-\infty, -2] \cup \left[6, \frac{19}{3}\right).$$

(d) Së pari duhet të zgjidhim sistemin e jobarazimeve $6-x-x^2 \geq 0$ dhe $3x+6 > 0$, që është ekuivalent me sistemin e jobarazimeve $-3 \leq x \leq 2$ dhe $x > -2$, d.m.th. $x \in (-2, 2]$. Prandaj për $x \in (-2, 2]$ jobarazimi i dhënë është ekuivalent me jobarazimin $6-x-x^2 < 3x+6$, respektivisht $x^2+4x > 0$. Bashkësia e zgjidhjeve e këtij të fundit është $x \in (-\infty, -4) \cup (0, \infty)$, ndërsa bashkësia e zgjidhjeve e jobarazimit $\sqrt{6-x-x^2} < \sqrt{3x+6}$ është

$$B = ((-\infty, -4) \cup (0, \infty)) \cap (-2, 2] = (0, 2]$$

Shembulli 5.10. Të zgjidhim jobarazimin $\sqrt{x} + \sqrt[3]{1-x} > 1$.

Zgjidhje. Është e aqrtë se $x \geq 0$, sepse rrënja kubike (pjesa kryesore e saj) e çdo numri real është prap numër real. Zëvendësojmë $\sqrt{x} = t \geq 0$. Atëherë jobarazimi i dhënë merr formën $t + \sqrt[3]{1-t^2} > 1$, respektivisht $1-t^2 > (1-t)^3 = 1-3t+3t^2-t^3$. Jobarazimi i fundit është ekuivalent me jobarazimin $t(t^2-4t+3) > 0$, respektivisht $t(t-1)(t-3) > 0$, bashkësia e zgjidhjeve e të cilit është $t \in (0, 1) \cup (3, \infty)$. Meqë $x = t^2$, prandaj $x \in (0, 1) \cup (9, \infty) = B$, që paraqet bashkësinë e zgjidhjeve e jobarazimit të $\sqrt{x} + \sqrt[3]{1-x} > 1$.

Detyra në lidhje me inekuacionet irracionale

1. Të zgjidhen jobarazimet

- | | |
|--|---|
| (a) $\sqrt{x+2} \geq x$, | (b) $\sqrt{x^2 - x - 12} > 7 + x$, |
| (c) $\sqrt{x^2 - 3x - 10} < 8 - x$, | (d) $\sqrt{6 + x - x^2} + 2 > 4x$, |
| (e) $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1} < 1$, | (f) $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+8} > 3$, |
| (g) $\sqrt{5x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5}$, | (h) $\sqrt{x^2 - 8x + 15} + \sqrt{x^2 + 2x - 15} >$ $> \sqrt{4x^2 - 18x + 18}$, |
| (i) $\sqrt{x^2 + 4x + 4} < x + 6$, | (j) $\sqrt{x+1} > 5 - x$, |
| (k) $(1+x)\sqrt{x^2+1} > x^2 - 1$, | (l) $\sqrt{9-x^2} + \sqrt{6x-x^2} > 3$, |
| (m) $\sqrt{x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5}$, | (n) $\sqrt{x} + \sqrt{x-1} > \sqrt{x+1}$, |
| (o) $2x - 1 > \sqrt{x^2 - 3x + 2}$, | (p) $\frac{\sqrt{2-x^4}}{x} < 1$, |
| (q) $\sqrt{x-2} \leq 4 - x$, | (r) $\sqrt{x^2 - 3x + 2} > x - 2$. |

Rezultati: Bashkësia B e zgjidhjeve për secilin jobarazim është:

- | | | |
|--|---|--|
| (a) $[-2, 2]$, | (g) $\left[\frac{5}{2}, 15\right)$, | (m) $\left[\frac{5}{2}, 3\right)$, |
| (b) $\left(-\infty, -\frac{61}{15}\right)$, | (h) $\left(5\frac{2}{3}, \infty\right)$, | (n) $\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$, |
| (c) $(-\infty, -2] \cup \left[5, 5\frac{9}{13}\right)$, | (i) $(-4, \infty)$, | (o) $\left(\frac{1+\sqrt{13}}{6}, 1\right] \cup [2, \infty)$, |
| (e) $\left[-\frac{1}{2}, 3 - 2\sqrt{3}\right)$, | (j) $(3, \infty)$, | (p) $[-\sqrt[4]{2}, 0) \cup (1, \sqrt[4]{2}]$, |
| (f) $(34 + 6\sqrt{33}, \infty)$, | (k) $(-1, \infty)$, | (q) $[2, 3]$, |
| | (l) $(0, 3)$, | (r) $(-\infty, 1] \cup (2, \infty)$. |

Kapitulli VI

Funksionet eksponenciale dhe ato logaritmike

6.1. Ekuacionet dhe inekuacionet eksponenciale

Përkufizim 6.1.1. Çdo ekuacion (inekuacion) tek i cili e panjohura paraqitet në eksponent të ndonjë fuqie quhet ekuacion (inekuacion) eksponencial.

Zgjidhje në bashkësinë e numrave realë \mathbf{R} të një ekuacioni (inekuacioni) eksponencial quhet çdo vlerë $\alpha \in \mathbf{R}$, ashtu që kur e panjohura zëvendësohet me α , ekuacioni (inekuacioni) bëhet formulë e saktë.

Për zgjidhjen e ekuacioneve dhe inekuacioneve eksponenciale, mes tjerash, shfrytëzohen vetitë e fuqive, e sidomos vetitë:

$$\begin{aligned} a^x = a^y &\iff x = y & a^x = b^x &\iff x = 0, \quad a, b > 0, a \neq b, \\ 1 < a \leq b \wedge x \geq 0 &\implies a^x \leq b^x, \\ 1 < a \leq b \wedge x \leq 0 &\implies a^x \geq b^x, \\ a, b \in (0, 1) \wedge a \leq b \wedge x \geq 0 &\implies a^x \leq b^x, \\ a, b \in (0, 1) \wedge a \leq b \wedge x \leq 0 &\implies a^x \geq b^x. \end{aligned} \tag{1}$$

si dhe

$$\begin{aligned} (0 < a < 1) \wedge (x_1 \leq x_2) &\implies a^{x_1} \geq a^{x_2}, \\ (a > 1) \wedge (x_1 \leq x_2) &\implies a^{x_1} \leq a^{x_2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Shembulli 6.1. Të zgjidhen ekuacionet eksponenciale

$$\begin{aligned} (a) \quad 2^{x-3} &= 16, & (d) \quad 16^{\frac{1}{x}} &= 4^{\frac{x}{2}}, \\ (b) \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} &= \frac{16}{81}, & (e) \quad 100 \cdot 10^{2x-2} &= 1000^{\frac{x+1}{9}}, \\ (c) \quad 9^{-3x} &= \left(\frac{1}{27}\right)^{x+3}, & (f) \quad 4^{x+1} + 4^x &= 320. \end{aligned}$$

Zgjidhje. (a) Meqenëse $16 = 2^4$, atëherë marrim ekuacionin $2^{x-3} = 2^4$, prej nga marrim se $x - 3 = 4$, respektivisht $x = 7$.

(b) Ngjashëm, $\frac{16}{81} = \left(\frac{2}{3}\right)^4$, prandaj $2x = 4$, respektivisht $x = 2$.

(c) Ngjashëm

$$9^{-3x} = \left(\frac{1}{27}\right)^{x+3} \iff 3^{-6x} = 3^{-3x-9} \iff -6x = -3x - 9 \iff x = 3.$$

(d) Ekuacioni i dhënë është ekuivalent me ekuacionin $4^{\frac{2}{x}} = 4^{\frac{x}{2}}$, prandaj $\frac{2}{x} = \frac{x}{2}$, respektivisht $x^2 = 4$, ose $x_1 = -2, x_2 = 2$.

(e) Vlen

$$100 \cdot 10^{2x-2} = 1000^{\frac{x+1}{9}} \iff 10^2 \cdot 10^{2x-2} = 10^{\frac{x+1}{3}} \iff 10^{2x} = 10^{\frac{x+1}{3}} \\ \iff 2x = \frac{x+1}{3} \iff x = \frac{1}{5}.$$

(f) Vlen

$$4^{x+1} + 4^x = 320 \iff 5 \cdot 4^x = 320 \iff 4^x = 64 = 4^3 \iff x = 3.$$

Shembulli 6.2. Të zgjidhen ekuacionet që vijojnë

- (a) $2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 450$, (h) $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$,
 (b) $2^{3x-2} - 2^{3x-3} - 2^{3x-4} = 4$, (i) $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x + \left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x = 14$
 (c) $2^{x-1} - 2^{x-3} = 3^{x-2} - 3^{x-3}$, (j) $3^{\frac{x-1}{2}} - 2^{\frac{x+1}{3}} = 2^{\frac{x-2}{3}} + 3^{\frac{x-3}{2}}$,
 (d) $(11^x - 11)^2 = 11^x + 99$, (k) $\sqrt{2^x \sqrt[3]{4^x \cdot \sqrt[3]{0.125}}} = 4\sqrt[3]{2}$,
 (e) $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$, (l) $6 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x = 0$,
 (f) $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$,
 (g) $2^{3x} \cdot 3^x - 2^{3x-1} \cdot 3^{x+1} = -288$,

Zgjidhje. (a) Vlen

$$2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 450 \iff 2 \cdot 3^{x-2}(3^3 - 2) = 450 \iff 3^{x-2} = 9 \\ \iff x - 2 = 2 \iff x = 4.$$

(b) Ekuacioni i dhënë është ekuivalent me ekuacionin $2^{3x-4}(4-2-1) = 2^2$, respektivisht $3x-4=2$, ndërsa zgjidhja e këtij të fundit është $x=2$.

(c) Vlen

$$2^{x-1} - 2^{x-3} = 3^{x-2} - 3^{x-3} \iff 2^{x-3}(2^2 - 1) = 3^{x-3}(3 - 1) \\ \iff 2^{x-4} = 3^{x-4} \iff x - 4 = 0 \iff x = 4.$$

(d) Pasi të zëvendësojmë $11^x = t$ marrim ekuacionin kuadratik $t^2 - 23t + 22 = 0$ në lidhje me t . Zgjidhjet e ekuacionit të fundit janë $t_1 = 1$ dhe $t_2 = 22$. D.m.th. $11^x = 1$, që d.m.th. $x_1 = 0$ dhe $11^x = 22$, ose $11^{x-1} = 2$, që tani nuk jemi në gjendje ta zgjidhim, sepse ende nuk jemi njohur me kuptimin e logaritmeve. Zgjidhja e ekuacionit të dytë është $x_2 = 1 + \log_{11} 2$.

(e) Ngjashëm si në rastin (d) zëvendësojmë $2^{\sqrt{x-2}} = t$ dhe me atë rast ekuacioni $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$ merr formën $t^2 - 10t + 16 = 0$. Zgjidhjet e këtij të fundit janë $t_1 = 2$ dhe $t_2 = 8$. Pas zëvendësimit marrim se $2^{\sqrt{x-2}} = 2$ respektivisht $\sqrt{x-2} = 1$, pra $x_1 = 3$, si dhe $2^{\sqrt{x-2}} = 8 = 2^3$, që d.m.th. $\sqrt{x-2} = 3$, ose $x-2 = 9$, përfundimisht $x_2 = 11$. Pra ekuacioni ka dy zgjidhje.

(f) Ekuacioni i dhënë është ekuivalent me ekuacionin $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - \frac{5}{2} \cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}} = 6$. Tani zëvendësojmë $2^{x+\sqrt{x^2-2}} = t$ dhe marrim ekuacionin $t^2 - \frac{5}{2}t = 6$, zgjidhjet e të cilit janë $t_1 = 4$ dhe $t_2 = -\frac{3}{2}$. Por, nga zëvendësimi $2^{x+\sqrt{x^2-2}} = t$ marrim se $t > 0$. Prandaj zgjidhje është vetëm $t_1 = 4$. Tani kemi

$$2^{x+\sqrt{x^2-2}} = 4 = 2^2 \iff x + \sqrt{x^2-2} = 2 \iff \sqrt{x^2-2} = 2-x.$$

Zgjidhja e ekuacionit të fundit është $x = \frac{3}{2}$, që paraqet edhe zgjidhjen e ekuacionit të fillimit.

(g) Vlen

$$\begin{aligned} 2^{3x} \cdot 3^x - 2^{3x-1} \cdot 3^{x+1} = -288 &\iff 2^{3x-1} \cdot 3^x(2-3) = -288 \iff 8^x \cdot 3^x = 576 \\ &\iff 24^x = 576 \iff x = 2. \end{aligned}$$

(h) Ngjashëm si më lartë, kemi

$$\begin{aligned} 4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1} &\iff 4^x + 4^x 2^{-1} = 3^{x-\frac{1}{2}}(3+1) \\ &\iff \frac{3}{2} \cdot 4^x = 4 \cdot 3^{x-\frac{1}{2}} \\ &\iff 3 \cdot 4^x = 8 \cdot 3^{x-\frac{1}{2}} \iff 2^{2x-3} = 3^{\frac{2x-3}{2}} \\ &\iff 2^{2x-3} = \sqrt{3}^{2x-3} \iff 2x-3 = 0 \\ &\iff x = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

(i) Këto ekuacione janë më specifike. Meqenëse

$$\sqrt{7+\sqrt{48}} \cdot \sqrt{7-\sqrt{48}} = 1,$$

atëherë marrim se

$$\sqrt{7-\sqrt{48}} = \frac{1}{\sqrt{7+\sqrt{48}}},$$

prandaj po të zëvendësojm $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x = t$, marrim ekuacionin $t + \frac{1}{t} = 14$, zgjidhjet e të cilit janë $t_1 = 7 + \sqrt{48}$ dhe $t_2 = 7 - \sqrt{48}$. Tani këto vlera të t i kthejmë te zëvendësimi dhe marrim $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x = 7 + \sqrt{48}$, i cili është ekuivalent me ekuacionin

$$\left(7 + \sqrt{48}\right)^{\frac{x}{2}} = 7 + \sqrt{48} \iff \frac{x}{2} = 1 \iff x = 2,$$

dhe

$$\begin{aligned} \left(7 + \sqrt{48}\right)^{\frac{x}{2}} &= 7 - \sqrt{48} \\ \left(7 + \sqrt{48}\right)^{\frac{x}{2}} &= (7 - \sqrt{48}) \frac{7 + \sqrt{48}}{7 + \sqrt{48}} = \frac{1}{7 + \sqrt{48}} = \left(7 + \sqrt{48}\right)^{-1} \\ \iff \frac{x}{2} &= -1 \iff x = -2. \end{aligned}$$

D.m.th. bashkësia e zgjidhjeve e ekuacionit të dhënë është $B = \{-2, 2\}$.

(j) Vlen

$$\begin{aligned} 3^{\frac{x-1}{2}} - 2^{\frac{x+1}{3}} &= 2^{\frac{x-2}{3}} + 3^{\frac{x-3}{2}} \iff 3^{\frac{x-1}{2}} - 3^{\frac{x-3}{2}} = 2^{\frac{x-2}{3}} + 2^{\frac{x+1}{3}} \\ \iff 3^{\frac{x-3}{2}} (3-1) &= 2^{\frac{x-2}{3}} (2+1) \\ \iff 3^{\frac{x-5}{2}} &= 2^{\frac{x-5}{3}} \\ \iff (\sqrt{3})^{x-5} &= (\sqrt[3]{2})^{x-5} \\ \iff x-5 &= 0 \iff x = 5. \end{aligned}$$

(k) Do të shfrytëzojmë vetitë e fuqive dhe të rrënjëve. Vlen

$$\begin{aligned} \sqrt{2^x \sqrt[3]{4^x \cdot \sqrt{0.125}}} &= 4\sqrt[3]{2} \iff \sqrt[3]{2^{3x} \cdot \sqrt{(4^x)^x \cdot 0.125}} = \sqrt[3]{4^3 \cdot 2} \\ \iff \sqrt[6]{2^x \sqrt{(2^{3x})^x \cdot 4^{x^2} \cdot 0.125}} &= \sqrt[3]{2^7} \\ \iff \sqrt[6]{2^{3x^2} \cdot 4^{x^2} \cdot 2^{-3}} &= \sqrt[3]{2^7} \\ \iff \sqrt[6]{2^{5x^2-3}} &= \sqrt[3]{2^7} \\ \iff 2^{\frac{5x^2-3}{6}} &= 2^{\frac{7}{3}} \\ \iff \frac{5x^2-3}{6x} &= \frac{7}{3} \\ x_1 = 3, x_2 &= -\frac{1}{5}. \end{aligned}$$

(l) Po të pjesëtojmë ekuacionin $6 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x = 0$ me 6^x do të marrim ekuacionin $6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x - 13 + 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x = 0$. Tani zëvendësojmë $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t > 0$ dhe

marrim ekuacionin $6t + \frac{6}{t} - 13 = 0$ zgjidhjet e të cilit janë $t_1 = \frac{3}{2}$ dhe $t_2 = \frac{2}{3}$. Pasi t'i kthejmë këto vlera te zëvendësimi, marrim se $x_1 = 1$ dhe $x_2 = -1$.

Shembulli 6.3. Të tregojmë se numri n i banorëve të një vendi (globit tokësor) rritet sispas një funksioni eksponencial në funksion të kohës t .

Zgjidhje. Le të jetë n_0 numri i banorëve në momentin e tanishëm dhe p shkalla e shtimit natyror ³⁾(p.sh. $p = 0.02 = \frac{20}{1000} = \frac{2}{100}$, d.m.th. 20 promilë) në vit. Atëherë pas një viti, numri i banorëve $n(1)$ do të jetë

$$n(1) = n_0 + p \cdot n_0 = n_0 \cdot (1 + p).$$

Ndërsa në fund të vitit të dytë do të kemi

$$n(2) = n_1 + p \cdot n_1 = n_1 \cdot (1 + p) = n_0(1 + p)^2.$$

Supozojmë se në fund të vitit k numri i banorëve do të jetë

$$n(k) = n_0 \cdot (1 + p)^k. \quad (1)$$

Atëherë në fund të vitit $k + 1$ numri i banorëve do të jetë

$$n(k + 1) = n(k) + p \cdot n(k) = n(k) \cdot (1 + p) = n_0(1 + p)^{k+1}.$$

D.m.th. shtimi i popullatës së një vendi bëhet sipas një funksioni eksponencial në funksion të kohës, $n(t) = n_0(1 + p)^t$, ku t është koha e shprehur në vite, muaj apo ditë, varësisht nga mënyra e llogaritjes së shtimit natyror.

Vërejtje 6.1. Nëse $p > 0$, atëherë do të kemi rritje të popullatës, ndërsa nëse $p = 0$ nuk kemi as shtim e as zvogëlim të popullatës, ndërsa për $p < 0$ do të kemi zvogëlim të popullatës, që teoritikisht do të thotë se ai poull një ditë do të shuhet. Ky fenomen është i njohur me emrin *vdekja e bardhë*. Grafiku i këtij të fundit tenton kah zeroja kur koha tenton në infinit.

Vërejtje 6.2. E njëjta formulë shërben edhe për njehsimin e vlerës së një kapitali K_0 të depozituar në një bankë me normë vjetore të interesi i në funksion të kohës t . D.m.th.

$$K(t) = K_0(1 + i)^t. \quad (2)$$

Shembulli 6.4. Sa banorë do të ketë globi tokësor pas 35 viteve, nëse shkalla e shtimit natyror është $p = 0.02 = \frac{20}{1000} = 20$ -promilë?

Zgjidhje. Sipas formulës (1) kemi:

$$n(k) = n_0(1 + p)^k = n_0 \cdot 1.02^{35} \approx 2n_0.$$

³⁾ Me shkallë të shtimit natyror p kuptojmë raportin ndërmjet diferencës në mes numri të lindjeve dhe numrit të vdekjeve me një numër të caktuar të banorëve, p.sh. në 1000 banorë, për një periudhë të caktuar kohor, p.sh. një vit.

D.m.th. pas 35 viteve numri i banorëve të globit tokësor përafërsisht do të dyfishohet.

Vërejtje 6.3. Nëse në shembullin 6.3 procesin e shtimit e konsiderojmë si të vazhdueshëm (viti ndahet në m -pjesë të barabarta dhe lejojmë që $m \rightarrow \infty$), d.m.th. llogaritja e numrit të banorëve bëhet në çdo moment kohor, atëherë për llogaritjen e numrit të banorëve pas t -viteve shfrytëzojmë formulën:

$$n(t) = n_0 \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p}{m}\right)^{mt} = n_0 \left[\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p}{m}\right)^{\frac{m}{p}} \right]^{pt} = n_0 \cdot e^{pt}, \quad (3)$$

ku p është shkalla vjetore e shtimit natyror. Njësoj në financa, nëse kapitalizimi i interesit bëhet në mënyrë të vazhdueshme, kurse i është norma vjetore e interesit, atëherë vlera e kapitalit pas t -viteve do të jetë:

$$K(t) = K_0 \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt} = K_0 \cdot e^{it}. \quad (4)$$

Detyra në lidhje me ekuacionet eksponenciale

1. Të zgjidhen ekuacionet që vijojnë

$$(a) \quad 3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} 9^{x+1},$$

$$(b) \quad 3^{12x-1} - 9^{6x-1} - 27^{4x-1} + 81^{3x+1} = 2192,$$

$$(c) \quad 5^x - 5^{3-x} = 20,$$

$$(d) \quad 5^{2x-3} = 2 \cdot 5^{x-2} + 3,$$

$$(e) \quad 4^x = 2^{\frac{x+1}{x}},$$

$$(f) \quad 2^{\frac{x+1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = 1,$$

$$(g) \quad 0.5^{x^2-20x+61.5} = \frac{8}{\sqrt{2}},$$

$$(h) \quad 2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} = 0,01 \cdot (10^{x-1})^3,$$

$$(i) \quad 25^{\sqrt{x}} - 124 \cdot 5^{\sqrt{x}} = 125,$$

$$(j) \quad \left(2\sqrt{12} + 3\sqrt{3} + 6\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = \sqrt{3^{2x^2-2x-2}},$$

$$(k) \quad \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4,$$

$$(l) \quad 20^x - 6 \cdot 5^x + 10^x = 0,$$

$$(m) \quad 10^{\frac{2}{x}} + 25^{\frac{1}{x}} = 4,25 \cdot 50^{\frac{1}{x}},$$

$$(n) \quad 5^{\frac{2x+2}{5}} - 4^{\frac{2x-5}{3}} = 5^{\frac{2x-3}{5}} + 4^{\frac{2x-2}{3}},$$

$$(o) \quad \sqrt{3} \cdot 3^{\frac{x}{1+\sqrt{x}}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2+\sqrt{x}+x}{2(1+\sqrt{x})}} = 81,$$

$$(p) \quad \sqrt{2} \cdot 0.5^{\frac{5}{4\sqrt{x+10}}} = 4^{\frac{1}{\sqrt{x+1}}},$$

$$(q) \quad 8^{\frac{x-3}{3x-7}} \cdot \sqrt[3]{x-1} \sqrt{0.5^{3x-1}} = 1,$$

$$(r) \quad 2^{2x+1} - 33 \cdot 2^{x-1} + 4 = 0,$$

$$(s) \quad 2(x+1)(2x+1)^x - (x-1)^x = (2x+1)^{x+1},$$

$$(t) \quad 3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} + 3^{x-4} + 3^{x-5} + 3^{x-6} = 31,$$

$$\begin{aligned}
 (u) \quad & 3\sqrt[3]{10} = 5 \left(50 + \sqrt[2]{10} \right), \\
 (v) \quad & 6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}, \\
 (y) \quad & 3^{x^2(x^2-1)} = 729 \cdot 7^{x^4-x^2-6}, \\
 (z) \quad & 3^{x-\frac{1}{2}} + 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x+\frac{5}{2}} = 31.
 \end{aligned}$$

Bashkësia e zgjidhjeve B për secilin ekuacion është:

$$\begin{array}{lll}
 (a) \quad \left\{ -\frac{1}{2} \right\}, & (i) \quad \{9\}, & (q) \quad \left\{ \frac{5}{3} \right\}, \\
 (b) \quad \left\{ \frac{1}{4} \right\}, & (j) \quad \left\{ \frac{1-\sqrt{7}}{2}, \frac{1+\sqrt{7}}{2} \right\}, & (r) \quad \{-2, 3\}, \\
 (c) \quad \{5\}, & (k) \quad \{2, -2\}, & (s) \quad \{0, -2\}, \\
 (d) \quad \{2\}, & (l) \quad \{1\}, & (t) \quad \{6\}, \\
 (e) \quad \left\{ -\frac{1}{2} \right\}, & (m) \quad \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}, & (u) \quad \left\{ \frac{1}{2} \right\}, \\
 (f) \quad \{-1, 1\}, & (n) \quad \{4\}, & (v) \quad \{0\}, \\
 (g) \quad \{4, 16\}, & (o) \quad \{81\}, & (y) \quad \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}, i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}\}, \\
 (h) \quad \{1, 2\}, & (p) \quad \{25\}, & (z) \quad \{0.5\}.
 \end{array}$$

2. Dhurata ka investuar \$10.000 në një bankë me normë vjetore të interesit 12%, kurse banka e kapitalizon interesin njëherë në vit. Njehsoni vlerën K të parave që banka duhet t'i paguaj Dhuratës pas

- (a) 10 viteve,
 (b) 15 viteve.

Rez. (a) $K = \$34785.5$

(b) $K = \$54735.7$

3. Në një kulturë biologjike numri i bakterieve trefishohet çdo orë. Njehsoni numrin e tyre pas 5 orëve nëse numri fillestar i tyre është n_0 . Vlerësoni këtë numër nëse $n_0 = 10^9$.

Rez. Ngjashëm, si në shembullin e shtimit të popullatës, kemi $n(k) = n_0(1+3)^k = 4^k$, ku k është numri i orëve. Në rastin konkret $k = 5$, $n_0 = 10^9$, prandaj $n(5) = 10^9 \cdot 4^5 = 1024 \cdot 10^9 = 1.024 \cdot 10^{12}$, d.m.th. 1024 miliardë.

Shembulli 6.5. Të zgjidhen inekuacionet eksponenciale

- (a) $5^{7x-3} > 5^{-3}$,
 (b) $0.5^{x-1} < 0.5^{2x+2}$,
 (c) $2^{x^2-3} > 2$,
 (d) $2^x < 7^x$,
 (e) $3^{x-1} > 5^{x-1}$,
 (f) $\frac{1}{2^{2x}+3} \geq \frac{1}{2^{x+2}-1}$,
 (g) $2^{4x+2} \cdot 4^{-x^2} - 3 \cdot 2^{2+2x-x^2} + 8 \geq 0$,
 (h) $\left(\left(\frac{3}{7}\right)^{x^2-2x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \geq 1$,
 (i) $x^2 \cdot 3^x - 3^{x+1} \leq 0$,
 (j) $\sqrt{9x - 3^{x+2}} > 3^x - 9$,
 (k) $\left(\frac{3}{5}\right)^{13x^2} \leq \left(\frac{3}{5}\right)^{x^4+36} < \left(\frac{3}{5}\right)^{12x^2}$,
 (l) $|2^{4x^2-1} - 5| \leq 3$.

Zgjidhje. (a) Meqenësë $a = 5 > 1$, atëherë jobarazimi i dhënë është ekuivalent me jobarazimin $7x + 3 > -3$, d.m.th. $x > -\frac{6}{7}$.

(b) Meqenësë $a = 0.5 < 1$, atëherë jobarazimi i dhënë është ekuivalent me jobarazimin $x - 1 > 2x + 2$, d.m.th. $x < -3$.

(c) Ngjashëm, si në rastin (a), nga fakti se $a = 2 > 1$, atëherë jobarazimi i dhënë është ekuivalent me jobarazimin $x^2 - 3 > 1$, d.m.th. $x^2 - 4 > 0$. Bashkësia e zgjidhjeve e këtij të fundit është $B = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.

(f) Së pari zëvendësojmë $2^x = t > 0$. Atëherë jobarazimi i dhënë është ekuivalent me jobarazimin $\frac{1}{t^2+3} \geq \frac{1}{4t-1}$. Meqë $t^2+3 \geq 3 > 0$, atëherë këtë jobarazim mund ta shumëzojmë me t^2+3 dhe kemi:

$$\begin{aligned} \frac{t^2+3}{4t-1} \leq 1 &\iff \frac{t^2+3}{4t-1} - 1 \leq 0 \iff \frac{t^2-4t+4}{4t-1} \leq 0 \\ &\iff \frac{(t-2)^2}{4t-1} \leq 0 \iff 4t-1 < 0 \\ &\iff t < \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Por $t > 0$, prandaj bashkësia e zgjidhjeve në lidhje me t është intervali $\left(0, \frac{1}{4}\right)$, respektivisht $0 < t < \frac{1}{4}$. Tani, në vend të t marrim 2^x dhe marrim jobarazimin $0 < 2^x < 4 = 2^2$, që d.m.th. $x \in (-\infty, 2) = B$.

(g) Vlen

$$2^{4x+2} \cdot 4^{-x^2} - 3 \cdot 2^{2+2x-x^2} + 8 \geq 0 \iff 2^{2(-x^2+2x+1)} - 6 \cdot 2^{1+2x-x^2} + 8 \geq 0.$$

Zëvendësojmë $t = 2^{1+2x-x^2} > 0$ dhe marrim inekuacionin $t^2 - 6t + 8 \geq 0$, bashkësia e zgjidhjeve e të cilit është $(-\infty, 2] \cup [4, \infty)$. Por $t > 0$, prandaj

$t \in (0, 2] \cup [4, \infty)$. Kështu që $0 < 2^{1+2x-x^2} \leq 2$ ose $2^{1+2x-x^2} \geq 4$, të cilat jobarazime janë ekuivalent me jobarazimet $1 + 2x - x^2 \leq 1$ ose $1 + 2x - x^2 \geq 2$. Bashkësitë e zgjidhjeve të këtyre të fundit janë $(-\infty, 0] \cup [2, \infty) = B_1$, respektivisht $\{1\} = B_2$. Pra, bashkësia e zgjidhjeve e jobarazimit të dhënë është $B = B_1 \cup B_2 = (-\infty, 0] \cup \{1\} \cup [2, \infty)$.

(h) Vlen

$$\left(\left(\frac{3}{7} \right)^{x^2-2x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \geq 1 \iff \left(\frac{3}{7} \right)^{\frac{x^2-2x}{x^2}} \geq 1.$$

Meqenëse baza është më e vogël se 1, atëherë jobarazimi i dhënë është ekuivalent me jobarazimin $\frac{x^2-2x}{x^2} \leq 0$. Meqenëse $x^2 > 0$ për çdo $x \neq 0$, atëherë jobarazimi i fundit është ekuivalent me jobarazimin $x^2 - 2x \leq 0$, d.m.th. $x \in (0, 2] = B$.

(i) Jobarazimi i dhënë është ekuivalent me jobarazimin $3^x(x^2 - 3) \leq 0$. Meqenëse $3^x > 0$ për çdo $x \in \mathbf{R}$, atëherë $x^2 - 3 \leq 0$. D.m.th. bashkësia e zgjidhjeve e jobarazimit $x^2 \cdot 3^x - 3^{x+1} \leq 0$ është $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}] = B$.

(j) Së pari $9^x - 3^{x+2} > 0$, d.m.th. $3^x(3^x - 3^2) > 0$, respektivisht $x > 2$. Meqenëse për $x > 2$, edhe ana e djathtë $3^x - 9$ është pozitive, atëherë jobarazimi i dhënë është ekuivalent me jobarazimin

$$\begin{aligned} 9^x - 3^{x+2} > (3^x - 9)^2 &\iff 9^x - 9 \cdot 3^x > 9^x - 18 \cdot 3^x + 81 \iff 9 \cdot 3^x > 3^4 \\ &\iff 3^x > 3^2 \iff x > 2. \end{aligned}$$

Pra, bashkësia e zgjidhjeve e jobarazimit të dhënë është $(2, \infty) = B$.

(k) Vlen

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{3}{5} \right)^{13x^2} \leq \left(\frac{3}{5} \right)^{x^4+36} < \left(\frac{3}{5} \right)^{12x^2} &\iff \begin{cases} 13x^2 \geq x^4 + 36 \\ x^4 + 36 > 12x^2. \end{cases} \end{aligned} \right\}$$

Tani, pasi të zëvendësojmë x^2 me t , marrim sistemin:

$$\left. \begin{aligned} 13t \geq t^2 + 36 \\ t^2 + 36 > 12t \end{aligned} \right\} \iff \left. \begin{aligned} t^2 - 13t + 36 \leq 0 \\ t^2 - 12t + 36 > 0 \end{aligned} \right\} \iff \left. \begin{aligned} 4 \leq t \leq 9 \\ t \neq 6 \end{aligned} \right\}.$$

D.m.th. $4 \leq x^2 \leq 9$ dhe $x^2 \neq 6$. Prandaj bashkësia e zgjidhjeve e jobarazimit të dhënë është $B = [-3, -\sqrt{6}] \cup (-\sqrt{6}, -2] \cup [2, \sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}, 3]$.

(l) Jobarazimi i dhënë është ekuivalent me jobarazimin

$$-3 \leq 2^{4x^2-1} - 5 \leq 3 \iff 2^{4x^2-1} - 8 \leq 0 \wedge 2^{4x^2-1} - 2 \geq 0.$$

Tani

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} 2^{4x^2-1} - 8 \leq 0 \\ 2^{4x^2-1} - 2 \geq 0 \end{aligned} \right\} \sim \left. \begin{aligned} 2^{4x^2-1} \leq 2^3 \\ 2^{4x^2-1} \geq 2 \end{aligned} \right\} \sim \left. \begin{aligned} 4x^2 - 1 \leq 3 \\ 4x^2 - 1 \geq 1 \end{aligned} \right\} \sim \\ \sim x \in \left[-1, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right] = B. \end{aligned}$$

Detyra në lidhje me inekuacionet eksponenciale

Të zgjidhen inekuacionet eksponenciale

- | | |
|---|---|
| (a) $9^{2x+2} \cdot 3^{x^2-1} - 10 \cdot 3^{\frac{x^2}{2}+1} \cdot 9^x + 3 \leq 0.$ | (h) $0.3^{2x^2-3x+6} < 0.00243,$ |
| (b) $0.5^{\sqrt[3]{2}} < 0.0625,$ | (i) $\frac{1}{3^x+5} < \frac{1}{3^{x+1}-1},$ |
| (c) $5^{2x+1} > 5^x + 4,$ | (j) $0.2^{\frac{x^2+2}{x^2-1}} > 25,$ |
| (d) $4^x - 22(x-1) + 8^{\frac{2}{3}(x-2)} > 52,$ | (k) $1 < 3^{ x^2-x } < 9,$ |
| (e) $25^x < 6 \cdot 5^x - 5,$ | (l) $\left. \begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{-x} > \frac{27}{64} \\ 2^{x^2-6x-3.5} \leq 8\sqrt{2} \end{array} \right\}.$ |
| (f) $4^{\frac{1}{x}-1} - 2^{\frac{1}{x}-2} - 3 \leq 0,$ | |
| (g) $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2},$ | |

Bashkësitë e zgjidhjeve janë:

- | | |
|---|---|
| (a) $[-4, 3],$ | (g) $(0, \infty),$ |
| (b) $\left(0, \frac{1}{2}\right),$ | (h) $\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (0, \infty),$ |
| (c) $(0, \infty),$ | (i) $(-1, 1),$ |
| (d) $(3, \infty),$ | (j) $(-1, 0) \cup (0, 1),$ |
| (e) $(3, \infty),$ | (k) $(-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2),$ |
| (f) $(-\infty, 0) \cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right),$ | (l) $[-1, 7].$ |

6.2. Funkzionet eksponenciale

Funksionet eksponenciale gjejnë zbatime të shumta, jo vetëm në matematikë, por edhe në fizikë, kimi, biologji, ekonomi, financa, demografi, etj. Shumë fenomene natyrore dhe financiare përshkruhen përmes funksioneve eksponenciale, si p.sh. shtimi i popullatës së një vendi; sasia e mbetur e një elementi radioaktiv gjatë zbërthimit radioaktiv; llogaritja e bilancit, si për depozita ashtu edhe për kredi, në rastin e interesit të përbërë përshkruhen dhe zgjidhen përmes funksioneve eksponenciale.

Le të jetë $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$ dhe $a \neq 1$.

Përkufizim 6.2.1. *Funksioni $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ i dhënë me barazimin $f(x) = a^x$ quhet funksion eksponencial. Numri a quhet baza e funksionit eksponencial.*

Vetitë:

1. Funksioni $f(x) = a^x$ është pozitiv për çdo $x \in \mathbf{R}$, d.m.th. grafiku i tij ndodhet mbi boshtin Ox për të gjithë $x \in \mathbf{R}$.

2. (a) Nëse $a > 1$ funksioni $f(x) = a^x$ është monotono-rritës dhe kur x i afrohet $-\infty$, vlera e funksionit $f(x)$ i afrohet zeros.

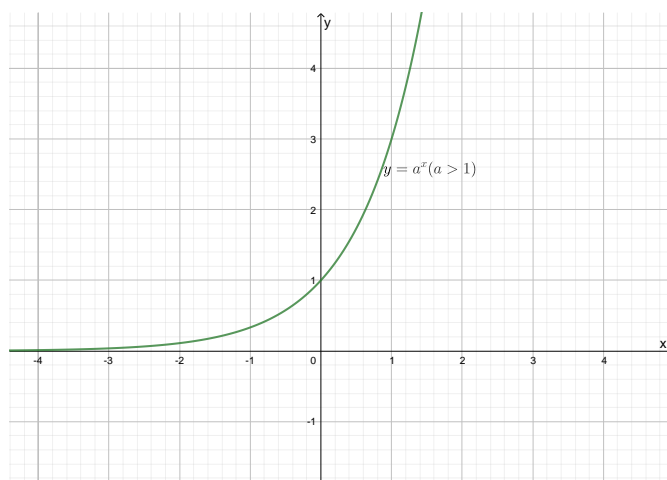


Fig. 6.1 a)

2. (b) Nëse $0 < a < 1$ funksioni $f(x) = a^x$ është monotono-zvogëlues dhe kur x i afrohet $+\infty$, vlera e funksionit $f(x)$ i afrohet zeros.

3. Funksioni $f(x) = a^x$ e pret boshtin Oy në pikën $P(0, 1)$.

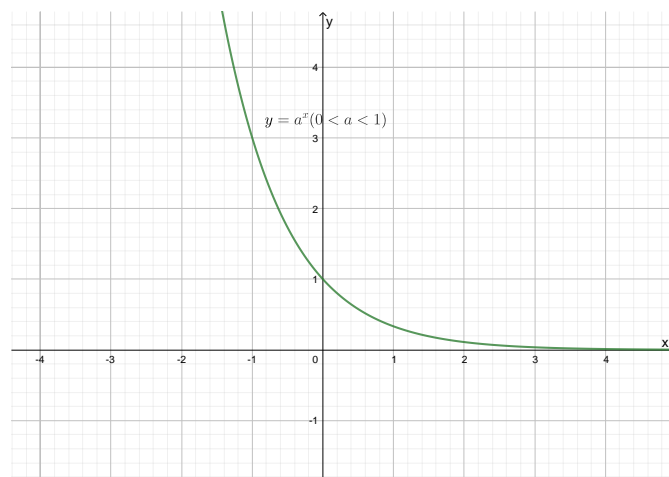


Fig. 6.1 b)

Shembulli 6.6. Të vizatohen grafikët e funksioneve

- (a) $f(x) = 2^x$
- (b) $f(x) = 3^x$
- (c) $f(x) = 4^x$
- (d) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
- (e) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
- (f) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$
- (g) $f(x) = 2^x + 2$
- (h) $f(x) = 3^x - 9$
- (i) $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^{-x}$.

Zgjidhje. (a) Te funksioni $f(x) = 2^x$ baza a është e barabartë me $2 > 1$. Prandaj grafiku i funksionit është i ngjashëm me atë si në fig. 6.1 a), d.m.th. është monotono-rritës; e pret boshtin Oy në pikën $P(0, 1)$ dhe kur x tenton në $-\infty$, funksioni tenton në zero.

(b) Ngjashëm si në rastin (a), funksioni është monotono-rritës, por nëse dëshirojmë t'i krahasojmë me atë të rastit (a), atëherë për $x \geq 0$ nga $3^x \geq 2^x$, përfundojmë se grafiku i funksionit $f(x) = 3^x$ ndodhet mbi grafikun e funksionit $f(x) = 2^x$, ndërsa për $x \leq 0$ nga $3^x \leq 2^x$, përfundojmë se grafiku i funksionit $f(x) = 3^x$ ndodhet nën grafikun e funksionit $f(x) = 2^x$.

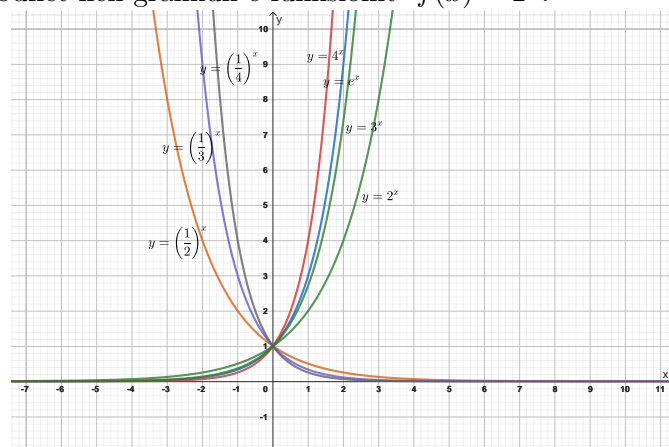


Fig. 6.2

(c) Ngjashëm si në rastin (b), funksioni është monotono-rritës, por nëse i krahasojmë me atë të rastit (a) dhe (b), atëherë për $x \geq 0$, përfundojmë se grafiku i funksionit $f(x) = 4^x$ ndodhet mbi grafikun e funksionit $f(x) = 3^x$, ndërsa për $x \leq 0$, përfundojmë se grafiku i funksionit $f(x) = 4^x$ ndodhet nën grafikun e funksionit $f(x) = 3^x$.

(d) Këtu baza $a = \frac{1}{2} < 1$, prandaj funksioni është monotono-zvogëlues, ndërsa grafiku i tij është i ngjashëm me atë të fig. 6.1 b).

(e) Ngjashëm, si në rastin (d), baza është më e vogël se 1 dhe grafiku është i ngjashëm me atë të fig. 6.1 b), por nës bëjmë një krahasim me atë të rastit (d), atëherë për $x \leq 0$ grafiku i funksionit $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ndodhet nën grafikun e funksionit $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; ndërsa për $x \geq 0$ grafiku i funksionit $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ndodhet mbi grafikun e funksionit $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

(f) Ngjashëm si në rastin (e).

(g) Duk shfrytëzuar rezultatin e rastit (a), atëherë vlerat e y -it në rastin (a) rriten për 2. Në këtë rast drejtëza $y = 2$ është asimptotë horizontale e grafikut të funksionit $f(x) = 2^x + 2$ (fig. 6.3).

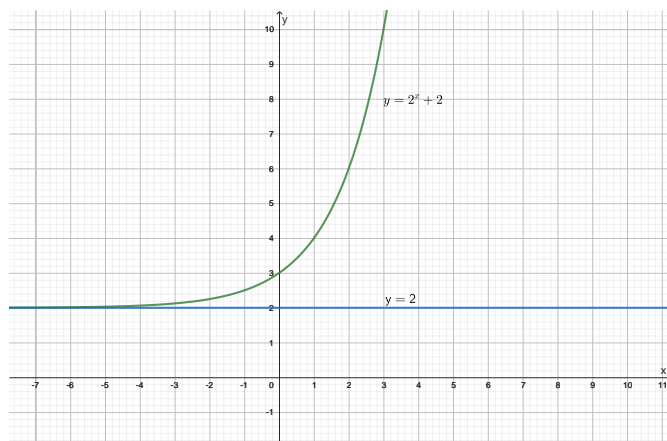


Fig. 6.3

(h) Si rasti (g)-këtu vlerat e y -it të rastit (b) zvogëlohen për -9 . Në këtë rast $x = 2$ është zero e funksionit, d.m.th. grafiku i funksionit e pret boshtin Ox në pikën $x = 2$, ndërsa drejtëza $y = -9$ është asimptotë horizontale e grafikut të funksionit.

(i) Meqenëse $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^{-x} = \left(\frac{4}{3}\right)^x$, d.m.th. baza $a = \frac{4}{3} > 1$, prandaj funksioni është monotono-rritës (fig. 6.4).

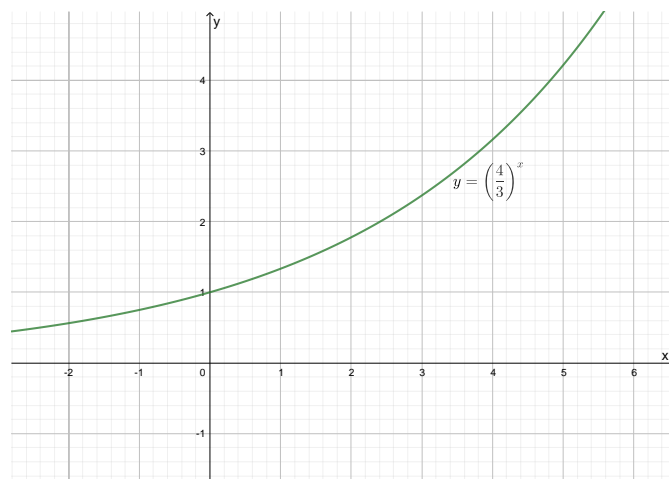


Fig. 6.4

Shembulli 6.7. Të vizatohen grafikët e funksioneve

- (a) $f(x) = 2^{\sqrt{x^2}}$,
- (b) $f(x) = 3^{-\sqrt{x^2}}$,
- (c) $f(x) = |2^x - 1|$,
- (d) $f(x) = 2^{\frac{\sqrt{x^2}}{x}} - 1$,
- (e) $f(x) = 3^{|x|-x}$,
- (f) $f(x) = 5^{x+\sqrt{x^2}}$,
- (g) $f(x) = -3^{x+\sqrt{x^2}}$,
- (h) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$,
- (i) $f(x) = |3^{|x|} - 3|$.

Zgjidhje. (a) Meqenëse $\sqrt{x^2} = |x|$, atëherë $f(x) = 2^{|x|}$. Tani

$$f(x) = 3^{-\sqrt{x^2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{|x|} = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^x, & \text{për } x \geq 0 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}, & \text{për } x \leq 0. \end{cases}$$

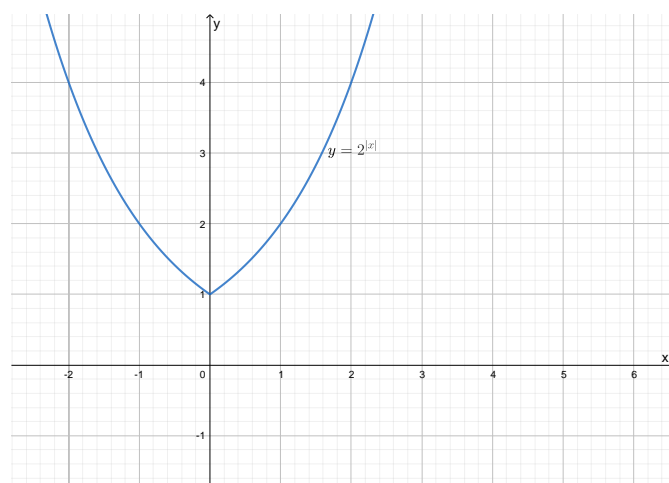


Fig. 6.5

(d) Vlen

$$f(x) = 2^{\frac{\sqrt{x^2}}{x}} - 1 = 2^{\frac{|x|}{x}} - 1 = 2^{\text{sgn } x} - 1 = \begin{cases} 1, & \text{për } x > 0, \\ 2^{-1} - 1 = -\frac{1}{2}, & \text{për } x < 0. \end{cases}$$

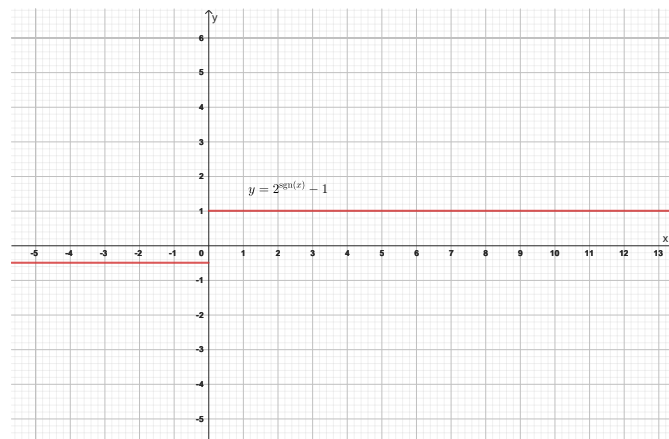


Fig. 6.6

(e) Ngjashëm si më lartë

$$f(x) = 3^{|x|-x} = \begin{cases} 1, & \text{për } x \geq 0 \\ 3^{2x}, & \text{për } x \leq 0. \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{për } x \geq 0 \\ 9^x, & \text{për } x \leq 0. \end{cases}$$

Rastet (f) dhe (g) shqyrtohen ngjashëm si rasti (e).

(h) Funkzioni $f(x) = 2^x + 2^{-x} = 2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x$ është më i madh ose i barabartë me 2 për çdo $x \in \mathbf{R}$. Për $x > 0$ funksioni $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ rritet me shpejtësi më të madhe se 2^x , ndërsa për $x < 0$ rritet me shpejtësi më të madhe se $\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Meqenëse $f(-x) = f(x)$, d.m.th. funksioni është çift, grafiku është simetrik ndaj boshtit Oy .

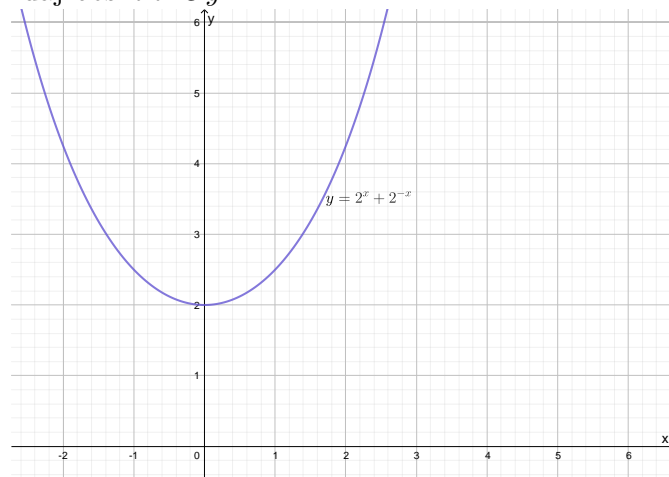


Fig. 6.7

(i) Meqenëse $|3^{|x|} - 3| = 0$ atëherë dhe vetëm atëherë, $|x| = 1$, d.m.th. për $x_1 = -1$ dhe për $x_2 = 1$, atëherë kemi

$$f(x) = |3^{|x|} - 3| = \begin{cases} 3^{-x} - 3, & \text{për } x \in (-\infty, -1] \\ 3 - 3^{-x}, & \text{për } x \in [-1, 1] \\ 3^x - 3, & \text{për } x \in [1, \infty) \end{cases} = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3, & \text{për } x \in (-\infty, -1] \\ 3 - \left(\frac{1}{3}\right)^x, & \text{për } x \in [-1, 1] \\ 3^x - 3, & \text{për } x \in [1, \infty). \end{cases}$$

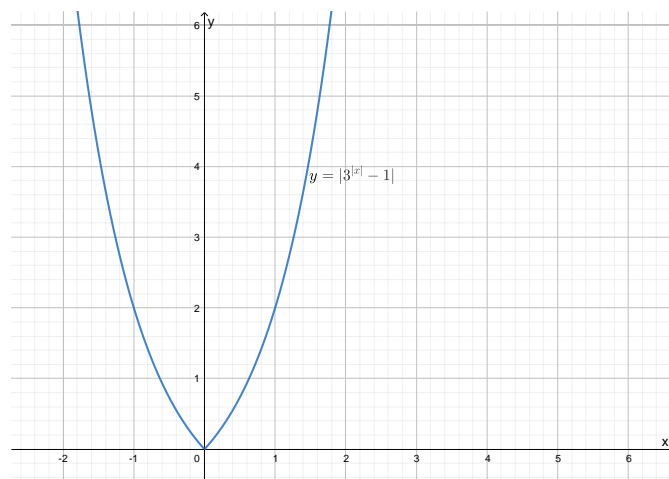


Fig. 6.8

Për zgjidhjen e disa ekuacioneve eksponenciale duhet të shfrytëzojmë edhe metodën grafike.

Shembulli 6.8. Të zgjidhet ekuacioni $2^x - 5 + \frac{x}{2} = 0$.

Zgjidhje. Ekuacioni i dhënë është ekuivalent me ekuacionin $2^x = 5 - \frac{x}{2}$. Nëse i paraqesim grafikisht funksionet $y = 2^x$ dhe $y = 5 - \frac{x}{2}$, atëherë vërejmë se ato priten në pikën $P(2, 4)$. D.m.th. $x = 2$ është zgjidhje e ekuacionit të dhënë.

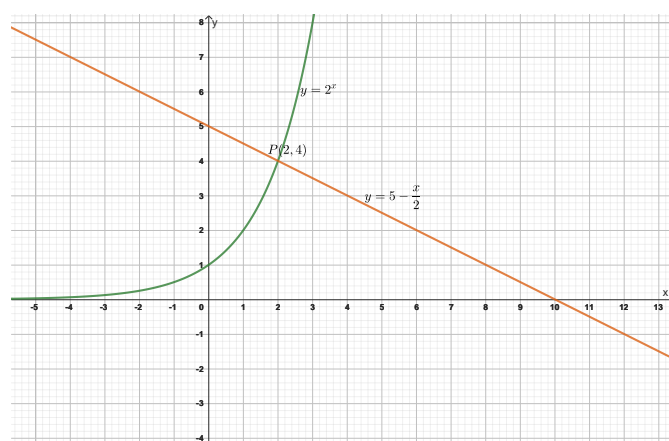


Fig. 6.9

Shembulli 6.9. Të zgjidhet ekuacioni $2^{-|x|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(|x - 1| + |x + 1|)$.

Zgjidhje. 1. Për $x \in (-\infty, -1]$, $x < 0, x - 1 < 0, x + 1 \leq 0$, prandaj $|x| = -x, |x - 1| = -x + 1, |x + 1| = -x - 1$, ndërsa ekuacioni merr formën $2^x = -\frac{x}{\sqrt{2}}$. Pasi t'i paraqesim grafikisht funksionet $f(x) = 2^x$ dhe $g(x) = -\frac{x}{\sqrt{2}}$, prej nga konstatojmë se grafikët e tyre nuk priten për $x \in (-\infty, -1]$, që d.m.th. se ekuacioni i dhënë në këtë interval nuk ka zgjidhje. Pra $B_1 = \emptyset$.

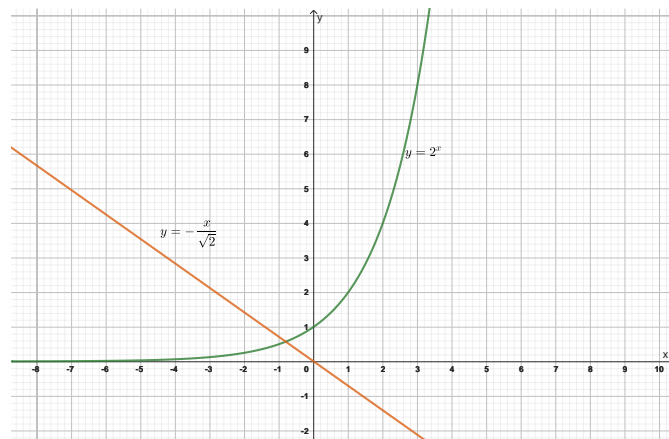


Fig. 6.10

2. Për $x \in [-1, 0]$ $x \leq 0, x - 1 < 0, x + 1 \geq 0$, prandaj $|x| = -x, |x - 1| = -x + 1, |x + 1| = x + 1$, ndërsa ekuacioni merr formën $2^x = \frac{1}{\sqrt{2}} = 2^{-\frac{1}{2}}$, prej nga marrim se $x = -\frac{1}{2}$. Pasi që $x = -\frac{1}{2} \in [-1, 0]$, përfundojmë se është zgjidhje e ekuacionit. Pra $B_2 = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

3. Për $x \in [0, 1]$ $x \geq 0, x - 1 \leq 0, x + 1 \geq 0$, prandaj $|x| = x, |x - 1| = -x + 1, |x + 1| = x + 1$, ndërsa ekuacioni merr formën $2^{-x} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 2^{-\frac{1}{2}}$, prej nga marrim se $x = \frac{1}{2}$. Pasi që $x = \frac{1}{2} \in [0, 1]$, përfundojmë se $\frac{1}{2}$ është zgjidhje e ekuacionit. Pra $B_3 = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

4. Për $x \in [1, \infty)$, $x > 0, x - 1 \geq 0, x + 1 > 0$, prandaj $|x| = x, |x - 1| = x - 1, |x + 1| = x + 1$, ndërsa ekuacioni merr formën $2^{-x} = \frac{x}{\sqrt{2}}$. Pasi t'i paraqesim grafikisht funksionet $f(x) = 2^{-x}$ dhe $g(x) = \frac{x}{\sqrt{2}}$, prej nga konstatojmë se grafikët e tyre nuk priten për $x \in [1, \infty)$, që d.m.th. se ekuacioni i dhënë në këtë interval nuk ka zgjidhje. Pra $B_4 = \emptyset$.

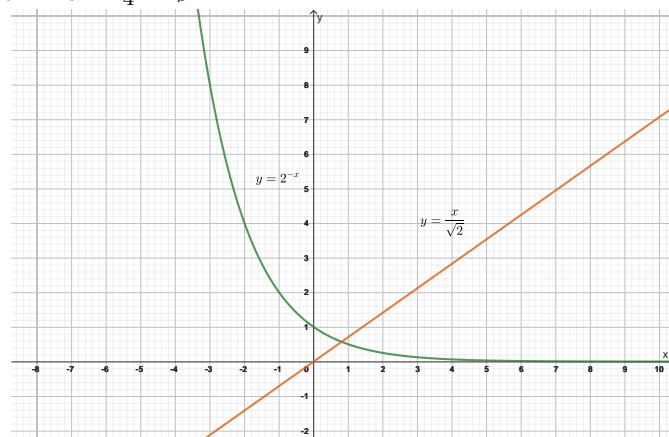


Fig. 6.11

Prandaj bashkësia e zgjidhjeve e ekuacionit të dhënë është $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 = \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}$.

Detyra në lidhje me funksionet eksponenciale

1. Të vizatohen grafikët e funksioneve

$$(a) f(x) = 2^{x-|x|}, \quad (c) f(x) = -2^{\frac{|x|}{x}+x},$$

$$(b) f(x) = -2^{\sqrt{x^2}-x}, \quad (d) f(x) = 2^x - 2^{-x},$$

2. Caktoni fushën e përkufizimit të funksioneve

$$(a) f(x) = \sqrt{27 \cdot 2^x - 8 \cdot 3^x}, \quad (c) f(x) = 2^{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(b) f(x) = \sqrt{3 \cdot 5^x - 5 \cdot 3^x}, \quad (d) f(x) = 3^{\sqrt{16-x^2}} + 5^{\sqrt{x}}.$$

Udhëzim. Shprehja nën rrënjë katrore nuk guxon të jetë negative, p.sh. në rastin (a) duhet që $27 \cdot 2^x - 8 \cdot 3^x \geq 0$, që është ekuivalent me jobarazimin $2^{x-3} \geq 3^{x-3}$, prandaj $x - 3 \leq 0$, respektivisht $x \leq 3$.

6.3. Funkcionet logaritmike dhe vetitë e tyre

Logaritmet për herë të parë i përkufizoi matematikani dhe fizikani skotlandez John Napier (1550–1617) në vitin 1614. Rëndësia e logaritmeve është jashtzakonisht e madhe, jo vetëm në matematikë, por edhe në fizikë, kimi, inxhinieri, financa, etj.

Le të jetë a një numër real i tillë që $a > 0$ dhe $a \neq 1$.

Përkufizim 6.3.1. Pasqyrimi $\log_a : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ i përkufizuar në këtë mënyrë

$$\log_a x = y \iff a^y = x, \quad (1)$$

quhet funksion logaritmik me bazë a . Kështu, për një numër pozitiv x , do të themi se $\log_a x = y$ atëherë dhe vetëm atëherë, nëse $a^y = x$. Numri $\log_a x$ quhet logaritmi me bazë a i numrit x .

Verejmë se funksioni logaritmik është një funksion invers i funksionit eksponencial.

Shembulli 6.10. Në bazë të përkufizimit 6.3.1, vlen $\log_2 2 = 1$ sepse $2^1 = 2$; $\log_2 4 = 2$ sepse $2^2 = 4$; $\log_2 8 = 3$ sepse $2^3 = 8$; $\log_2 1 = 0$ sepse $2^0 = 1$; $\log_2 \frac{1}{4} = -2$ sepse $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$; $\log_3 1 = 0$ sepse $3^0 = 1$; $\log_3 9 = 2$ sepse $3^2 = 9$; $\log_3 27 = 3$ sepse $3^3 = 27$; $\log_3 \frac{1}{81} = -4$ sepse $3^{-4} = \frac{1}{81}$; $\log_{10} 100 = 2$ sepse $10^2 = 100$; $\log_{10} 10000 = 4$ sepse $10^4 = 10000$; $\log_{10} 0.001 = -3$ sepse $10^{-3} = 0.001$; $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$ sepse $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$, $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = 4$ sepse $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$, etj.

Nëse baza a e logaritmit është e barabartë me 10, logaritmet quhen të *Briggsit* (Henry Briggs (1561-1630) matematikan britanik) dhe simbolikisht shënohen me \log ; nëse baza a është e barabartë me numrin irracional $e = 2,718\dots$, atëherë logaritmet quhen *natyrore* dhe simbolikisht shënohen me \ln dhe nëse baza a është e barabartë me numrin 2, atëherë logaritmet quhen *binare* dhe simbolikisht shënohen me \lg . Njëhësimi i logaritmit të ndonjë numri pozitiv është proces mjaft i ndërlikuar dhe për këtë shpesh nevojitet ndihma e ndonjë tabele logaritmike, kalkulatori elektronik, apo zbërthimet e funksioneve logaritmike. P.sh. zbërthimi i funksionit $f(x) = \ln(1+x)$ në seri plomiale, duke shfrytëzuar serinë e Maclaurin-t (Colin Maclaurin (1698-1746), matematikan skotlandez) është

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1].$$

Zbërthimi i mësipërm vlen vetëm për $x \in (-1, 1]$, ndërsa llogaritja e logaritmeve për vlera tjera bëhet duke shfrytëzuar vetitë e logaritmeve dhe zbërthimin e mësipërm. P.sh.

$$\ln 3 = -\ln 3^{-1} = -\ln \left(1 + \frac{-2}{3} \right) = - \left(\frac{-2}{3} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-2}{3} \right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-2}{3} \right)^3 - \dots \right),$$

kurse $\frac{-2}{3} \in (-1, 1]$. D.m.th. në zbërthimin e mësipërm, x -in e zëvendsojmë me $\frac{-2}{3}$.

Vetitë e funksioneve logaritmike

1. Nga përkufizimi shihet qartë se funksioni është i përkufizuar vetëm në intervalin $(0, \infty)$.

2. Vlen $f(x) = \log_a x = 0$ atëherë dhe vetëm atëherë, kur $x = 1$. D.m.th. grafiku i funksionit e pret boshtin Ox në pikën $x = 1$. Në lidhje me shenjën dallojmë dy raste:

(a) Nëse $a > 1$, atëherë për $x \in (0, 1)$ funksioni është negativ, ndërsa për $x \in (1, \infty)$ funksioni është pozitiv.

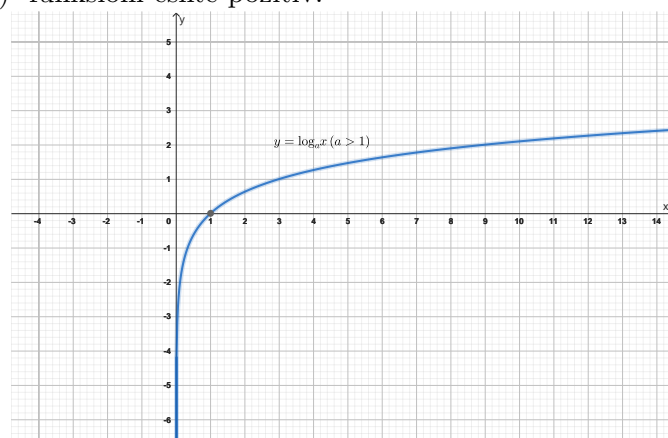


Fig. 6.12 a)

(b) Nëse $0 < a < 1$, atëherë për $x \in (0, 1)$ funksioni është pozitiv, ndërsa për $x \in (1, \infty)$ funksioni është negativ.

3. Nëse $a > 1$ ($a < 1$) funksioni $f(x) = \log_a x$ është monotono-rritës (monotono-zvogëlues) dhe kur x tenton kah nga ana e djathtë e zeros ("zeroja pozitive") vlera e funksionit tenton në $-\infty$ ($+\infty$). D.m.th. boshti Oy shërben si asimptotë vertikale. 2).

2) Drejtëza $x = a$ quhet asimptotë vertikale e funksionit $y = f(x)$ nëse kur $x \rightarrow a$ (të paktën nga njëra anë e a -së), vlera e funksionit tenton në $+\infty$, ose $-\infty$

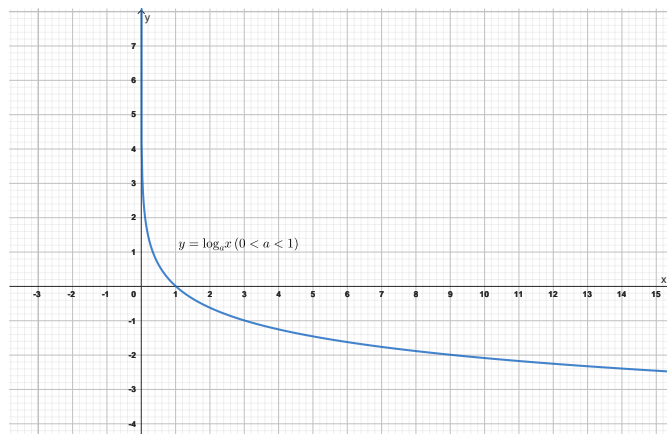


Fig. 6.12 b)

Shembulli 6.11. Të vizatohen grafikët e funksioneve logaritmike

$$\begin{array}{lll}
 (a) \ y = \log_2 x, & (d) \ y = \log_{\frac{1}{2}} x, & (h) \ y = \log_2 x + 1, \\
 (b) \ y = \log_3 x, & (e) \ y = \log_{\frac{1}{3}} x, & (i) \ y = \log_3 x - 2, \\
 (c) \ y = \log_4 x, & (f) \ y = \log_{\frac{1}{4}} x, & (j) \ y = \log_4(x - 1).
 \end{array}$$

(a) Funkzioni $y = \log_2 x$ është i përkufizuar për çdo $x \in \mathbf{R}$. Zero e tij është $x = 1$. Meqenëse baza e logaritmit $a = 2 > 1$, atëherë funksioni është monotono-rritës, ndërsa për $x \in (0, 1)$ është negativ, kurse për $x \in (1, \infty)$ është pozitiv.



Fig. 6.13

Rastet (b) dhe (c) janë të ngjashëm me atë në rastin (a), duhet pasur parasysh pozitën reciproke të grafikëve të tyre. P.sh. grafiku i funksionit $y = \log_2 x$ është nën grafikun e funksionit $y = \log_3 x$ për $x \in (0, 1]$, ndërsa për $x \in (1, \infty)$ grafiku i funksionit $y = \log_2 x$ është mbi grafikun e funksionit $y = \log_3 x$ (fig. 6.13). (Arsyetoni pse?). Në pozitë të ngjashme ndodhen grafikët e funksioneve $y = \log_3 x$ dhe $y = \log_4 x$ (fig. 6.13).

Funksionet e rasteve (d), (e) dhe (f) shqyrtohen në mënyrë analoge dhe te tri këto funksione janë monotono-zvogëluese. Analizoni pozitën reciproke të grafikëve të tyre.

Grafikët e funksioneve në rastet (g), (h) dhe (i) ndërtohen duke i zhvendosur përgjatë boshtit Oy grafikët e funksioneve të rasteve (a), (b) dhe (c) respektivisht.

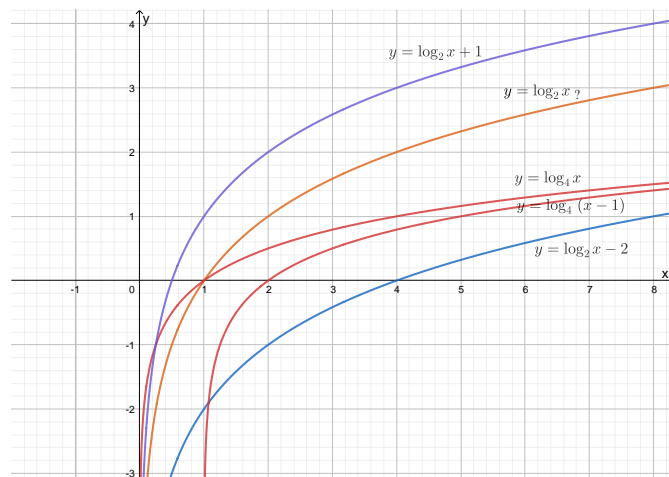


Fig. 6.14

Shembulli 6.12. Të vizatohen grafikët e funksioneve

- (a) $y = \log_2(-x)$,
- (b) $y = \log_{\frac{1}{2}}(-x)$,
- (c) $y = \log_2 x^2$,
- (d) $y = \log_2 x^3$,
- (e) $y = |\log_2 x - 1|$,
- (f) $y = |\log_{\frac{1}{2}} x - 2|$.

(a) Funksioni është i përkufizuar për çdo $x \in (-\infty, 0)$ dhe është monotono-zvogëlues (fig. 6.15).

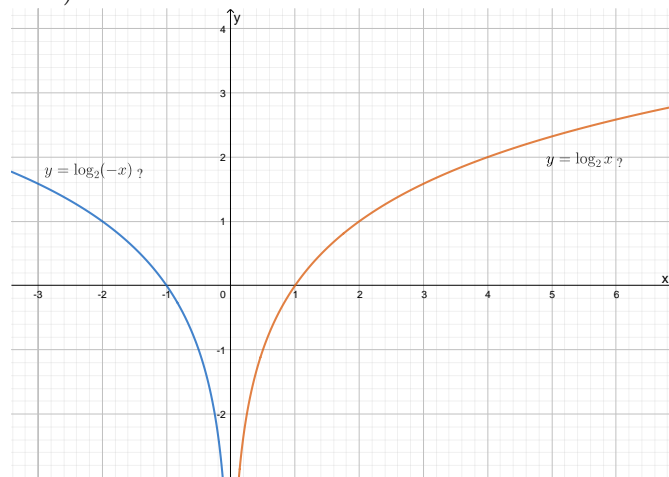


Fig. 6.15

(b) Funksioni është i përkufizuar për çdo $x \in (-\infty, 0)$ dhe është monotono-zvogëlues (fig. 6.16).

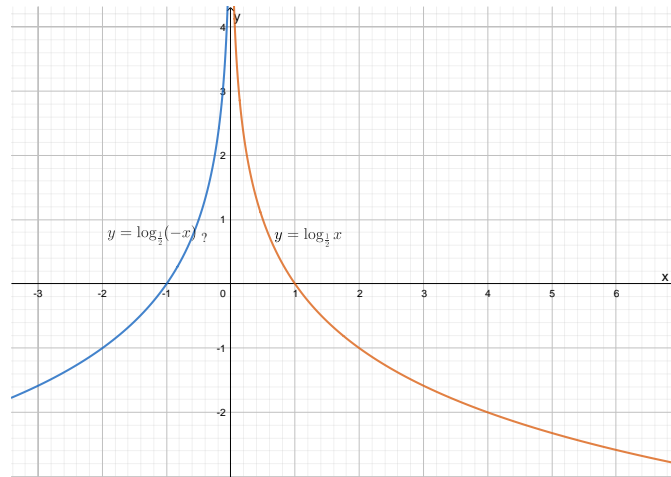


Fig. 6.16

(c) Funkzioni është i përkufizuar për çdo $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ dhe vlen barazimi $y = 2 \log_2 |x|$. Tani

$$y = 2 \log_2 |x| = \begin{cases} 2 \log_2 x, & \text{për } x > 0, \\ 2 \log_2(-x), & \text{për } x < 0. \end{cases}$$

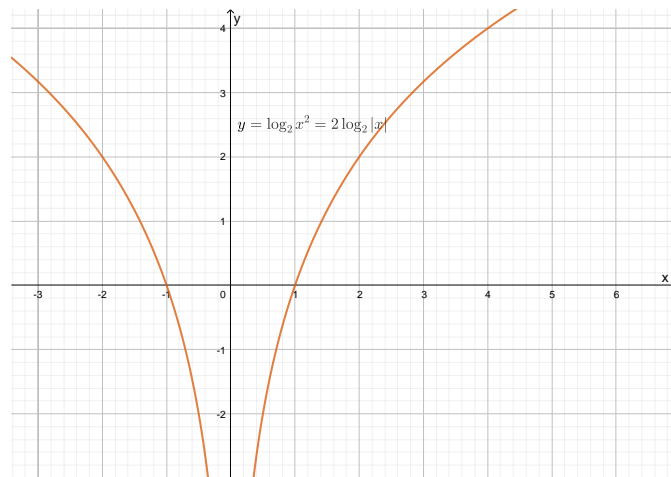


Fig. 6.17

(d) Funkzioni është i përkufizuar për çdo $x \in (0, \infty)$ dhe vlen barazimi $y = 3 \log_2 x$. Grafiku është i dhënë në fig. 6.18.

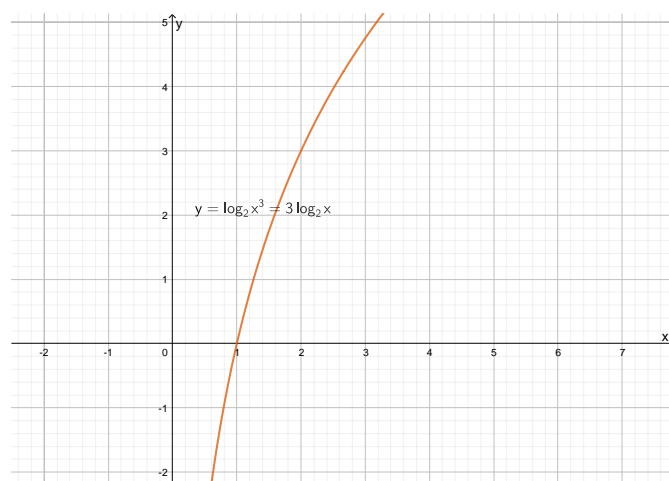


Fig. 6.18

(e) Funksioni është i përkufizuar për çdo $x \in (0, \infty)$ dhe kemi

$$y = |\log_2 x - 1| = \begin{cases} \log_2 x - 1, & \text{për } \log_2 x - 1 \geq 0 \\ -(\log_2 x - 1), & \text{për } \log_2 x - 1 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \log_2 x - 1, & \text{për } \log_2 x \geq 1 \\ -(\log_2 x - 1), & \text{për } \log_2 x \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} \log_2 x - 1, & \text{për } x \geq 2 \\ 1 - \log_2 x, & \text{për } 0 < x \leq 2. \end{cases}$$

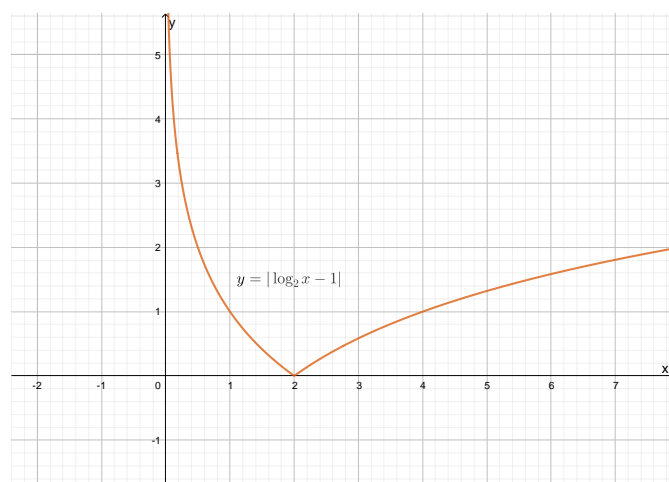


Fig. 6.19

(f) Ngjashëm si në rastin (e), funksioni është i përkufizuar për çdo $x \in (0, \infty)$ dhe vlen

$$y = |\log_{\frac{1}{2}} x - 2| = \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x - 2, & \text{për } \log_{\frac{1}{2}} x - 2 \geq 0 \\ -(\log_{\frac{1}{2}} x - 2), & \text{për } \log_{\frac{1}{2}} x - 2 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x - 2, & \text{për } \log_{\frac{1}{2}} x \geq 2 \\ -(\log_{\frac{1}{2}} x - 2), & \text{për } \log_{\frac{1}{2}} x \leq 2 \end{cases} = \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x - 2, & \text{për } 0 < x \leq \frac{1}{4} \\ 1 - \log_{\frac{1}{2}} x, & \text{për } x \geq \frac{1}{4}. \end{cases}$$

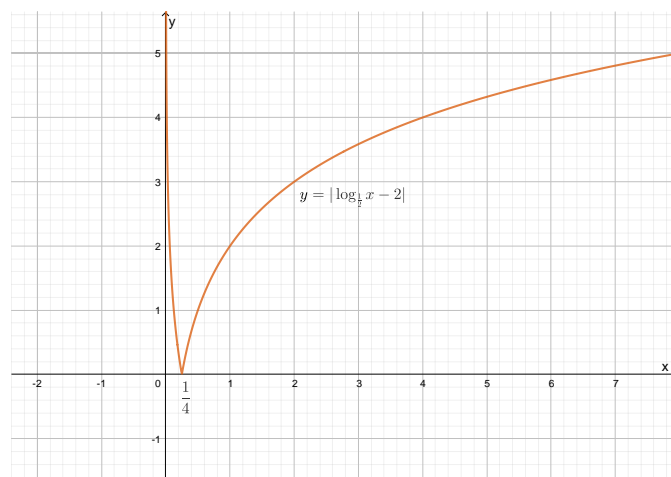


Fig. 6.20

Vetitë e logaritmeve

Vlejnë këto veti të logaritmeve:

- (a) $\log_a(m \cdot n) = \log_a m + \log_a n, \quad m, n > 0,$
- (b) $\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n, \quad m, n > 0,$
- (c) $\log_a m^n = n \cdot \log_a m, \quad m > 0, n \in \mathbf{R},$
- (d) $\log_a \sqrt[n]{m} = \frac{1}{n} \log_a m, \quad m > 0, n \neq 0,$
- (e) $\log_a b \cdot \log_b a = 1, \quad a, b > 0, a \neq 1 \neq b,$
- (f) $\log_a a^x = x, \quad a > 0, a \neq 1, x \in \mathbf{R},$
- (g) $a^{\log_a x} = x, \quad a > 0, a \neq 1, x > 0,$
- (h) $\log_a b = \log_{a^m} b^m, \quad a > 0, a \neq 1, b > 0, m \in \mathbf{R}; m \neq 0,$
- (i) $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b, \quad a > 0, a \neq 1, b > 0, \alpha \in \mathbf{R}; \alpha \neq 0,$
- (j) $\log_a m = \frac{\log_b m}{\log_b a}, \quad a, b > 0, a \neq 1 \neq b, m > 0.$

Zgjidhje. (a) Le të jetë $\log_a m = x$ dhe $\log_a n = y$. Atëherë $a^x = m$ dhe $a^y = n$. Tani $a^x \cdot a^y = m \cdot n$, respektivisht $a^{x+y} = m \cdot n$. Në bazë të përkufizimit të logaritmit marrim se $\log_a m \cdot n = x + y = \log_a m + \log_a n$, çka edhe duhej treguar.

Në mënyrë të ngjashme arsyetohen vetitë tjera (provoni!). Këto veti duhet mbajtur në mend, sepse ato kanë rëndësi të madhe në matematikë dhe shpesh zbatohen.

Shembulli 6.13. Pa përdorur tabelën logaritmike apo kalkulatorin, njehsoni

- (a) $\log_2 \frac{1}{128}$, (d) $\log_{\sqrt{2}} 8$, (g) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 8$,
 (b) $\log_3 \frac{1}{81}$, (e) $\log_{\sqrt{3}} 81$, (h) $\log_2 \sqrt[3]{512}$,
 (c) $\log_{0.1} 1000$, (f) $\log_{0.1} 0.0001$, (i) $\log_a \sqrt[5]{a^2}$ ($a > 0, a \neq 1$).

Zgjidhje. (a) Vlen $\log_2 \frac{1}{128} = \log_2 2^{-7} = -7$.

(b) Ngjashëm, $\log_3 \frac{1}{81} = \log_3 3^{-4} = -4$.

(c) $\log_{0.1} 1000 = \log_{0.1} (0.1)^3 = 3$.

(d) Vlen $\log_{\sqrt{2}} 8 = \log_{\sqrt{2}} (\sqrt{2})^6 = 6$.

(e) Vlen $\log_{\sqrt{3}} 81 = \log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^8 = 8$.

(f) Vlen $\log_{0.1} 0.0001 = \log_{0.1} (0.1)^{-4} = -4$.

(g) Vlen $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 8 = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-6} = -6$.

(h) Meqenëse $512 = 2^9$, atëherë $\log_2 \sqrt[3]{512} = \log_2 \sqrt[3]{2^9} = \log_2 2^3 = 3$.

(i) Vlen $\log_a \sqrt[5]{a^2} = \log_a a^{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5}$.

Shembulli 6.14. Caktoni bashkësinë $A = \{\log_4 x | x \in B\}$, ku $B = \left\{ \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2, 4, 16 \right\}$.

Zgjidhje. Vlen $\log_4 \frac{1}{16} = \log_4 4^{-2} = -2$, $\log_4 \frac{1}{8} = \log_{\sqrt{4}} \sqrt{\frac{1}{8}} = \log_2 2^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}$. Ngjashëm marrim se $\log_4 \frac{1}{4} = -1$, $\log_4 \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$, $\log_4 2 = \frac{1}{2}$, $\log_4 4 = 1$ dhe $\log_4 16 = 2$. Prandaj $A = \left\{ -2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2 \right\}$.

Shembulli 6.15. Është e qartë se $3^{\log_3 81} = 81$, $10^{\log_{10} 1000} = 1000$, $2^{\log_2 512} = 512$, $\log_2 2^{50} = 50$, $\log_{\frac{1}{2}} 2^4 = -4$.

Shembulli 6.16. Njehsoni

- (a) $3 \log_5 25 + 2 \log_3 27 - 4 \log_2 8$,
 (b) $\frac{5}{4} \log_3 81 + 3 \log_{\frac{1}{2}} 16 - 2 \log_2 \frac{1}{32} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$,
 (c) $\log_3 81 \cdot \log_3 \frac{1}{27} \cdot \log_2 16 \cdot \log_2 8$,
 (d) $\log_2 16 \cdot \log_2 8 \cdot \log_2 4 \cdot \log_2 2 \log_2 1$.

Shembulli 6.17. Duke i shfrytëzuar vetitë e logaritmeve, logaritmoni shprehjet që vijojnë. Për bazë të logaritmit merrni p.sh. numrin 10.

$$\begin{array}{ll}
 (a) \frac{4a^2\sqrt{7}}{5b^2\sqrt[3]{2}}, & a, b \neq 0, \\
 (b) \frac{8a^4\sqrt{b}}{c^3\sqrt[3]{17}}, & a, c \neq 0, b > 0 \\
 (c) \sqrt[4]{\frac{3a^2}{5b^3c^7}}, & a, b, c \neq 0, \\
 (d) \frac{3a^2b}{c^2\sqrt[4]{de^3}}, & a, c, d, e \neq 0, b > 0, \\
 (e) S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, & a, b, c \text{ janë} \\
 & \text{gjatësitë e brinjëve të një trekëndëshi, ndërsa} \\
 & s = \frac{a+b+c}{2}, \\
 (f) V = \frac{a^2H\sqrt{3}}{4}, & a, H > 0.
 \end{array}$$

Zgjidhje. (a) Vlen

$$\begin{aligned}
 \log \frac{4a^2\sqrt{7}}{5b^2\sqrt[3]{2}} &= \log 4a^2\sqrt{7} - \log 5b^2\sqrt[3]{2} \\
 &= \log 4 + \log a^2 + \log \sqrt{7} - (\log 5 + \log b^2 + \log \sqrt[3]{2}) \\
 &= \log 4 + 2 \log |a| + \frac{1}{2} \log 7 - \log 5 - 2 \log |b| - \frac{1}{3} \log 2.
 \end{aligned}$$

Duhet pasur parasysh se $\log_a x^2 = 2 \log_a |x|$.

Ngjashëm, kemi

$$\begin{array}{l}
 (b) \log \frac{8a^4\sqrt{b}}{c^3\sqrt[3]{17}} = \log 8 + 4 \log |a| + \frac{1}{2} \log b - 3 \log c - \frac{1}{3} \log 17, \\
 (c) \log \sqrt[4]{\frac{3a^2}{5b^3c^7}} = \frac{1}{4}(\log 3 + \log |a| - \log 5 - 3 \log |b| - 7 \log |c|), \\
 (d) \log \frac{3a^2b}{c^2\sqrt[4]{de^3}} = \log 3 + 2 \log |a| + \log b - (2 \log |c| + \frac{1}{4} \log |d| + 3 \log |e|), \\
 (e) \log S = \log \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{1}{2}(\log s + \log(s-a) + \log(s-b) + \\
 + \log(s-c)), \\
 (f) \log V = \log \frac{a^2H\sqrt{3}}{4} = 2 \log a + \log H + \frac{1}{2} \log 3 - 2 \log 2.
 \end{array}$$

Shembulli 6.18. Nëse Q_0 është sasia e radiumit për kohën e fillimit $t = 0$, atëherë njehsoni kohën e gjysmëzbërthimit të tij. Për njësi kohore të merret shekulli.

Zgjidhje. Sasia e mbetur e elementeve radioaktive pas kohës t përshkruhet me funksionin eksponencial $Q(t) = Q_0 e^{-\alpha t}$, ku α është konstantë dhe ka vlera të ndryshme për elemente të ndryshme. P.sh. për radiumin $\alpha = 0.038$.

D.m.th. $\frac{Q_0}{2} = Q_0 e^{-\alpha t}$, respektivisht $-\ln 2 = -\alpha t$. Përfundimisht $t = \frac{\ln 2}{\alpha} = 18.24$ shekuj.

6.4. Ekuacionet dhe inekuacionet logaritmike

Përkufizim 6.4.1. Çdo ekuacion (inekuacion) tek i cili e panjohura ndodhet nën shenjën e ndonjë logaritmi quhet ekuacion (inekuacion) logaritmik.

Shembulli 6.19. Të zgjidhen ekuacionet logaritmike

- (a) $\log x = \log 4 + 2 \log 5 + \log 6 - \log 15$,
- (b) $3 \log x + \frac{1}{2} \log a = 3 \log b + \log c, \quad a, b, c > 0$,
- (c) $2 \log x - 3 \log a = \log 5 + \log b + \frac{1}{2} \log c, \quad a, b, c > 0$,
- (d) $\log(5 - x) + 2 \log \sqrt{3 - x} = 1$,
- (e) $\log(5 - x) - \frac{1}{3} \log(35 - x^3) = 0$,
- (f) $\log(x^2 + 19) - \log(x - 8) = 2$.

Zgjidhje. (a) Duke i shfrytëzuar vetitë e logaritmeve kemi

$$\log x = \log 4 + 2 \log 5 + \log 6 - \log 15 \iff \log x = \log \frac{4 \cdot 5^2 \cdot 6}{15}$$

$$x = 40.$$

(b) Vlen

$$3 \log x + \frac{1}{2} \log a = 3 \log b + \log c \iff \log x^3 \cdot \sqrt{a} = \log b^3 \cdot c$$

$$x^3 \cdot \sqrt{a} = b^3 \cdot c$$

$$x = b^3 \sqrt{\frac{c}{\sqrt{a}}}.$$

(c) Vlen

$$2 \log x - 3 \log a = \log 5 + \log b + \frac{1}{2} \log c$$

$$\log \frac{x^2}{a^3} = \log 5b\sqrt{c}$$

$$\frac{x^2}{a^3} = 5b\sqrt{c}$$

$$x^2 = 5a^3 b \sqrt{c}$$

$$x = \sqrt{5a^3 b \sqrt{c}}.$$

(d) Së pari duhet përcaktuar bashkësinë në të cilën mund të ndodhet zgjidhja e ekuacionit. D.m.th.

$$\left. \begin{array}{l} 5 - x > 0 \\ 3 - x > 0 \end{array} \right\} \sim \left. \begin{array}{l} x < 5 \\ x < 3 \end{array} \right\} \sim x \in (-\infty, 3).$$

D.m.th. zgjidhjen e ekuacionit e kërkojmë në intervalin $(-\infty, 3)$. Tani për $x \in (-\infty, 3)$ ekuacioni i dhënë është ekuivalent me ekuacionin $\log(5-x)(3-x) = \log 10$. Ky i fundit është ekuivalent me ekuacionin $(5-x)(3-x) = 10$, zgjidhjet e të cilit janë $x_1 = 4 - \sqrt{11}$ dhe $x_2 = 4 + \sqrt{11}$. Meqenëse $x_1 \in (-\infty, 3)$, ndërsa $x_2 \notin (-\infty, 3)$, atëherë përfundojmë se vetëm $x_1 = 4 - \sqrt{11}$ është zgjidhje e ekuacionit.

(e) Ngjashëm si më lartë, $5 - x > 0$ dhe $35 - x^3 > 0$. D.m.th. $x < 5$ dhe $(\sqrt[3]{35} - x)(\sqrt[3]{35}^2 + x\sqrt[3]{35} + x^2)$. Meqë trinomi $\sqrt[3]{35}^2 + x\sqrt[3]{35} + x^2$ është pozitiv për çdo $x \in \mathbf{R}$ (pse?), atëherë $x < \sqrt[3]{35}$. D.m.th. $x < 5$ dhe $x < \sqrt[3]{35}$, respektivisht $x < \sqrt[3]{35}$.

Tani, për $x \in (-\infty, \sqrt[3]{35})$ ekuacioni i dhënë është ekuivalent me ekuacionin $(5-x)^3 = 35 - x^3$, respektivisht $x^2 - 5x + 6 = 0$ zgjidhjet e të cilit janë $x_1 = 3$ dhe $x_2 = 2$. Meqenëse këto vlera i takojnë intervalit $(-\infty, \sqrt[3]{35})$, përfundojmë se të dy këto vlera janë zgjidhje të ekuacionit. Pra bashkësia e zgjidhjeve e ekuacionit të dhënë është $B = \{3, 2\}$.

(f) Meqenëse $x^2 + 19 > 0$, atëherë $x - 8 > 0$, d.m.th. $x > 8$. Pra, për $x \in (8, \infty)$ ekuacioni i dhënë është ekuivalent me barazimin $x^2 + 19 = 100(x - 8)$. Zgjidhjet e këtij të fundit janë $x_1 = 9$ dhe $x_2 = 91$. Pra bashkësia e zgjidhjeve është $B = \{9, 91\}$.

Shembulli 6.20. Të zgjidhen ekuacionet

$$\begin{array}{ll} (a) & 0.1 \cdot x^{\log x - 1} = 10, \\ (b) & x^{2 \log^2 x} = 10x^3, \\ (c) & x^{\log x} = 100x, \end{array} \quad \begin{array}{ll} (d) & \log_3^2 x - 3 \log_3 x + 2 = 0, \\ (e) & \log_2 x + \log_x 2 = \frac{5}{2}, \\ (f) & \log_2 \log_2 x = \log_2 3 + \log_2 4, \end{array}$$

Zgjidhje. (a) Për $x > 0$ ekuacioni i dhënë është ekuivalent me ekuacionin $x^{\log x - 1} = 10^2$. Logaritmojmë anë për anë dhe marrim ekuacionin $(\log x - 1) \cdot \log x = 2$. Tani zëvendësojmë $t = \log x$ dhe ekuacioni transformohet në një ekuacion kuadratik $(t - 1)t = 2$, zgjidhjet e të cilit janë $t_1 = -1$ dhe $t_2 = 2$, ndërsa në lidhje me x janë $x_1 = 10^{-1} = 0.1$ dhe $x_2 = 10^2 = 100$. Meqenëse $x_1, x_2 > 0$, atëherë të dy këto vlera janë zgjidhje të ekuacionit.

(b) Për $x > 0$ ekuacioni i dhënë është ekuivalent me ekuacionin $2 \log^2 x \cdot \log x = 1 + 3 \log x$. Tani zëvendësojmë $t = \log x$ dhe ekuacioni transformohet në një ekuacion të shkallës së tretë $2t^3 - 3t - 1 = 0$. E faktorizojmë polinomin në anën e majtë dhe marrim $(t + 1)(2t^2 - 2t + 1) = 0$. Meqenëse trinomi $2t^2 - 2t + 1$ është pozitiv për çdo $t \in \mathbf{R}$, atëherë e vetmja zgjidhje e ekuacionit të fundit është $t = -1$, respektivisht $x = 10^{-1} = 0.1$.

(c) Për $x > 0$ ekuacioni i dhënë është ekuivalent me ekuacionin $\log^2 x - \log x - 2 = 0$. Tani zëvendësojmë $t = \log x$ dhe ekuacioni transformohet në një ekuacion të shkallës dytë $t^2 - t - 2 = 0$, zgjidhjet e të cilit janë $t_1 = -1$ dhe $t_2 = 2$, ndërsa në lidhje me x janë $x_1 = 10^{-1} = 0.1$ dhe $x_2 = 10^2 = 100$. Meqenëse $x_1, x_2 > 0$, atëherë të dy këto vlera janë zgjidhje të ekuacionit.

(d) Ngjashëm, si në rastet e mësipërme zëvendësojmë $\log x = t$. Zgjidhjet janë $x_1 = 10$ dhe $x_2 = 100$.

(e) Duke shfrytëzuar vetinë se $\log_a b \cdot \log_b a = 1$, $a, b > 0, a, b \neq 1$, atëherë për $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ dhe pas zëvendësimit $\log_2 x = t$ marrim ekuacionin $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$, respektivisht $2t^2 - 5t + 2 = 0$. Zgjidhjet e këtij të fundit janë $t_1 = \frac{1}{2}$ dhe $t_2 = 2$, ndërsa në lidhje me x janë $x_1 = \sqrt{10}$ dhe $x_2 = 100$.

(f) Për $\log_2 x > 0$, d.m.th. për $x > 1$ vlen

$$\log_2 \log_2 x = \log_2 3 + \log_2 4 \iff \log_2 x = 12 \iff x = 2^{12} = 4096.$$

Shembulli 6.21 Të zgjidhen ekuacionet që vijojnë

- (a) $\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = 7$,
- (b) $5^{2 \log_5 2 + x} - 2 = 5^{x + \log_5 2}$,
- (c) $\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \log_{81} x = \frac{2}{3}$,
- (d) $\log_5 (2^{1.5x - 2.5} + 2^{1.5x - 0.5} - 0.01 \cdot 5^{3x + 1}) = 3x - 1$,
- (e) $\log x + \log x^2 + \log x^3 + \dots + \log x^{100} = 5050$,
- (f) $\log_7(6 + 7^{-x}) = 1 + x$.

(a) Për $x > 0$, ekuacioni i dhënë është ekuivalent me ekuacionin $\log_{16} x^4 + \log_{16} x^2 + \log_{16} x = 7$, respektivisht $\log_{16} x^7 = \log_{16} 16^7$, prej nga marrim se $x^7 = 16^7$, prej nga marrim se $x = 16$.

(b) Vlen

$$5^{2 \log_5 2 + x} - 2 = 5^{x + \log_5 2} \iff 5^{\log_5 4} \cdot 5^x - 2 = 5^x \cdot 5^{\log_5 2}$$

$$4 \cdot 5^x - 2 = 2 \cdot 5^x \iff 5^x = 1 \iff x = 0.$$

(c) Vlen

$$\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \log_{81} x = \frac{2}{3} \iff \frac{1}{\log_x 3} \cdot \frac{1}{\log_x 9} \cdot \frac{1}{\log_x 27} \cdot \frac{1}{\log_x 81} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{24 \cdot \log_x^4 3} = \frac{2}{3} \iff \log_x^4 3 = \frac{1}{16}$$

$$\log_x 3 = \pm \frac{1}{2} \iff x^{\pm \frac{1}{2}} = 3$$

$$\iff x_1 = \frac{1}{9}, x_2 = 9.$$

(d) Vlen

$$\begin{aligned} \log_5 (2^{1.5x-2.5} + 2^{1.5x-0.5} - 0.01 \cdot 5^{3x+1}) &= 3x - 1 \iff \\ 2^{1.5x-2.5}(1 + 2^2) - 2^{-2}5^{-2}5^{3x+1} &= 5^{3x-1} \\ 5 \cdot 2^{1.5x-2.5} &= 2^{-2}5^{3x-1} + 5^{3x-1} \iff 2^{1.5x-0.5} = 5^{3x-1} \\ (\sqrt{2})^{3x-1} &= 5^{3x-1} \iff 3x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

(e) Për $x > 0$, ekuacioni i dhënë është ekuivalent me ekuacionin $\log(x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdots x^{100}) = 5050$. Tani, duke i shfrytëzuar vetitë e fuqive dhe ato të logaritmeve, kemi

$$\log x^{1+2+\cdots+100} = 5050 \iff \log x^{5050} = 5050 \iff x^{5050} = 10^{5050} \iff x = 10.$$

Vërejtje 6.4. Këtu kemi shfrytëzuar formulën $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, ($n \in \mathbf{N}$).

Vërejtje 6.5. Ky rezultat edhe mund të përgjithësohet si vijon

$$\log x + \log x^2 + \log x^3 + \cdots + \log x^n = \frac{n(n+1)}{2} \iff x = 10.$$

(f) Vlen

$$\begin{aligned} \log_7(6 + 7^{-x}) = 1 + x &\iff 6 + 7^{-x} = 7^{1+x} \iff 6 + 7^{-x} = 7 \cdot 7^x \\ &\iff 6 + \frac{1}{7^x} = 7 \cdot 7^x. \end{aligned}$$

Tani zëvendësojmë $7^x = t$ dhe ekuacioni transformohet në një ekuacion kuadratik $7t^2 - 6t - 1 = 0$, zgjidhjet e të cilit janë $t_1 = -\frac{1}{7}$ dhe $t_2 = 1$. Meqenëse $t = 7^x > 0$, atëherë zgjidhje është vetëm $t_2 = 1$, respektivisht $x = 0$.

Shembulli 6.22. Të zgjidhen ekuacionet që vijojnë

- (a) $x + \log(1 + 2^x) = x \log 5 + \log 6$,
- (b) $\log_{\sqrt{5}}(4^x - 6) - \log_{\sqrt{5}}(2^x - 2) = 2$,
- (c) $x^{\log x} = 16 \left(6x^{\log \sqrt{x}} + 25 \right)$,
- (d) $\log_3(28 - 3^x) = 2^{\log_2(3-x)}$,
- (e) $x^2 \cdot \log_3 x^2 - (2x^2 + 3) \cdot \log_9(2x + 3) = 3 \cdot \log_3 \frac{x}{2x + 3}$,
- (f) $\log_2(x^2 + 2x - 8) \cdot \log_{x^2 - 6x + 9} 4 = 1$,
- (g) $\log_{3x+7}(9 + 12x + 4x^2) + \log_{2x+3}(6x^2 + 23x + 21) = 4$,
- (h) $7^{\log x} - 5^{\log x+1} = 3 \cdot 5^{\log x-1} - 13 \cdot 7^{\log x-1}$,
- (i) $2^{2 \log x-1} - 7^{\log x} = 7^{\log x-1} - 3 \cdot 4^{\log x}$,
- (j) $x^{1+\log_3 x} = 3x$.

Zgjidhje. (a) Meqenëse $2^x > 0$, atëherë $1 + 2^x > 1 > 0$ për çdo $x \in \mathbf{R}$, ndërsa $x = \log 10^x$. Tani ekuacioni i dhënë është ekuivalent me ekuacionin $\log 10^x(1 + 2^x) = \log 5^x \cdot 6$, respektivisht $10^x(1 + 2^x) = 5^x \cdot 6$. Pas pjesëtimit anë për anë me 5^x marrim ekuacionin $2^x(1 + 2^x) = 6$. Pas zëvendësimit $2^x = t > 0$, ekuacioni kalon në një ekuacion kuadratik $t(1 + t) = 6$, zgjidhjet e të cilit janë $t_1 = -3$ dhe $t_2 = 2$. Meqenëse $t = 2^x > 0$, atëherë zgjidhje e ekuacionit është vetëm $t = 2$, respektivisht $x = 1$.

(b) Së pari $4^x - 6 > 0$ dhe $2^x - 2 > 0$ gjegjësisht $x > \frac{\log_2 6}{2}$ dhe $x > 1$, d.m.th. $x > \frac{\log_2 6}{2}$, respektivisht $x \in \left(\frac{\log_2 6}{2}, \infty\right) = D$. Kjo d.m.th. se zgjidhjet eventuale të ekuacionit duhet t'i kërkojmë në bashkësinë D .

Tani, për $x \in D$ ekuacioni i dhënë është ekuivalent me ekuacionin $\log_{\sqrt{5}} \frac{4^x - 6}{2^x - 2} = 2 = \log_{\sqrt{5}} \sqrt{5}^2$, që d.m.th. $\frac{4^x - 6}{2^x - 2} = 5$. Tani zëvendësojmë $2^x = t$ dhe ekuacioni merr formën $t^2 - 6 = 5t - 10$, gjegjësisht $t^2 - 5t + 4 = 0$. Zgjidhjet e këtij të fundit janë $t_1 = 1$ dhe $t_2 = 4$, respektivisht $x_1 = 0$ dhe $x_2 = 2$. Meqenëse $x_1 = 0 \notin D$, ndërsa $x_2 = 2 \in D$, atëherë zgjidhje e ekuacionit të dhënë është vetëm $x_2 = 2$.

(c) Së pari $x > 0$. Meqenëse $\log \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log x$ dhe pas zëvendësimit $x^{\log x} = t$ marrim ekuacionin irracional $t = 16(6\sqrt{t} + 25)$. Zgjidhje e këtij ekuacioni irracional është vetëm $t = 10000$. Tani kemi ekuacionin $x^{\log x} = 10000$, që pasi të logaritmojmë anë për anë marrim ekuacionin $\log^2 x = \log 10000 = 4$, respektivisht $\log x = \pm 2$, prej nga marrim zgjidhjet $x_1 = 10^{-2} = \frac{1}{100}$ dhe $x_2 = 10^2 = 100$.

(d) Meqenëse $2^{f(x)} > 0$ për çfarëdo funksioni real dhe meqë baza e logaritmit është $3 > 1$, atëherë së pari duhet ta zgjidhim sistemin e jobarazimeve $28 - 3^x > 1$ dhe $3 - x > 0$, respektivisht $x < 3$ dhe $x < 3$, d.m.th. $x \in (-\infty, 3) = D$.

Tani, për $x \in D$ ekuacioni i dhënë është ekuivalent me ekuacionin $\log_3(28 - 3^x) = 3 - x$, gjegjësisht $28 - 3^x = 3^{3-x} = \frac{3^3}{3^x}$. Pasi të zëvendësojmë $3^x = t$ marrim ekuacionin $t^2 - 28t + 27 = 0$, zgjidhjet e të cilit janë $t_1 = 1$ dhe $t_2 = 27$, ndërsa në lidhje me x janë $x_1 = 0$ dhe $x_2 = 3$. Meqenëse $x_1 \in D$, ndërsa $x_2 \notin D = (-\infty, 3)$, përfundojmë se vetëm 0 është zgjidhje e ekuacionit.

(e) Së pari vlen për $x \neq 0$, $2x + 3 > 0$, dhe $\frac{x}{2x + 3} > 0$, d.m.th. $x \in (0, \infty)$

vlen

$$\begin{aligned}
 x^2 \cdot \log_3 x^2 - (2x^2 + 3) \cdot \log_9(2x + 3) &= 3 \cdot \log_3 \frac{x}{2x + 3} \\
 \log_3 \frac{(x^2)^{x^2}}{\sqrt{(2x + 3)(2x^2 + 3)}} &= \log_3 \left(\frac{x}{2x + 3} \right)^3 \\
 \frac{(x^2)^{x^2}}{(2x + 3)^{\frac{2x^2 + 3}{2}}} &= \frac{x^3}{(2x + 3)^3} \\
 x^{2x^2 - 3} &= (2x + 3)^{\frac{2x^2 + 3}{2} - 3} \\
 x^{2x^2 - 3} &= (\sqrt{2x + 3})^{2x^2 - 3} \\
 2x^2 - 3 = 0 &\iff x_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}}, x_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}.
 \end{aligned}$$

Meqenëse $x \in (0, \infty)$, atëherë përfundojmë se vetëm $x_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}$ është zgjidhje e ekuacionit.

(f) Për $x^2 + 2x - 8 > 0$ dhe $x^2 - 6x + 9 > 0$ dhe $x^2 - 6x + 9 \neq 1$, d.m.th. për $x \in ((-\infty, -4) \cup (2, \infty)) \setminus \{3, 4\}$ vlen

$$\begin{aligned}
 \log_2(x^2 + 2x - 8) \cdot \log_{x^2 - 6x + 9} 4 &= 1 \iff \log_2(x^2 + 2x - 8) \cdot \log_{(x-3)^2} 4 = 1 \\
 \log_2(x^2 + 2x - 8) \cdot \log_{|x-3|} 2 &= 1 \iff \log_2(x^2 + 2x - 8) \cdot \frac{1}{\log_2 |x-3|} = 1 \\
 \log_2(x^2 + 2x - 8) &= \log_2 |x-3| \\
 x^2 + 2x - 8 &= |x-3|.
 \end{aligned}$$

Për ta zgjidhur barazimin e fundit, dallojmë dy raste:

1. Për $x \in (-\infty, -4) \cup (2, 3)$, $x - 3 < 0$, atëherë ekuacioni i dhënë është ekuivalent me ekuacionin $x^2 + 2x - 8 = -x + 3$, respektivisht $x^2 + 3x - 11 = 0$, zgjidhjet e të cilit janë $x_1 = \frac{-3 - \sqrt{53}}{2}$ dhe $x_2 = \frac{-3 + \sqrt{53}}{2}$. Meqenëse të dy zgjidhjet i takojnë intervalit $(-\infty, -4) \cup (2, 3)$, atëherë të dy vlerat x_1 dhe x_2 janë zgjidhje të ekuacionit. D.m.th. $B_1 = \left\{ \frac{-3 - \sqrt{53}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{53}}{2} \right\}$.

2. Për $x \in (3, \infty) \setminus \{4\}$, $x - 3 > 0$, atëherë ekuacioni i dhënë është ekuivalent me ekuacionin $x^2 + 2x - 8 = x - 3$, respektivisht $x^2 + x - 5 = 0$, zgjidhjet e të cilit janë $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}$ dhe $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2}$. Meqenëse asnjëra nga këto zgjidhje nuk i takoni intervalit $x \in (3, \infty) \setminus \{4\}$, përfundojmë se $B_2 = \emptyset$. Pra, bashkësia e zgjidhjeve e ekuacionit të dhënë është $B = B_1 \cup B_2 = \left\{ \frac{-3 - \sqrt{53}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{53}}{2} \right\}$.

(g) Për $1 \neq 3x + 7 > 0$, $4x^2 + 12x + 9 > 0$, $1 \neq 2x + 3 > 0$ dhe $6x^2 + 23x + 21 > 0$, që pasi t'i zgjidhim këto jobarazime marrim se $x > -\frac{3}{2}$ dhe

$x \neq -1$, d.m.th. $x \in (-\frac{3}{2}, -1) \cup (-1, \infty) = D$ kemi këto ekuivalenca

$$\begin{aligned} \log_{3x+7}(9 + 12x + 4x^2) + \log_{2x+3}(6x^2 + 23x + 21) &= 4 \\ \log_{3x+7}(2x + 3)^2 + \log_{2x+3}(2x + 3)(3x + 7) &= 4 \\ 2\log_{3x+7}(2x + 3) + 1 + \log_{2x+3}(3x + 7) &= 4 \\ 2\log_{3x+7}(2x + 3) + \frac{1}{\log_{3x+7}(2x + 3)} - 3 &= 0. \end{aligned}$$

Pas zëvendësimit $t = \log_{3x+7}(2x + 3)$ ekuacioni i fundit bëhet kuadratik dhe zgjidhjet e tij janë $t_1 = 1$ dhe $t_2 = \frac{1}{2}$, ndërsa në lidhje me x janë $x_1 = -4$ dhe $x_2 = -\frac{1}{4}$. Meqenëse $x_1 = -4 \notin D$, ndërsa $x_2 = -\frac{1}{4} \in D$, përfundojmë se e vetmja zgjidhja e ekuacionit është $-\frac{1}{4}$.

(h) Për $x > 0$ kemi

$$\begin{aligned} 7^{\log x} - 5^{\log x+1} &= 3 \cdot 5^{\log x-1} - 13 \cdot 7^{\log x-1} \iff 7^{\log x} \cdot \left(1 + \frac{13}{7}\right) = 5^{\log x} \cdot \left(5 + \frac{3}{5}\right) \\ \left(\frac{7}{5}\right)^{\log x} &= \left(\frac{7}{5}\right)^2 \iff \log x = 2 \iff x = 100. \end{aligned}$$

Meqë $x = 100 > 0$, atëherë përfundojmë se 100 është zgjidhje e ekuacionit.

(i) Edhe këtu, për $x > 0$ ekuacioni i dhënë është ekuivalent me ekuacionin $4^{\log x} \left(3 + \frac{1}{2}\right) = 7^{\log x} \left(1 + \frac{1}{7}\right)$. Vlen

$$\begin{aligned} 4^{\log x} \cdot \frac{7}{2} &= 7^{\log x} \cdot \frac{8}{7} \iff 4^{\log x-2} = 7^{\log x-2} \\ \log x - 2 &= 0 \iff x = 100. \end{aligned}$$

Pasi që $100 > 0$, atëherë 100 është zgjidhje e ekuacionit.

(j) Për $x > 0$, pasi të logaritmojmë anë për anë marrim ekuacionin $(1 + \log_3 x) \cdot \log_3 x = 1 + \log_3 x$, i cili është ekuivalent me ekuacionin $(1 + \log_3 x) \cdot (\log_3 x - 1) = 0$, zgjidhjet e të cilit janë $x_1 = 3^{-1} = \frac{1}{3}$ dhe $x_2 = 3$. Meqë $x_1, x_2 > 0$, përfundojmë se të dy këto vlera janë zgjidhje të ekuacionit.

Shembulli 6.23. Të zgjidhet ekuacioni logaritmik

$$\log_{\sqrt{5}} x \cdot \sqrt{\frac{3}{\log_{\sqrt{5}} x} + 3} = -\sqrt{6}.$$

Zgjidhje. Për $x > 0$, zëvendësojmë $\log_{\sqrt{5}} x = t$ dhe marrim ekuacionin irracional

$$t \cdot \sqrt{\frac{3}{t} + 3} = -\sqrt{6}.$$

Ky ekuacion është ekuivalent me sistemin e jobarazimeve

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad \frac{3}{t} + 3 > 0 \\ (2) \quad t < 0 \\ (3) \quad t^2 \cdot \left(\frac{3}{t} + 3\right) = (-\sqrt{6})^2 = 6 \end{array} \right\} (*)$$

Pasi ta zgjidhim ekuacionin e fundit sipas t , marrim që $t_1 = -2 < 0$ dhe $t_2 = 1 > 0$. Vetëm vlera $t = t_1 = -2$ i plotëson jobarazimet (1) dhe (2), prandaj vetëm -2 është zgjidhje e sistemit të jobarazimeve (*). Kështu:

$$\log_{\sqrt{5}} x = -2 \iff x = (\sqrt{5})^{-2} = \frac{1}{(\sqrt{5})^2} = \frac{1}{5}.$$

Përfundimisht, zgjidhja e ekuacionit është $x = \frac{1}{5}$.

Shembulli 6.24. Nëse Kosova në momentin e tanishëm ka 1.6 milion banorë, atëherë pas sa viteve numri i banorëve do të dyfishohet, nëse shkalla e shtimit natyror është 0.01, d.m.th. 10 promilë?

Zgjidhje. Formula $n(k) = n_0(1+p)^k$ shpreh shtimin e popullatës së një vendi në funksion të kohës (p.sh. viteve) k . Nga kushti $n(k) = 2n_0$, atëherë marrim ekuacionin $2 = 1.01^k$, prej nga marrim se $k = \frac{\log 2}{\log 1.01} \approx 69.7$ -vite.

Shembulli 6.25. Intensiteti i dritës gjatë depërtimit nëpër një lëng me tejdukshmëri relative shprehet (llogaritet) me formulën

$$I = I_0 e^{-kd}, \quad (1)$$

ku d është thellësia e shprehur në "feet" (amer. 3 feet=1m), I_0 është intensiteti i dritës në sipërfaqe të lëngut, ndërsa k është një konstantë dhe ndryshon varësisht nga lloji i lëngut. Nëse $k = 0.00853$, atëherë njehsoni thellësinë në të cilën intensiteti i dritës do të reduktohet 10% ndaj asaj në sipërfaqe I_0 .

Zgjidhje. Nga kushti i detyrës kemi $I = 90\% \cdot I_0 = \frac{9}{10} I_0$. Tani, nga ekuacioni $\frac{9}{10} I_0 = I_0 e^{-0.00853d}$ marrim ekuacionin $\ln \frac{9}{10} = -0.00853 \cdot d$, respektivisht $d = -\frac{3 \ln 3 - \ln 10}{0.00853} = 12.35$ feet.

Shembulli 6.26. Supozojmë se numri i mizave të një blete rritet sipas funksionit eksponencial

$$q(t) = 25e^{0.2t},$$

ku t është koha e shprehur në ditë. Për sa ditë numri i mizave të bletës do të bëhet 375?

Zgjidhje. Nga kushti i detyrës kemi

$$q(t) = 25e^{0.2t} \implies 375 = 25e^{0.2t} \implies 15 = e^{0.2t} \implies t = \frac{\ln 15}{0.2} \approx 13.54 \text{ ditë.}$$

Detyra në lidhje me ekuacionet logaritmike

1. Të zgjidhen ekuacionet logaritmike

- (a) $\log_2(x-1) + \log_2(x+2) = 2$,
- (b) $\log_x \sqrt{5} + \log_x 5x - 2.25 = (\log_x \sqrt{5})^2$,
- (c) $(\log(x+2) - \log x) \cdot \log_x 0.1 = -1$,
- (d) $\log(7-2^x) - \log(5+4^x) + \log 7 = 0$,
- (e) $\log(4+2^{x+2}) = \log 4 + \log(5 \cdot 2^{4-x} - 1)$,
- (f) $\log(3^x + 2) - \log(2 \cdot 3^{2-x} + 9) = \log 3$,
- (g) $5 \log_{\frac{x}{5}} x + \log_{\frac{x}{x}} x^3 + 8 \log_{9x^2} = 2$,
- (h) $\log_x 3 + \log_3 x = \log_{\sqrt{x}} 3 + \log_3 \sqrt{x} + \frac{1}{2}$,
- (i) $\log_{3x} \frac{3}{x} + \log_3^2 x = \log \sqrt{100}$,
- (j) $x^{2 \log^3 x - \frac{3}{2} \log x} = \sqrt{10}$,
- (k) $7^{2(\log_7 3+x)} - 7 = 7^{x+\log_7 2}$,
- (l) $\log_2 \log_3(2x+3) + \log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{3}} \frac{x+1}{2x+3} = 1$,
- (m) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_9(x^2+2x+4)} = 6^{\log_{\frac{1}{6}}(x+2)}$,
- (n) $2 + \log \sqrt{1+x} + 3 \log \sqrt{1-x} = \log \sqrt{1-x^2}$.

2.

- (a) $\log_{\sqrt{2}} x \cdot \log_2 x \cdot \log_{2\sqrt{2}} x \cdot \log_4 x = 54$,
- (b) $\log_{3x+8}(x^2+8x+16) + \log_{x+4}(3x^2+20x+32) = 4$,
- (c) $(\log_5(x^2-2x-3)) \cdot \log_{x^2+14x+49} 25 = 1$,
- (d) $\log^2 x - \log x^3 + 2 = 0$,
- (e) $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$,
- (f) $1 + \log_2(x-1) = \log_{x-1} 2$.

3. Njehsoni syprinën e sipërfaqes, vëllimin dhe masën e rruzullit tokësor, nëse rrezja e Tokës është $r = 6371 \text{ km}$ dhe dendësia e saj është $\rho = 5.518 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3} =$
 $\rho = 5518 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

Udhëzim. Formula për syprinën e sipërfaqes së sferës është $S = 4\pi r^2$, për vëllimin e saj është $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, ndërsa $m = \rho V$. Për arsye të thjeshtësimit të procedurës së llogaritjes shfrytëzoni vetinë $a = a^{\log a}$ për çdo $a > 0$.

4. Njeshoni thellësinë e lëngut ku intensiteti i dritës do të reduktohej vetëm 2% nga intensiteti i dritës në sipërfaqe nëse $k = 0.0585$.

Rezultatet: Bashkësia B e zgjidhjeve e ekuacionit përkatës është:

1.

$$\begin{array}{llll} (a) & \{-3, 2\}, & (g) & \{3, \sqrt{3}\}, \\ (b) & \{5\}, & (j) & \left\{10, \frac{1}{10}\right\}, \\ (c) & \{5\}, & (h) & \left\{\frac{1}{3}, 9\right\}, \\ (d) & \{2\}, & (k) & \{3, 0\sqrt{3}\}, \\ (e) & \{3\}, & (i) & \left\{\frac{1}{9}, 1, 3\right\}, \\ (f) & \{3\}, & (l) & \{\sqrt{2}\}, \end{array} \quad (m) \quad \{0\}, \quad (f) \quad \left\{\frac{99}{100}\right\}.$$

2.

$$\begin{array}{lll} (a) & \left\{8, \frac{1}{8}\right\}, & (c) \quad \{5\}, \\ (b) & \{-2\}, & (d) \quad \{10, 100\}, \end{array} \quad (e) \quad \{1, 2\}, \quad (f) \quad \left\{3, \frac{5}{4}\right\}.$$

3. Sipërfaqja e Rruzullit tokësor është e barabartë me $510.1 \cdot 10^6 \text{ km}^2$; vëllimi i Rruzullit tokësor është përafërsisht i barabartë me 10^{21} m^3 , kurse masa e Rruzullit tokësor është përafërsisht e barabartë me $5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.

4. $d = 0.35$ feet (3 feet=1m).

Në vazhdim do t'i zgjidhim disa jobarazime logaritmike.

Shembulli 6.27. Të zgjidhen inekuacionet logaritmike

$$\begin{array}{ll} (a) & \log(x+2) > \log 2x, \\ (b) & \log \frac{x-1}{x+2} > 0, \\ (c) & \log(x-4) - \log(x+1) < 1, \\ (d) & \log_{0.5}(2x+6) > \log_{0.5}(x+8), \\ (e) & \log_2(x^2 - 3x + 4) < 1, \\ (f) & \log_3(x^2 - 5x + 6) < 0, \\ (g) & \log_a x + \log_a(x+1) < \log_a(2x+6), (a > 1) \\ (h) & \log_{ax} a + 3 \log_{a^2x} a > 0, (a > 1) \\ (i) & \log_{2x^2-x}(2x+2) < 1, \\ (j) & \log_{0.5}(x^2 - 4x + 3) \geq -3, \\ (k) & \log_5 x \geq \log_{25}(3x-2), \\ (l) & \log_3(1-x) \leq \log_{\frac{1}{3}}(x+2). \end{array}$$

Zgjidhje. (a) Për $x + 2 > 0$ dhe $2x > 0$, d.m.th. $x \in (0, \infty)$ dhe meqë baza e logaritmit është $a = 10 > 1$, inekuacioni i dhënë është ekuivalent me inekuacionin $x + 2 > 2x$. D.m.th. $x < 2$ dhe $x \in (0, \infty)$, respektivisht $x \in (0, 2) = B$.

(b) Së pari duhet që $\frac{x-1}{x+2} > 0$, që është ekuivalent me faktin $x \in (-\infty, -2) \cup (1, \infty) = D$. Pra për $x \in D$ inekuacioni i dhënë është ekuivalent me inekuacionin $\frac{x-1}{x+2} > 1$, bashkësia e zgjidhja e të cilit është $x \in (-\infty, -2) = E$. Rrjedhimisht, bashkësia e zgjidhjeve e inekuacionit të dhënë është $B = D \cap E = (-\infty, -2)$.

(c) Edhe këtu, së pari $x - 4 > 0$ dhe $x + 1 > 0$, d.m.th. $x > 4$. Për $x \in (4, \infty)$ inekuacioni i dhënë është ekuivalent me inekuacionin $x - 4 < 10(x + 1)$, që d.m.th. $x > -\frac{14}{9}$. Rrjedhimisht, bashkësia e zgjidhjeve e inekuacionit të dhënë është $B = (4, \infty) \cap \left(-\frac{14}{9}, \infty\right) = (4, \infty)$.

(d) Pra, $2x + 6 > 0$ dhe $x + 8 > 0$, që është ekuivalent me faktin $x \in (-3, \infty) = D$. Meqenëse baza e logaritmit është më e vogël se 1, atëherë për $x \in D$ inekuacioni i dhënë është ekuivalent me inekuacionin $2x + 6 < x + 8$, respektivisht $x < 2$. Përfundimisht bashkësia e zgjidhjeve e inekuacionit të dhënë është $B = (-3, 2)$.

(e) Së pari duhet të zgjidhim jobarazimin $x^2 - 3x + 4 > 0$. Këtu $a = 1 > 0$ dhe $D = -7 < 0$, d.m.th. trinomi $x^2 - 3x + 4 > 0$ është pozitiv për çdo $x \in \mathbf{R}$. Meqenëse baza e logaritmit është $2 > 1$, atëherë inekuacioni i dhënë është ekuivalent me inekuacionin $x^2 - 3x + 4 < 2$, respektivisht $x \in (1, 2) = B$.

(f) Ngjashëm si në rastin (e), $x^2 - 5x + 6 > 0$, ($a = 1 > 0, D = 1 > 0$), respektivisht $x \in (-\infty, 2) \cup (3, \infty) = C$. Tani, për $x \in C$ inekuacioni i dhënë është ekuivalent me inekuacionin $x^2 - 5x + 6 < 1$ (pse?), respektivisht $x^2 - 5x + 5 < 0$. Këtu, $a = 1 > 0, D = 5 > 0$, d.m.th. bashkësia e zgjidhjeve e jobarazimit të fundit është intervali $\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}, \frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right) = E$. Kështu, bashkësia e zgjidhjeve e inekuacionit të dhënë është

$$B = C \cap E = ((-\infty, 2) \cup (3, \infty)) \cap \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}, \frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}, 2\right) \cup \left(3, \frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right).$$

(g) Për $x > 0$, $x + 1 > 0$, $2x + 6 > 0$, d.m.th. $x \in (0, \infty) = C$ dhe meqë baza e logaritmit a është më e madhe se 1, atëherë inekuacioni është ekuivalent me inekuacionin $\log_a x(x + 1) < \log_a(2x + 6)$, respektivisht $x(x + 1) < 2x + 6$. Bashkësia e zgjidhjeve e inekuacionit të fundit është $(-2, 3) = D$. D.m.th. bashkësia e zgjidhjeve e inekuacionit të dhënë është $B = C \cap D = (0, 3)$.

(h) Meqenëse $a > 1$, atëherë këtu duhet të vlejë $ax > 0, ax \neq 1$ dhe $a^2x > 0, a^2x \neq 1$, që d.m.th. $x > 0, x \neq \frac{1}{a}$ dhe $x \neq \frac{1}{a^2}$, respektivisht për

$x \in \left(0, \frac{1}{a^2}\right) \cup \left(\frac{1}{a^2}, \frac{1}{a}\right) \cup \left(\frac{1}{a}, \infty\right) = C$, inekuacioni i dhënë është ekuivalent me inekuacionin $\frac{1}{\log_a ax} + \frac{3}{\log_a a^2x} > 0$. Vlen

$$\frac{1}{\log_a ax} + \frac{3}{\log_a a^2x} > 0 \iff \frac{5 + 4\log_a x}{(1 + \log_a x)(2 + \log_a x)} > 0,$$

që pasi të zëvendësojmë $\log_a x = t$, inekuacioni i fundit shndërrohet në një inekuacion kuadratik, bashkësia e zgjidhjeve e të cilit në lidhje me t është $t \in \left(-2, -\frac{5}{4}\right) \cup (-1, \infty)$, ndërsa bashkësia e zgjidhjeve e inekuacionit fillestar është është $x \in \left(\frac{1}{a^2}, \frac{1}{a\sqrt[4]{a}}\right) \cup \left(\frac{1}{a}, \infty\right) = B$.

(i) Për inekuacionin $\log_{2x^2-x}(2x+2) < 1$ së pari duhet të gjejmë bashkësinë e vlerave të cilat guxon t'i merr ndryshorja x . Pra duhet të zgjidhim sistemin

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 2 > 0 \\ 2x^2 - x > 0 \\ 2x^2 - x \neq 1 \end{array} \right\} \sim x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right) \left. \begin{array}{l} x > -1 \\ x_1 \neq -\frac{1}{2}, x_2 \neq 1 \end{array} \right\} \sim \\ \sim x \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, \infty) = C.$$

Dallojmë dy raste:

1. Nëse $x \in C$ dhe $2x^2 - x > 1$, d.m.th. $x \in C$ dhe $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, \infty)$, respektivisht $x \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, \infty)$, inekuacioni i dhënë është ekuivalent me inekuacionin $2x+2 < 2x^2-x$ ($1 = \log_{2x^2-x}(2x^2-x)$). Bashkësia e zgjidhjeve e inekuacionit të fundit është $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (2, \infty)$. Përfundimisht, në këtë rast, $x \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup (2, \infty) = B_1$.

2. Nëse $x \in C$ dhe $0 < 2x^2 - x < 1$, d.m.th. $x \in C$ dhe $x \in \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$, respektivisht $x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, 2) = B_2$. Përfundimisht, bashkësia e zgjidhjeve e inekuacionit të dhënë është $B = B_1 \cup B_2 = \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, 2) = (-1, 0) \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\} \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right) \setminus \{1, 2\}$.

(j) Së pari duhet që $x^2 - 4x + 3 > 0$, d.m.th. $x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty) = C$. Meqenëse baza e logaritmit është 0.5 më e vogël se 1, atëherë inekuacioni i

dhënë është ekuivalent me sistemin e inekuacioneve

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ x^2 - 4x + 3 \leq 8 \end{array} \right\} \sim \left. \begin{array}{l} x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty) \\ x \in [-1, 5] \end{array} \right\} \sim x \in [-1, 1) \cup (3, 5] = B.$$

(k) Meqenëse $\log_a x = \log_{a^m} x^m$ për çdo $x > 0$ dhe $m \in \mathbf{R}$, bashkësia e zgjidhjeve e inekuacionit të dhënë caktohet me zgjidhjen e sistemit të inekuacioneve

$$\left. \begin{array}{l} x > 0 \\ 3x - 2 > 0 \\ x^2 \geq 3x - 2 \end{array} \right\} \sim \left. \begin{array}{l} x > 0 \\ x > \frac{2}{3} \\ x \in (-\infty, 1] \cup [2, \infty) \end{array} \right\} \sim x \in \left(\frac{2}{3}, 1\right] \cup [2, \infty) = B.$$

(l) Meqenëse $\log_{\frac{1}{3}}(x+2) = -\log_3(x+2)$, atëherë jobarazimi $\log_3(1-x) \leq \log_{\frac{1}{3}}(x+2)$ është ekuivalent me sistemin e jobarazimeve

$$\left. \begin{array}{l} 1-x > 0 \\ x+2 > 0 \\ x^2+x-1 \geq 0 \end{array} \right\} \sim x \in \left(-2, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1\right) = B.$$

Shembulli 6.28. Të caktojme fushën e përkufizimit për funksionin $f(x) = \ln(1 - \log_{(2x+3)} x^2)$.

Zgjidhje. Meqenëse shprehja nën logaritëm duhet të jetë më e madhe se zero, atëherë marrim sistemin e inekuacioneve

$$\left. \begin{array}{l} 1 - \log_{(2x+3)} x^2 > 0 \\ x^2 > 0 \\ 2x + 3 > 0 \\ 2x + 3 \neq 1 \end{array} \right\} \sim \left. \begin{array}{l} \log_{(2x+3)} x^2 < 1 \\ x \neq 0 \\ x > -\frac{3}{2} \\ x \neq -1 \end{array} \right\} \sim \left. \begin{array}{l} \log_{(2x+3)} x^2 < \log_{(2x+3)}(2x+3) \\ x \in \left(-\frac{3}{2}, -1\right) \cup (-1, 0) \cup (0, \infty) = D \end{array} \right\}.$$

Dallojmë dy raste:

1. Për $x \in D$ dhe $2x+3 > 1$, atëherë inekuacioni i dhënë është ekuivalent me inekuacionin $x^2 < 2x+3$, respektivisht $x \in D$ dhe $x \in (-1, 3)$. Rrjedhimisht $B_1 = D \cap (-1, 3) = (-1, 0) \cup (0, 3)$.

2. Për $x \in D$ dhe $0 < 2x+3 < 1$, atëherë inekuacioni i dhënë është ekuivalent me inekuacionin $x^2 > 2x+3$, respektivisht $x \in D$ dhe $x \in (-\infty, -1) \cup$

$(3, \infty)$. Rrjedhimisht $B_2 = D \cap \left(-\frac{3}{2}, -1\right) \cap ((-\infty, -1) \cup (3, \infty)) = \left(-\frac{3}{2}, -1\right)$. Përfundimisht, bashkësia e zgjidhjeve e sistemit të inekuacioneve të mësipërme është $B = B_1 \cup B_2 = \left(-\frac{3}{2}, -1\right) \cup (-1, 0) \cup (0, 3)$, që paraqet edhe fushën e përkufizimit të funksionit $f(x) = \ln\left(1 - \log_{(2x+3)} x^2\right)$.

Shembulli 6.29. Të caktojmë fushën e përkufizimit për funksionin

$$f(x) = \sqrt{\log(5^x + x - 20) - x + x \log 2}$$

Zgjidhje. Ngjashëm si në shembullin paraprak, fusha e përkufizimit caktohet nga zgjidhja e sistemit të inekuacioneve

$$\left. \begin{array}{l} \log(5^x + x - 20) - x + x \log 2 \geq 0 \\ 5^x + x - 20 > 0 \end{array} \right\} \sim \left. \begin{array}{l} \log(5^x + x - 20) \geq x - x \log 2 = \log 5^x \\ 5^x + x - 20 > 0 \end{array} \right\}$$

$$\sim \left. \begin{array}{l} 5^x + x - 20 \geq 5^x \\ 5^x > 20 - x \end{array} \right\} \sim \left. \begin{array}{l} x \geq 20 \\ 5^x > 20 - x \end{array} \right\} \sim x \in [20, \infty).$$

Shembulli 6.30. Të caktojmë fushën e përkufizimit për funksionin $f(x) = \log_2 \left(\log_x \frac{6-5x}{4x+5} - 1 \right)$.

Zgjidhje. Duhet ta zgjidhim sistemin e inekuacioneve

$$\left. \begin{array}{l} \log_x \frac{6-5x}{4x+5} - 1 > 0 \\ \frac{6-5x}{4x+5} > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{array} \right\} \sim \left. \begin{array}{l} \frac{6-5x}{4x+5} - x > 0 \\ \frac{6-5x}{4x+5} > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{array} \right\} \sim x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) = B.$$

Shembulli 6.31. Për cilat vlera të ndryshores x është i përkufizuar funksioni $f(x) = \log_{x^2-x-6}(x^2-x-6)$?

Zgjidhje. Funksioni $f(x) = \log_{x^2-x-6}(x^2-x-6)$ është i përkufizuar për $x \in \mathbf{R}$ të tillë që $x^2-x-6 > 0$ dhe $x^2-x-6 \neq 1$. D.m.th. $x \in (-\infty, -2) \setminus \left\{\frac{1-\sqrt{29}}{2}\right\} \cup (3, \infty) \setminus \left\{\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right\}$, ndërsa vlera e këtij funksioni është e barabartë me 1. (Vizatoni grafikun!).

Shembulli 6.32. Të zgjidhen inekuacionet që vijojnë

- (a) $\log_x \frac{3x-1}{x^2+1} > 0,$ (e) $\log_5 \log_6 \frac{6x-1}{x+1} < \log_{\frac{1}{5}} \log_{\frac{1}{6}} \frac{x+1}{6x-1},$
 (b) $\log_x (x^2 - x - 2) < 3,$ (f) $\log_4 (5 - 3^x) \cdot \log_2 \frac{5 - 3^x}{8} \geq -1,$
 (c) $\log 10^{\log(x+16)} > 1 + \log x,$ (g) $|x-1|^{\log_2(4-x)} > |x-1|^{\log_2(1+x)},$
 (d) $0.6^{\log_{0.5} \log_5 \frac{5x+4}{x^2+3}} > 1,$ (h) $\log_2 \frac{|x^2 - 2x| + 4}{|x+2| + x^2} \leq 0.$

(a) 1. Për $x \in (1, \infty)$, inekuacioni i dhënë është ekuivalent sistemin inekuacioneve $\frac{3x-1}{x^2+1} > 0$ dhe $\frac{3x-1}{x^2+1} > 1$ që d.m.th. $\frac{3x-1}{x^2+1} > 1$. Meqenëse $x^2 + 1 > 0$ për çdo $x \in \mathbf{R}$, atëherë inekuacioni i fundit është ekuivalent me inekuacionin $x^2 - 3x + 2 < 0$, respektivisht $x \in (1, 2) \cap (1, \infty) = (1, 2) = B_1$.

2. Për $x \in (0, 1)$, inekuacioni i dhënë është ekuivalent sistemin inekuacioneve $\frac{3x-1}{x^2+1} > 0$ dhe $\frac{3x-1}{x^2+1} < 1$. Meqenëse $x^2 + 1 > 0$ për çdo $x \in \mathbf{R}$, atëherë sistemi i fundit i inekuacioneve është ekuivalent me sistemin

$$3x - 1 > 0 \text{ dhe } x^2 - 3x + 2 > 0, \text{ respektivisht } x \in \left(\frac{1}{3}, \infty\right) \cap ((-\infty, 1) \cup (2, \infty)) \cap (0, 1) = \left(\frac{1}{3}, 1\right) = B_2. \text{ Përfundimisht, bashkësia e zgjidhjeve e inekuacionit të dhënë është } B = B_1 \cup B_2 = \left(\frac{1}{3}, 1\right) \cup (1, 2) = \left(\frac{1}{3}, 2\right) \setminus \{1\}.$$

(b) Veprohet ngjashëm si në rastin (b) dhe për rezultat fitohet bashkësia e zgjidhjeve $B = (2, \infty)$.

(c) Jobarazimi $\log 10^{\log(x+16)} > 1 + \log x$ është ekuivalent me jobarazimin $\log(x+16) > 1 + \log x$. Tani, për $x > 0$, inekuacioni i fundit është ekuivalent me inekuacionin $x + 16 > 10x$. D.m.th. bashkësia e zgjidhjeve e inekuacionit të dhënë është $B = \left(0, \frac{16}{9}\right)$.

(d) Së pari $\frac{5x+4}{x^2+3} > 0$, d.m.th. $x \in \left(-\frac{5}{4}, \infty\right) = D$. Meqenëse $1 = 0.6^0$ atëherë për $x \in D$ inekuacioni i dhënë është ekuivalent me inekuacionin $\log_{0.5} \log_5 \frac{5x+4}{x^2+3} < 0$. Tani, baza e logaritmit është më e vogël se 1, prandaj nga inekuacioni i fundit marrim inekuacionin $\log_5 \frac{5x+4}{x^2+3} > 1 = \log_5 5$. Tani, baza e logaritmit të fundit është më e madhe se 1, prandaj kemi inekuacionin $\frac{5x+4}{x^2+3} > 5$. Meqenëse $x^2 + 3 > 0$ për çdo $x \in \mathbf{R}$ (pse?), atëherë jobarazimin e fundit mund ta shumëzojmë me x^2+3 dhe marrim inekuacionin $5x^2 - 5x + 11 < 0$. Bashkësia e zgjidhjeve e inekuacionit të fundit është boshe \emptyset (pse?), prandaj bashkësia e zgjidhjeve e inekuacionit në rastin (d) është $B = \emptyset$.

(e) Shfrytëzojmë vetinë e logaritmeve $\log_a x = \log_{a^\alpha} x^\alpha$ për çdo $x > 0$ dhe $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. D.m.th. $\log_5 x = \log_{5^{-1}} x^{-1}$. Prandaj inekuacioni

$$\log_5 \log_6 \frac{6x-1}{x+1} < \log_{\frac{1}{5}} \log_{\frac{1}{6}} \frac{x+1}{6x-1}$$

është ekuivalent me inekuacionin

$$\log_5 \log_6 \frac{6x-1}{x+1} < \log_{\frac{1}{5}} \log_6 \frac{6x-1}{x+1}.$$

Tani, për arsye të thjeshtësimit, zëvendësojmë $t = \log_6 \frac{6x-1}{x+1} > 0$ (pse duhet të jetë $t > 0$?). Inekuacioni e merr formën $\log_5 t < \log_{\frac{1}{5}} t$, respektivisht $t < \frac{1}{t}$, bashkësia e zgjidhjeve e të cilit është $t \in (0, 1)$. D.m.th. $0 < \log_6 \frac{6x-1}{x+1} < 1$, respektivisht $1 < \frac{6x-1}{x+1} < 6$, bashkësia e zgjidhjeve e të cilit është $B = \left(\frac{5}{2}, \infty\right)$.

(f) Për $5 - 3^x > 0$, d.m.th. $x \in (-\infty, \log_3 5)$ inekuacioni i dhënë është ekuivalent me inekuacionin $\log_4(5 - 3^x) \cdot (\log_2(5 - 3^x) - 3) \geq -1$, respektivisht $\log_4(5 - 3^x) \cdot (\log_4(5 - 3^x)^2 - 3) \geq -1$. Nëse zëvendësojmë $\log_4(5 - 3^x) = t$, inekuacioni transformohet në një inekuacion kuadratik $t(2t - 3) \geq -1$. Bashkësia e zgjidhjeve e këtij të fundit është $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup [1, \infty)$. Kjo do të thotë se për $x < \log_3 5$ vlen $\log_4(5 - 3^x) \leq \frac{1}{2}$ ose $\log_4(5 - 3^x) \geq 1$ respektivisht $5 - 3^x \leq 2$ ose $5 - 3^x \geq 4$; $x \geq 1$ ose $x \leq 0$. Përfundimisht marrim bashkësinë e zgjidhjeve të inekuacionit të dhënë $B = (-\infty, 0] \cup [1, \log_3 5)$.

(g) Te inekuacioni $|x - 1|^{\log_2(4-x)} > |x - 1|^{\log_2(1+x)}$, së pari duhet të zgjidhim sistemin e jobarazimeve

$$\left. \begin{array}{l} 4 - x > 0 \\ 1 + x > 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{array} \right\} \sim \left. \begin{array}{l} x < 4 \\ x > -1 \\ x \neq 1 \end{array} \right\} \sim x \in (-1, 1) \cup (1, 4) = D.$$

Tani, për $x \in D$ dallojmë dy raste:

1. Nëse $|x - 1| > 1$, d.m.th. $x - 1 > 1$ ose $x - 1 < -1$ dhe $x \in D$, prej nga marrim se $x \in (-1, 0) \cup (2, 4)$, inekuacioni i dhënë është ekuivalent me inekuacionin $\log_2(4 - x) > \log_2(1 + x)$, respektivisht $4 - x > 1 + x$, që d.m.th. $x < \frac{3}{2}$. Por, $x \in (-1, 0) \cup (2, 4)$, prandaj $B_1 = (-1, 0)$.

2. Nëse $|x - 1| < 1$, d.m.th. $-1 < x - 1 < 1$ ose $0 < x < 2$ dhe $x \in D$, prej nga marrim se $x \in (0, 1) \cup (1, 2)$, inekuacioni i dhënë është ekuivalent me inekuacionin $\log_2(4 - x) < \log_2(1 + x)$, respektivisht $4 - x < 1 + x$, që d.m.th. $x > \frac{3}{2}$. Por, $x \in (0, 1) \cup (1, 2)$, prandaj $B_2 = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$. Përfundimisht, bashkësia e zgjidhjeve e inekuacionit të dhënë është $B = B_1 \cup B_2 = (-1, 0) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right)$.

(h) Meqenëse $\frac{|x^2 - 2x| + 4}{|x + 2| + x^2} > 0$ për çdo $x \in \mathbf{R}$ (pse?) dhe baza e logaritmit është $2 > 1$, atëherë inekuacioni i dhënë është ekuivalent me inekuacionin $\frac{|x^2 - 2x| + 4}{|x + 2| + x^2} \leq 1$, të cilin mund ta shumëzojmë me emëruesin $|x + 2| + x^2$ (pse?) dhe marrim $|x^2 - 2x| + 4 \leq |x + 2| + x^2$. Meqenëse

$$|x^2 - 2x| = \begin{cases} x^2 - 2x, & \text{nëse } x^2 - 2x \geq 0 \\ -x^2 + 2x, & \text{nëse } x^2 - 2x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 2x, & \text{nëse } x \in (-\infty, 0] \cup [2, \infty) \\ -x^2 + 2x, & \text{nëse } x \in [0, 2], \end{cases}$$

ndërsa

$$|x + 2| = \begin{cases} x + 2, & x + 2 \geq 0 \\ -x - 2, & x + 2 \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} x + 2, & x \geq -2 \\ -x - 2, & x \leq -2 \end{cases},$$

atëherë dallojmë rastet:

1. Për $x \in (-\infty, -2]$, marrim inekuacionin $x^2 - 2x + 4 \leq -x - 2 + x^2$, respektivisht $x \geq 6$. D.m.th. $B_1 = \emptyset$.

2. Për $x \in [-2, 0]$, $x^2 - 2x \geq 0$ dhe $x + 2 \geq 0$, prandaj inekuacioni $|x^2 - 2x| + 4 \leq |x + 2| + x^2$ është ekuivalent me inekuacionin $x^2 - 2x + 4 \leq x + 2 + x^2$, respektivisht $x \geq \frac{2}{3}$. Por $x \in [-2, 0]$, prandaj edhe $B_2 = \emptyset$.

3. Për $x \in [0, 2]$, $x^2 - 2x \leq 0$ dhe $x + 2 > 0$, prandaj inekuacioni $|x^2 - 2x| + 4 \leq |x + 2| + x^2$ është ekuivalent me inekuacionin $-x^2 + 2x + 4 \leq x + 2 + x^2$, respektivisht $2x^2 - x - 2 \geq 0$. Bashkësia e zgjidhjeve e jobarazimit të fundit

është $x \in \left(-\infty, \frac{1 - \sqrt{17}}{4}\right] \cup \left[\frac{1 + \sqrt{17}}{4}, \infty\right)$. Por $x \in [0, 2]$, prandaj edhe

$$B_2 = \left[\frac{1 + \sqrt{17}}{4}, 2\right].$$

3. Ngjashëm, për $x \in [2, \infty)$, $x^2 - 2x \geq 0$ dhe $x + 2 > 0$, prandaj inekuacioni $|x^2 - 2x| + 4 \leq |x + 2| + x^2$ është ekuivalent me inekuacionin $x^2 - 2x + 4 \leq x + 2 + x^2$, respektivisht $x \geq \frac{2}{3}$. D.m.th. $B_3 = [2, \infty)$. Përfundimisht, bashkësia e

zgjidhjeve e inekuacionit të dhënë është $B = \bigcup_{i=1}^4 B_i = \left[\frac{1 + \sqrt{17}}{4}, \infty\right)$.

Detyra në lidhje me inekuacionet logaritmike

1. Të caktohen bashkësitë e zgjidhjeve për inekuacionet që vijojnë

- (a) $\log_2(x^2 - 5x + 6) \leq 1$,
 (b) $\log_{0.5}(x^2 + 1) < \log_{0.5}(2x - 5)$,
 (c) $\log_{1.5} \frac{2x - 8}{x - 2} < 0$,
 (d) $\log_{0.5}(x - 0.5) + \log_{0.5}(x - 1) \geq 1$,
 (e) $\frac{1}{5 - \log x} + \frac{2}{1 + \log x} < 1$,
 (f) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^x - 36^x) \geq -2$,
 (g) $\log_2 \frac{|x^2 - 4x| + 3}{x^2 + |x - 5|} \geq 0$,
 (h) $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{x^3 + x^2 + x - 13} \cdot \log_{\frac{1}{4}}(-x^2 + 5x - 6) < 0$.

Rez. Bashkësia B e zgjidhjeve për inekuacionin përkatës është:

- (a) $[1, 2) \cup (3, 4]$,
 (b) $\left(\frac{5}{2}, \infty\right)$,
 (c) $(4, 6)$,
 (d) $\left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right]$,
 (e) $\left(0, \frac{1}{10}\right) \cup (100, 1000) \cup (100000, \infty)$,
 (f) $(-\infty, 0) \cup [\log_6 5, 1)$,
 (g) $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 2\right]$,
 (h) $(2, 3)$.

Udhëzim për rastin (h). Së pari funksioni $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ duhet të jetë pozitiv, prandaj $x \in (2, 3)$. Vlera maksimale e funksionit $f(x)$ është $\frac{1}{4}$ dhe kjo vlerë arrihet për $x = \frac{5}{2}$. Kjo do të thotë se $0 < -x^2 + 5x - 6 \leq \frac{1}{4}$, prandaj $\log_{\frac{1}{4}}(-x^2 + 5x - 6) > 0$ për çdo $x \in (2, 3)$. Po ashtu, $1 < x^3 + x^2 + x - 13 < 25$ (pse?) për $x \in (2, 3)$, prandaj $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{x^3 + x^2 + x - 13} < 0$ për çdo $x \in (2, 3)$. Kështu, bashkësia e zgjidhjeve e jobarizimit të dhënë është intervali $(2, 3)$.

Kapitulli VII

Trigonometria në rrafsh

Fjala *trigonometri* është fjalë greke e përbërë nga fjalët: *tri* (tre), *gono* (kënd) dhe *metri* (matje), pra domethënia e saj është *matje e trekëndëshit*. Me matje të trekëndëshit nënkuptojmë llogaritjen e të gjitha elementeve të trekëndëshit, p.sh. gjatësitë e brinjëve, masën e këndeve, syprinën e tij, gjatësitë e lartësive, medianeve etj., duke i ditur, në rastin e përgjithshëm tre elemente të pavarura të tij. Ajo daton qysh nga kohërat e lashta. P.sh. egjiptasit e vjetër, duke shfrytëzuar trigonometrinë bënë rindarjen e parcelave rreth lumit Nil të cilat ishin të përmbytura më parë. P.sh. Heroni shfrytëzoi formulën

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

për njehsimin e syprinës së sipërfaqes së trekëndëshit kur na janë dhënë gjatësitë e brinjëve a, b dhe c , ku $s = \frac{a+b+c}{2}$. Astronomët e vjetër njehsonin largesën e trupave qiellorë nga Toka pikërisht duke shfrytëzuar trigonometrinë, etj.

7.1. Funksionet trigonometrike të këndeve të ngushta

Le të jetë dhënë trekëndëshi kënddrejtë $\triangle ABC$ me këndet e ngushta α, β te kulmet A, B respektivisht dhe këndin e drejtë te kulmi C ; katetet a, b përballë këndeve α, β respektivisht dhe hipotenuzë c përballë këndit të drejtë. Këtu, $\alpha + \beta = 90^\circ$, $a, b < c$ dhe $a^2 + b^2 = c^2$ (teorema e Pitagorës).

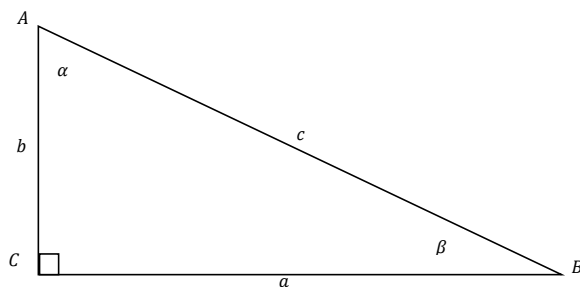


Fig. 7.1

Përkufizim 7.1.1. Funksionet trigonometrike të këndit të ngushtë α përkufizohen si vijon

$$\left. \begin{array}{l} \sin \alpha = \frac{a}{c} \\ \cos \alpha = \frac{b}{c} \\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} \\ \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \\ \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} \end{array} \right\}. \quad (1)$$

Ngjashëm,

$$\left. \begin{array}{l} \sin \beta = \frac{b}{c} \\ \cos \beta = \frac{a}{c} \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a} \\ \operatorname{ctg} \beta = \frac{a}{b} \end{array} \right\}. \quad (1')$$

Lexuesi nuk e ka vështirë, p.sh. sinusin e këndit ta formulojë si *raport (herës) ndërmjet katetës përballë këndit dhe hipotenuzës*, ndërsa kosinusin e këndit ta formulojë si *raport (herës) ndërmjet katetës ku shtrihet këndi dhe hipotenuzës*, etj.

Nga përkufizimi i mësipërm, vërejmë se për këndet e ngushta α dhe β të tilla që $\alpha + \beta = 90^\circ$, vlen

$$\left. \begin{array}{l} 0 < \sin \alpha, \sin \beta < 1 \\ 0 < \cos \alpha, \cos \beta < 1 \\ 0 < \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{tg} \beta < \infty \\ 0 < \operatorname{ctg} \alpha, \operatorname{ctg} \beta < \infty \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \sin \alpha = \cos \beta \\ \cos \alpha = \sin \beta \\ \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta \\ \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} \end{array} \right\}$$

dhe

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1. \quad (2)$$

Shembulli 7.1. T'i njehsojmë funksionet trigonometrike të këndeve 30° , 60° dhe 45° .

Zgjidhje. Për njehsimin e vlerave të funksioneve trigonometrike të këndeve 30° dhe 60° nisemi nga trekëndëshi barabrinjës, ndërsa për njehsimin e vlerave të funksioneve trigonometrike të këndit 45° nisemi nga trekëndëshi kënddrejtë barakrahësh.

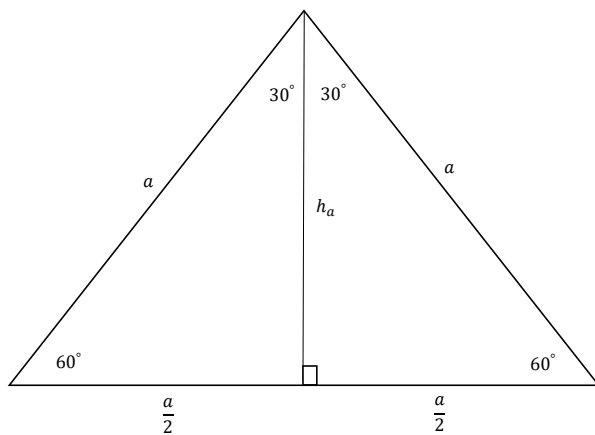


Fig. 7.2

Te trekëndëshi barabrinjës me gjatësi të brinjës a lartësitë janë kongruente, ndërsa gjatësia e tyre është $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; këndet e brendshme janë nga 60° si dhe simetralja e cilitdo kënd të brendshëm përputhet me lartësinë dhe simetralen e brinjës përballë kulmit. Në bazë të kësaj, kemi:

$$\left. \begin{array}{l} \sin 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2} \\ \sin 60^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \cos 30^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2} \end{array} \right\},$$

ndërsa

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 30^\circ} = \sqrt{3} \\ \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array} \right\}.$$

Meqenëse hipotenuza c e trekëndëshit kënddrejtë barakrahësh me katete a është $c = a\sqrt{2}$, atëherë për këndin 45° kemi

$$\begin{aligned} \sin 45^\circ &= \frac{a}{c} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos 45^\circ &= \frac{a}{c} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

si dhe

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1.$$

Tani, mund të ndërtojmë këtë tabelë

| α | $\sin \alpha$ | $\cos \alpha$ | $\operatorname{tg} \alpha$ | $\operatorname{ctg} \alpha$ |
|------------|----------------------|----------------------|----------------------------|-----------------------------|
| 30° | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{3}$ |
| 60° | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| 45° | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 | 1 |

7.2. Funkcionet trigonometrike të këndeve të çfarëdoshme

Siç e dijmë nga gjeometria, këndi është union i dy gjysmëdrejtëzave a dhe b me fillim të përbashkët në një pikë O . Pika O quhet *kulmi* i këndit, ndërsa gjysmëdrejtëzat a dhe b quhen *krahët* e këndit.

Çdo këndi jo të orientuar i shoqërohet një numër real jonegativ i cili quhet *masë* e atij këndi, ndërsa të këndet e orientuara masa mund të jetë edhe negative. Janë disa njësi për matjen e këndeve, por ato më standarde janë shkalla $^\circ$, grada (gr) dhe radiani (rad). Raporti ndërmjet tyre është

$$2\pi \cdot \text{rad} = 360^\circ = 400 \text{ gr} \implies \pi \cdot \text{rad} = 180^\circ = 200 \text{ gr},$$

$$\text{prandaj } 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = 57.2957795\dots^\circ.$$

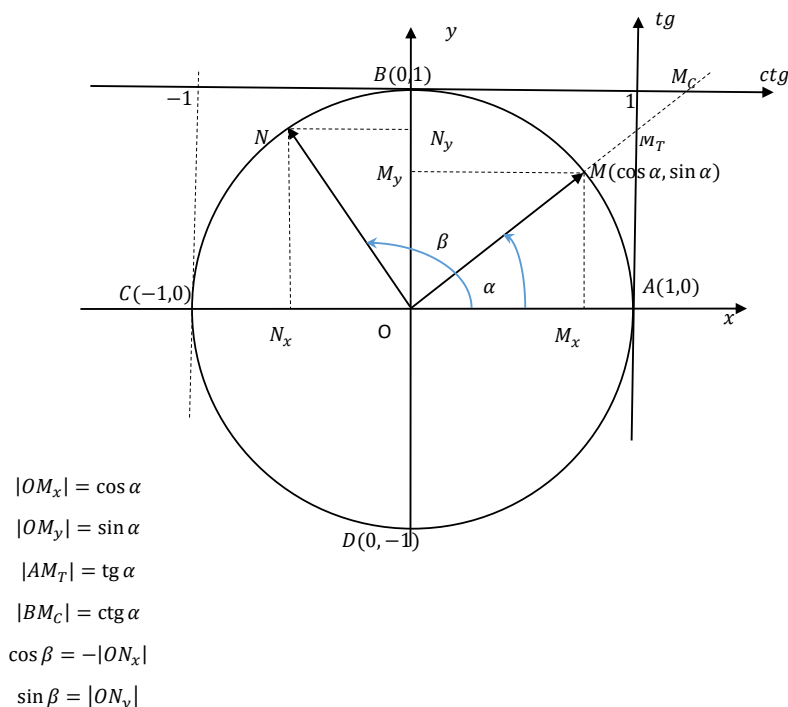


Fig. 7.3

Le të konsiderojmë rrethin $l(0,1)$ me qendër në origjinën $O(0,0)$ të sistemit koordinativ xOy dhe rreze të barabartë me 1. Ky rreth quhet *rrethi trigonometrik*. Le të jetë $A(1,0)$ ($B(0,1)$) pikëprerja e këtij rrethi me gjysmëboshtin pozitiv të boshtit Ox (Oy). Në vazhdim të gjitha këndet do t'i konsiderojmë me kulm në pikën O dhe njërin krah (fiks) të përputhet me gjysmëdrejtëzën OA , ndërsa krahu tjetër ndërron. Nëse krahu tjetër lëviz në kahjen e kundërt me atë të lëvizjes së akrepave të orës, këto kënde do t'i konsiderojmë me masë pozitive, ndërsa kur krahu tjetër lëviz në kahjen e njëjtë me atë të lëvizjes së akrepave të orës, atëherë këto kënde do t'i konsiderojmë me masë negative. Kështu, këndi $\alpha = \angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$, tregon se pika M i takon rrethit trigonometrik $l(O,1)$, ndërsa A është pikë fikse e rrethit $l(O,1)$, e cila ndodhet në boshtin Ox .

Tani, mund të përkufizojmë vlerat e funksioneve trigonometrike të këndit të çfarëdoshëm $\alpha = \angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$. Le të jenë M_x (M_y) projeksionet normale të pikës M në boshtin Ox (Oy). Atëherë marrim këtë

Përkufizim 7.2.1. Kosinus (sinus) të këndi α quajmë vlerën algjebrike të projekcionit normal të rrezevektorit \overrightarrow{OM} në boshtin Ox (Oy).

D.m.th.

$$\cos \alpha = \begin{cases} |OM_x|, & \text{nëse vektorët } \overrightarrow{OM_x} \text{ dhe } \overrightarrow{Ox} \\ & \text{janë me kahje të njëjtë} \\ 0, & \text{nëse vektori } \overrightarrow{OM} \text{ është normal në vektorin } \overrightarrow{Ox} \\ -|OM_x|, & \text{nëse vektorët } \overrightarrow{OM_x} \text{ dhe } \overrightarrow{Ox} \\ & \text{janë me kahje të kundërt,} \end{cases}$$

$$\sin \alpha = \begin{cases} |OM_y|, & \text{nëse vektorët } \overrightarrow{OM_y} \text{ dhe } \overrightarrow{Oy} \\ & \text{janë me kahje të njëjtë} \\ 0, & \text{nëse vektori } \overrightarrow{OM} \text{ është normal në vektorin } \overrightarrow{Oy} \\ -|OM_y|, & \text{nëse vektorët } \overrightarrow{OM_y} \text{ dhe } \overrightarrow{Oy} \\ & \text{janë me kahje të kundërt.} \end{cases}$$

Duke i konsideruar tangjentet tg (ctg) të rrethit trigonometrik l në pikën $A(1, 0)$ ($B(0, 1)$) si boshte numerike me origjinë në pikën A (B), funksionet $\text{tg } \alpha$ dhe $\text{ctg } \alpha$ për këndin α , i përkufizojmë si vijon: këndit α i përgjigjet pika e vetme M në rrethin trigonometrik l . Drejtëza $d(O, M)$ e pret drejtëzën (tangjenten) tg (ctg) në pikën M_T (M_C), e cila për abshisë (ordinatë) ka $x = 1$ ($y = 1$), ndërsa për ordinatë (abshisë) ka një vlerë tjetër y (x) e cila quhet *tangjent* (*kotangjent*) i këndit α .

Kështu, për $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, kemi:

$$\text{tg } \alpha = \begin{cases} |AM_T|, & \text{nëse vektorët } \overrightarrow{AM_T} \text{ dhe } \overrightarrow{\text{tg}} \\ & \text{janë me kahje të njëjtë,} \\ 0, & \text{nëse vektori } \overrightarrow{OM_T} \text{ është normal në vektorin } \overrightarrow{\text{tg}}, \\ -|AM_T|, & \text{nëse vektorët } \overrightarrow{AM_T} \text{ dhe } \overrightarrow{\text{tg}} \\ & \text{janë me kahje të kundërt,} \end{cases}$$

kurse për $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$, kemi:

$$\text{ctg } \alpha = \begin{cases} |BM_C|, & \text{nëse vektorët } \overrightarrow{BM_C} \text{ dhe } \overrightarrow{\text{ctg}} \\ & \text{janë me kahje të njëjtë,} \\ 0, & \text{nëse vektori } \overrightarrow{OM} \text{ është normal në vektorin } \overrightarrow{\text{ctg}} \\ -|BM_C|, & \text{nëse vektorët } \overrightarrow{BM_C} \text{ dhe } \overrightarrow{\text{ctg}} \\ & \text{janë me kahje të kundërt.} \end{cases}$$

Nga kjo që u tha më lartë, shihet qartë se $\sin 0^\circ = 0$, $\sin 90^\circ = \sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\sin(-90^\circ) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $\sin 270^\circ = \sin 3\frac{\pi}{2} = -1$, $\sin 450^\circ = \sin 5\frac{\pi}{2} = 1$, ndërsa $\cos 0^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = \cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\cos 180^\circ = \cos \pi = -1$, $\cos(-90^\circ) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\cos 270^\circ = \cos 3\frac{\pi}{2} = 0$, $\cos 360^\circ = \cos 2\pi = 1$, $\cos 450^\circ = \cos 5\frac{\pi}{2} = 0$, etj.

Meqenëse boshtet koordinative e ndajnë rrethin trigonometrik $l(O, 1)$ në katër pjesë kongruente (kuadrante), atëherë shohim se funksioni **sin** i këndëve, rrezevektori \overrightarrow{OM} i të cilëve ndodhet në kuadrantin e parë apo të dytë, është pozitiv, ndërsa në kuadrantin e tretë dhe të katërt është negativ; kurse kosinusi është pozitiv në kuadrante I dhe IV, ndërsa negativ në ata II dhe III. Funksionet **tg** dhe **ctg** e kanë shenjën e njëjtë dhe ata janë pozitiv në kuadrantet I dhe III, kurse negativ në kuadrantet II dhe IV. Nga përkufizimi i mësipërm kemi

$$\left. \begin{array}{l} \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos \alpha, \\ \sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin \alpha, \\ \cos(-\alpha) = \cos \alpha, \quad \operatorname{tg}(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{ctg} \alpha, \\ \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{ctg}(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{tg} \alpha, \\ \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha, \quad \operatorname{ctg}(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{tg} \alpha, \\ \sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha \quad \sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\cos \alpha, \\ \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha \quad \cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \sin \alpha, \\ \operatorname{tg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{tg} \alpha \quad \operatorname{tg}(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{ctg} \alpha, \\ \operatorname{ctg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{ctg} \alpha \quad \operatorname{ctg}(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{tg} \alpha, \end{array} \right\} (k \in \mathbf{Z}),$$

që d.m.th. se funksionet trigonometrike janë funksione periodike dhe ato funksionet **sin** dhe **cos** me periodë $T = 2\pi$, ndërsa ato **tg** dhe **ctg** me periodë $T = \pi$. Po ashtu vlen identiteti

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1, \quad \forall \alpha \in \mathbf{R}, \quad (3)$$

si dhe

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \alpha \neq k\pi \\ \sin \alpha = \pm \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \alpha \neq k\pi \end{array} \right\} (k \in \mathbf{Z}),$$

ku shenja \pm varet se në cilin kuadrant ndodhet këndi α .

Kujdes! Duhet të kemi parasysh se tangjenti i këndit $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ nuk ekziston, sepse në atë rast drejtëza $d(O, M)$ është paralele me drejtëzën tg dhe si të tilla nuk priten. Por, në rastin limit (kufitar), kur masa e këndit α i afrohet $\frac{\pi}{2}$ nga ana e majtë (më i vogël se $\frac{\pi}{2}$), d.m.th. $\alpha \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$, vlerat $tg \alpha$ tentojnë në $+\infty$; kurse kur $\alpha \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+$, vlerat $tg \alpha$ tentojnë në $-\infty$. Pra:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} tg \alpha = +\infty, \quad \text{kurse} \quad \lim_{\alpha \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} tg \alpha = -\infty.$$

Ngjashëm, kotangjenti i këndit $\alpha = k\pi, k \in \mathbf{Z}$ nuk ekziston. P.sh., për këndin $\alpha = 0$ kotangjenti i tij nuk ekziston, por

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} ctg \alpha = +\infty, \quad \text{kurse} \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0^-} ctg \alpha = -\infty,$$

Ja disa vlera të funksioneve trigonometrike për disa kënde karakteristike, të cilat i lexojmë drejtpërdrejt nga rrethi trigonometrik:

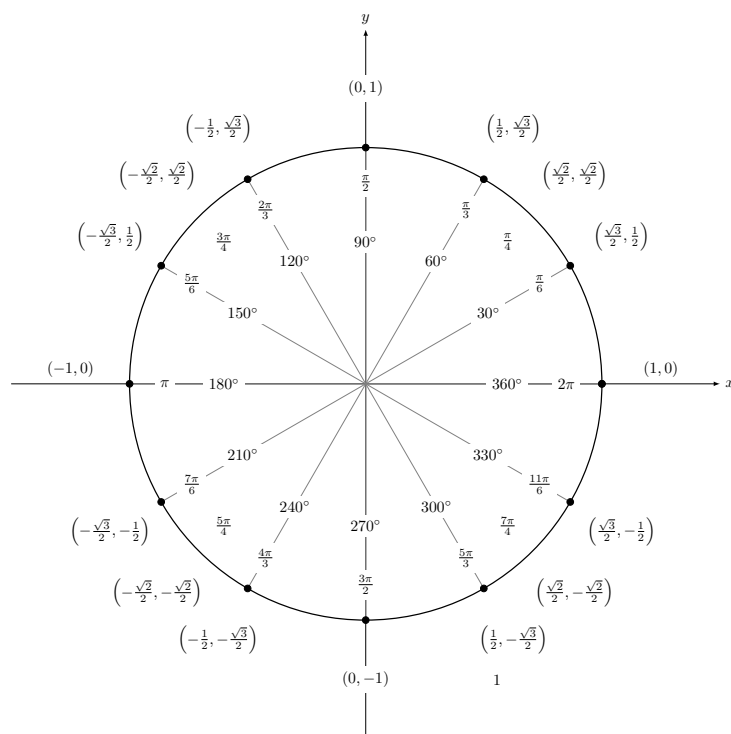
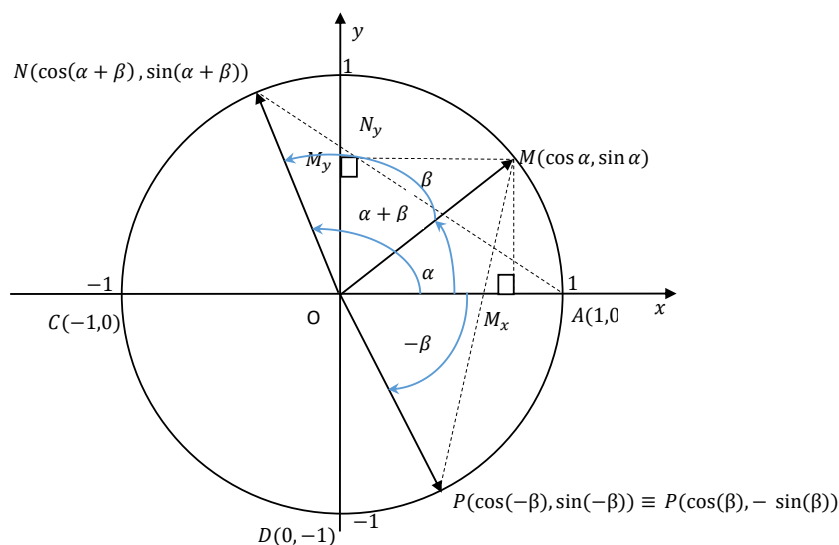


Fig. 7.3'

7.3. Formulatat e adiconit dhe rrjedhimet e tyre

Formulat e adiconit zënë një vend qendror në trigonometri. Ato na ndihmojnë që t'i njehsojmë vlerat e funksioneve trigonometrike të shumës apo diferencës së dy këndeve α dhe β ; të zgjidhim ekuacione, inekuacione dhe shumë probleme tjera në trigonometri.

Ndërmjet numrave realë \mathbf{R} dhe pikave të rrehtit trigonometrik mund të ndërtohet një korrespondencë biunivoke E , p.sh. çdo numri real t i korrespondon këndi me masë t , njëri krah i të cilit përputhem me abshisën ox , ndërsa pikëprerja e krahut tjetër me rrethin trigonometrik do të ishte pika korresponduese. D.m.th. $E: \mathbf{R} \rightarrow Q$, ku Q është rrethi trigonometrik.



Nga kongruenca e trekëndëshave AON dhe MOP rrjedh se $|AN| = |MP|$.

Fig. 7.4

Le të jenë $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Shënojmë me $A = E(0)$, ndërsa $N = E(\alpha + \beta)$. Le të jenë $P = E(-\beta)$ dhe $M = E(\alpha)$. Është e qartë se gjatësia e harkut PM është $\alpha + \beta$. Meqenëse harqeve kongruente u përgjigjen tetiva kongruente të të njëjtit rreth, përfundojmë se $|AN| = |PM|$. Koordinatat planare të pikave të mësipërme janë: $A(1, 0)$, $N(\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta))$, $P(\cos(-\beta), \sin(-\beta)) = (\cos \beta, -\sin \beta)$, $M(\cos \alpha, \sin \alpha)$. Tani shfrytëzojmë formulën për distancën mes dy pikave $A(x_1, y_1)$ dhe $B(x_2, y_2)$ në rrafshin xOy

$$|AB|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

dhe marrim

$$\begin{aligned} |AN|^2 &= (\cos(\alpha + \beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha + \beta))^2 = 2 - 2\cos(\alpha + \beta), \\ |PM|^2 &= (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2 = 2 - 2\cos\alpha\cos\beta + 2\sin\alpha\sin\beta. \end{aligned}$$

Meqenëse $|AN|^2 = |PM|^2$, prandaj pas barazimit të anëve të djathta, marrim

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

Nëse në formulën e mësipërme në vend të β zëvendësojmë $-\beta$, dhe shfrytëzojmë vetitë e funksioneve \sin dhe \cos , do të marrim identitetin

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta, \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{R}).$$

Po ashtu, duke ditur se $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$, marrim formulat adicionele për \sin , si vijon

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta. \end{aligned} \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{R})$$

Të katër këto formula mund t'i shkruajmë në një formë më të shkurtuar dhe më të përshtatshme për t'i mbajtur në mend:

$$\left. \begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \end{aligned} \right\}. \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{R}) \quad (4)$$

Shembulli 7.2. T'i njehsojmë $\sin 75^\circ$, $\cos 75^\circ$, $\operatorname{tg} 75^\circ$, $\operatorname{ctg} 75^\circ$, si dhe $\sin 105^\circ$, $\cos 105^\circ$, $\operatorname{tg} 105^\circ$ dhe $\operatorname{ctg} 105^\circ$.

Zgjidhje. Vlen

$$\begin{aligned} \sin 75^\circ &= \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \cdot \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

Ngjashëm, marrim se

$$\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1), \operatorname{tg} 75^\circ = 2 + \sqrt{3}, \operatorname{ctg} 75^\circ = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}.$$

Për rastet tjera, shfrytëzoni barazimin $105^\circ = 60^\circ + 45^\circ$. Tani mund t'i gjejmë formulat e përshtatshme për $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$, $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta)$, etj. Vlen

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \\ \cos 2\alpha &= \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha. \end{aligned}$$

Për njehsimin e $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$ dhe $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta)$ shfrytëzojmë formulat (4). D.m.th.

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta} = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Në mënyrë analoge marrim se

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha}.$$

Rrjedhim i dy formulave të mësipërme janë formulat:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, & \alpha &\neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}, \\ \operatorname{ctg} 2\alpha &= \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}, & \alpha &\neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Duke i shfrytëzuar formulat (2) marrim identitetet

$$\begin{aligned} \sin n\pi &= 0, & \cos n\pi &= (-1)^n, \\ \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= (-1)^n \cos \alpha, & \cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= (-1)^{n+1} \sin \alpha \\ \sin(n\pi + \alpha) &= (-1)^n \sin \alpha, & \cos(n\pi + \alpha) &= (-1)^n \cos \alpha, \quad n \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Identiteti (3) dhe formulat (4) luajnë një rol të rëndësishëm në trigonometri. Çdo formulë tjetër trigonometrike direkt ose indirekt është rezultat i tyre. Prandaj rekomandohet që ato patjetër të mbahen mend, ndërsa formulat tjera të nxirren prej tyre.

Meqenëse

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ 1 &= \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha, \end{aligned}$$

atëherë po t'i mbledhim (zbresim) anë për anë marrim formulat

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha &= \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \implies \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}, \\ \sin^2 \alpha &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \implies \sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} \end{aligned}$$

ku shenja \pm varet se në cilin kuadrant ndodhet këndi. Këto formula njihen si formulat e *gjysmëkëndit*.

Shembulli 7.3. Të njehsojmë $\sin \frac{\pi}{8}, \cos \frac{\pi}{8}, \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$ dhe $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{8}$.

Zgjidhje. Këndi $\frac{\pi}{8}$ ndodhet në kuadrantin e parë, prandaj kemi

$$\sin \frac{\pi}{8} = +\sqrt{\frac{1 - \cos 2 \cdot \frac{\pi}{8}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

Ngjashëm, marrim se

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{8} &= \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}, \\ \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} &= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{2} - 1, \\ \operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} &= \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}} = \sqrt{2} + 1. \end{aligned}$$

Por

$$\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right) = -\sqrt{\frac{1 - \cos 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{8}\right)}{2}} = -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2},$$

sepse këndi ndodhet në kuadrantin e katërt, e në të cilin sinusi është negativ. Po ashtu

$$\sin \alpha = \sin 2 \cdot \frac{\alpha}{2} = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Në mënyrë analoge marrim se

$$\cos \alpha = \cos 2 \cdot \frac{\alpha}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Nëse merret zëvendësimi $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = t$, atëherë marrim formulat

$$\sin \alpha = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Formulat (4) në fakt përmbajnë katër formula. Duke i mbledhur (zbritur) ato marrim:

$$\left. \begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) &= 2 \sin \alpha \cos \beta \\ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) &= 2 \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) &= 2 \cos \alpha \cos \beta \\ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) &= -2 \sin \alpha \sin \beta \end{aligned} \right\}. \quad (5)$$

Nëse marrim zëvendësimet $\alpha + \beta = x$ dhe $\alpha - \beta = y$, prej nga marrim se $\alpha = \frac{x+y}{2}$, $\beta = \frac{x-y}{2}$, atëherë formulat e mësipërme marrin formën

$$\left. \begin{aligned} \sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \sin x - \sin y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \\ \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \end{aligned} \right\}, \quad (6)$$

të cilat na mundësojnë që shumë (diferencën) e funksioneve trigonometrike ta zbërthejmë në prodhim. Këto formula gjejnë zbatim në analizën matematike tek limitet dhe derivatet e funksioneve.

Nga formulat (5) marrim formulat

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)], \\ \cos \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)], \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)], \\ \sin \alpha \sin \beta &= -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)], \end{aligned} \right\}, \quad (7)$$

të cilat na mundësojnë që prodhimin e funksioneve trigonometrike \sin dhe \cos ta zbërthejmë në shumë apo diferencë. Këto gjejnë zbatim te integralet e funksioneve trigonometrike.

Preferohet që studenti t'i mbajë mend formulat (3) – (7) dhe t'i zbatojë ato sa herë që të paraqitet nevoja.

Shembulli 7.4. T'i thjeshtojmë shprehjet

$$\begin{aligned} \sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha &= \sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + \cos^2 \alpha = \\ &= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \\ \frac{1 + \operatorname{tg}^4 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha} &= \frac{\frac{\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha}{\cos^4 \alpha}}{\frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha. \end{aligned}$$

Shembulli 7.5. T'i vërtetojmë identitetet

$$\begin{aligned} (a) \quad \cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha &\equiv 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha, & (c) \quad \cos 4\alpha + 4 \cos 2\alpha + 3 &\equiv 8 \cos^4 \alpha, \\ (b) \quad \cos^6 \alpha + \sin^6 \alpha &\equiv 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha, & (d) \quad \frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} &\equiv \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

Zgjidhje. Vlen

$$\begin{aligned} (a) \quad \cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 1 - \frac{4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{2} \\ &= 1 - \frac{1}{2} (2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha)^2 = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad \cos^6 \alpha + \sin^6 \alpha &= ((\sin^2 \alpha)^3 + (\cos^2 \alpha)^3) = \\ &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha) \\ &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \\ &= 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha. \end{aligned}$$

(c) Së pari $\cos 4\alpha$ dhe $\cos 2\alpha$ i shprehim përmes $\cos \alpha$. Vlen

$$\begin{aligned} \cos 4\alpha &= \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha = 2 \cos^2 2\alpha - 1 = 2(2 \cos^2 \alpha - 1)^2 - 1 \\ &= 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1, \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1. \end{aligned}$$

Prandaj

$$\begin{aligned} \cos 4\alpha + 4 \cos 2\alpha + 3 &= 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1 + 8 \cos^2 \alpha - 4 + 3 = \\ &= 8 \cos^4 \alpha \end{aligned}$$

(d) Vlen

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} &= \frac{2 \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2 \sin \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha)}{2 \cos \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha)} = \\ &= \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

Shembulli 7.6. Pa përdorur tabelën logaritmike apo kalkulatorin njehsoni

$$\begin{aligned} (a) \quad & \sin 75^\circ + \sin 15^\circ, & (c) \quad & \sin 105^\circ - \sin 15^\circ, \\ (b) \quad & \cos 105^\circ - \cos 75^\circ, & (d) \quad & \cos 75^\circ - \cos 15^\circ. \end{aligned}$$

Zgjidhje. (a) Do të shfrytëzojmë formulat (6). Vlen

$$\begin{aligned} \sin 75^\circ + \sin 15^\circ &= 2 \sin \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \cdot \cos \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} = 2 \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}. \end{aligned}$$

(b) Vlen

$$\begin{aligned} \cos 105^\circ - \cos 75^\circ &= -2 \sin \frac{105^\circ + 75^\circ}{2} \cdot \sin \frac{105^\circ - 75^\circ}{2} = -2 \sin 90^\circ \cdot \sin 15^\circ \\ &= -2 \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = -\sqrt{2 - \sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Ngjashëm i llogarisim edhe dy rastet tjera dhe për rezultat marrim

$$(c) \quad \sin 105^\circ - \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (d) \quad \cos 75^\circ - \cos 15^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Detyra në lidhje me shprehjet trigonometrike

1. Tregoni se janë të sakta identitetet

$$\begin{aligned} (a) \quad & \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}, \\ (b) \quad & \cos 10^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}, \\ (c) \quad & \operatorname{tg} 6^\circ \cdot \operatorname{tg} 54^\circ \cdot \operatorname{tg} 66^\circ = \operatorname{tg} 18^\circ. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} (a) \quad & (\cos \alpha + \cos \beta)^2 + (\sin \alpha + \sin \beta)^2 = 4 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ (b) \quad & (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 = 4 \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ (c) \quad & \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma - \sin(\alpha + \beta + \gamma) = 4 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \sin \frac{\gamma + \alpha}{2}, \\ (d) \quad & \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + \cos(\alpha + \beta + \gamma) = 4 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \cos \frac{\gamma + \alpha}{2}, \\ (e) \quad & \cos^3 \alpha \cdot \sin \alpha - \sin^3 \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\sin 4\alpha}{4}, \\ (f) \quad & \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos(\alpha + \beta) = \sin^2(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

3. Nëse α, β, γ janë këndet e brendshme të një trekëndëshi, atëherë vërtetoni identitetet

$$(a) \quad \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2},$$

$$(b) \quad \sin \beta + \sin \gamma - \sin \alpha = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2},$$

$$(c) \quad \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2},$$

$$(d) \quad \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma,$$

$$(e) \quad \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

Udhëzim. Shfrytëzoni faktin se $\alpha + \beta + \gamma = \pi = 180^\circ$.

4. Nëse $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, atëherë vërtetoni identitetet

$$(a) \quad \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \cdot \operatorname{ctg} \gamma,$$

$$(b) \quad \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma + 2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma = 1.$$

5. Pa tabelë logaritmike apo kalkulator tregoni se

$$(a) \quad \sin \frac{\pi}{8} \cdot \sin \frac{2\pi}{8} \cdot \sin \frac{3\pi}{8} = \frac{1}{4},$$

$$(b) \quad \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2},$$

$$(c) \quad 16 \sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ \cdot \sin 90^\circ = 1,$$

$$(d) \quad \sin 10^\circ \cdot \sin 20^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \cos 10^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos 40^\circ = \frac{3}{256}.$$

7.4. Barazimet (ekuacionet) trigonometrike

Përkufizimi 7.4.1. Çdo barazim (ekuacion) tek i cili e panjohura paraqitet si argument i së paku njërit prej funksioneve trigonometrike, quhet barazim (ekuacion) trigonometrik.

1. Ekuacionet e tipit $\sin x = a$ kanë zgjidhje në \mathbf{R} nëse $|a| \leq 1$. Nëse $x = \arcsin a = \varphi$, atëherë bashkësia e zgjidhjeve B e ekuacionit do të jetë:

$$B = \{\varphi + 2k\pi : k \in \mathbf{Z}\}.$$

2. Ekuacionet e tipit $\cos x = a$, zgjidhen ngjashëm sikur ata të tipit 1.

3. Ekuacionet e tipit $\operatorname{tg} x = a$, kanë zgjidhje në \mathbf{R} për çdo $a \in \mathbf{R}$. Nëse $x = \operatorname{arctg} a = \varphi$, atëherë bashkësia e zgjidhjeve do të jetë:

$$B = \{\varphi + k\pi : k \in \mathbf{Z}\}.$$

4. Ekuacionet e tipit $\operatorname{ctg} x = a$, zgjidhen ngjashëm sikur ata të tipit 3.

5. Ekuacionet e tipit $a \sin x + b \cos x = c$, zgjidhen me anë të zëvendësimit $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, me ç'rast kemi:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

ndërsa ekuacioni i tipit 5 kalon në një ekuacion algjebrik (racional) sipas t -së.

6. Ekuacionet e tipit $a \sin^2 x + b \sin x + c = 0$, ($a \cos^2 x + b \cos x + c = 0$, $a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0$, $a \operatorname{ctg}^2 x + b \operatorname{ctg} x + c = 0$) zgjidhen me anë të zëvendësimit $\sin x = t$, ($\cos x = t$, $\operatorname{tg} x = t$, $\operatorname{ctg} x = t$).

7. Ekuacionet e tipit $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$, pas pjesëtimit me $\cos^2 x$, ($x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$) kthehen në ato të tipit 6.

Shembulli 7.7. Të zgjidhen ekuacionet:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & 2 \sin x = 1, & \text{(ç)} & 2 \sin^2 x + \sin x = 0, \\ \text{(b)} & 2 \cos x = \sqrt{3}, & \text{(d)} & \sin x = \sin 2x, \\ \text{(c)} & \operatorname{tg} x = 1, & \text{(dh)} & \sin 3x = \cos 2x. \end{array}$$

Zgjidhje. (a) Nga $\sin x = \frac{1}{2}$ marrim se $x = \arcsin \frac{1}{2} \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$, d.m.th. bashkësia e zgjidhjeve është:

$$B = \left\{ x : x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

(b) Ngjashëm si në rastin (a), marrim se bashkësia e zgjidhjeve është

$$B = \left\{ x : x = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

(c)

$$B = \left\{ x : x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

(ç) Ekuacioni i dhënë është ekuivalent me ekuacionin $\sin x = 0$ ose $2 \sin x + 1 = 0$, respektivisht $x = k\pi$, ose $\sin x = -\frac{1}{2}$, prandaj bashkësia e zgjidhjeve të ekuacionit është:

$$B = \left\{ x : x = k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

(d) Ekuacioni i dhënë është ekuivalent me ekuacionin $\sin x = 2 \sin x \cos x$, i cili është i ngjashëm me atë të tipit (ç), prandaj bashkësia e zgjidhjeve është:

$$B = \left\{ x : x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

(dh) Ekuacionin e dhënë mund ta zgjidhim në dy mënyra:

1° Ekuacioni $\sin 3x = \cos 2x$ është ekuivalent me ekuacionin $\sin 3x - \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) = 0$, ndërsa ky i fundit është ekuivalent me ekuacionin:

$$2 \cos \frac{3x + \frac{\pi}{2} - 2x}{2} \sin \frac{3x + \frac{\pi}{2} + 2x}{2} = 0.$$

Prandaj, $\cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = 0$, ose $\sin \left(\frac{5}{2}x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$, që d.m.th.

$$\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad \text{ose} \quad \frac{5}{2}x - \frac{\pi}{4} = m\pi, k, m \in \mathbf{Z}$$

respektivisht

$$x = \frac{\pi}{2}(4k+1) \vee x = \frac{\pi}{10}(4m+1), k, m \in \mathbf{Z}.$$

2° Ekuacioni $\sin 3x = \cos 2x$ është ekuivalent me ekuacionin $\sin 3x = \sin \left(\frac{\pi}{2} \pm 2x \right)$, prandaj kemi:

$$3x = \frac{\pi}{2} + 2x + 2k\pi \quad \text{ose} \quad 3x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2m\pi,$$

respektivisht

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ose} \quad x = \frac{\pi}{10}(4m+1), k, m \in \mathbf{Z}.$$

Shembulli 7.8. Të zgjidhen ekuacionet:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & 1 - 2 \sin^2 8x = \sin 4x, & \text{(d)} \quad & \sin^2 x + \cos^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}, \\ \text{(b)} \quad & \sin^4 x - \cos^4 x = \cos x, & \text{(dh)} \quad & \sin^2 x - \sin^4 x + \cos^4 x = 1, \\ \text{(c)} \quad & 3 \cos^2 x - \sin^2 x - 4 \cos 2x = 0, & \text{(e)} \quad & \sin^4 x - \cos^4 x = -\sin^8 x - \cos^8 x. \end{aligned}$$

Udhëzim. (a) Ekuacioni i dhënë është ekuivalent me ekuacionin $\cos 16x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right)$, prandaj

$$16x = \frac{\pi}{2} - 4x + 2k\pi \quad \text{ose} \quad 16x = -\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) + 2m\pi, k, m \in \mathbf{Z},$$

që d.m.th.

$$x = \frac{\pi}{40} + \frac{k\pi}{10}, \quad \text{ose} \quad x = -\frac{\pi}{24} + \frac{m\pi}{6}, k, m \in \mathbf{Z}.$$

(b) Ekuacioni i dhënë është ekuivalent me ekuacionin $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos x$, respektivisht $-\cos 2x = \cos x$. Zbatojmë formulat për transformimin e shumës së kosinuseve në prodhim dhe marrim:

$$2 \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0,$$

respektivisht

$$\frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{ose} \quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + m\pi,$$

që d.m.th.

$$x = \frac{\pi}{3}(1 + 2k) \quad \text{ose} \quad x = \pi(1 + 2m), k, m \in \mathbf{Z}.$$

(c) Ekuacioni i dhënë është ekuivalent me ekuacionin

$$3 \frac{1 + \cos 2x}{2} - \frac{1 - \cos 2x}{2} - 4 \cos 2x = 0,$$

prej nga marrim se $\cos 2x = \frac{1}{2}$, prandaj $2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2km$, respektivisht $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

(d) Ngjashëm sikurse në rastin (c).

(dh) Ekuacioni i dhënë është ekuivalent me ekuacionin $\sin^2 x - (\sin^2 x - \cos^2 x) = 1$, respektivisht $\cos^2 x = 1$, që d.m.th. $\cos x = \pm 1$, prandaj $x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

(e) Të shfrytëzohet identiteti i ndryshimit të katrorëve, e pastaj formulat për gjysmëkëndin.

Shembulli 7.9. Të zgjidhet ekuacioni $\cos^2\left(\frac{\pi}{3} \cos x - \frac{8\pi}{3}\right) = 1$.

Zgjidhje. Ekuacioni i dhënë është ekuivalent me ekuacionin

$$1 + \cos 2 \left(\frac{\pi}{3} \cos x - \frac{8\pi}{3} \right) = 2,$$

respektivisht $\frac{\pi}{3} \cos x - \frac{8\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$. Ekuacioni i fundit është ekuivalent me ekuacionin $\cos x = 3k + 8$. Meqenëse $-1 \leq \cos x \leq 1$, atëherë nga sistemi i inekuacioneve lineare $-1 \leq 3k + 8 \leq 1$ dhe $k \in \mathbf{Z}$, marrim se $k = -3$. D.m.th. $\cos x = -1$, prandaj $x = (2m + 1)\pi, m \in \mathbf{Z}$.

Shembulli 7.10. Të zgjidhen ekuacionet

$$(a) \quad 4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3, \quad x \in \left[\frac{3}{4}, 1 \right],$$

$$(b) \quad \log_2 |\operatorname{tg} x| + \log_4 \frac{\cos x}{2 \cos x + \sin x} = 0, \quad x \in \left[\frac{9}{4}, 3 \right],$$

$$(c) \quad \left| \log_{\frac{1}{3}}(1 + \sin 2x) \right| + \left| \log_{\frac{1}{3}}(1 - \sin 2x) \right| = 1.$$

Udhëzim. (a) Së pari shfrytëzoni identitetin $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ e pastaj zëvendësoni $2^{\cos 2x} = t$ me ç'rast fitoni një ekuacion kuadratik.

Rezultati: (a) $x = \frac{\pi}{4}$, (b) $x = \frac{3\pi}{4}$, (c) $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.

Detyra në lidhje me ekuacionet trigonometrike

Të zgjidhen ekuacionet:

1.

$$\begin{aligned} (1) \quad \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} \right) &= -1, & (2) \quad \cos \left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} \right) &= 1, \\ (3) \quad \sqrt{2} \cos \left(2x - \frac{\pi}{5} \right) &= 1, & (4) \quad 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) &= \sqrt{3}, \\ (5) \quad 3 \operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{6} \right) &= -\sqrt{3}, & (6) \quad \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{3} \right) &= 1. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} (1) \quad 4\sqrt{3} \sin \left(3x - \frac{3\pi}{8} \right) &= 6, & (2) \quad 6\sqrt{3} \cos \left(2x + \frac{3\pi}{4} \right) &= -9, \\ (3) \quad \sqrt{3} + 3 \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - 3x \right) &= 0, & (4) \quad 3 + \sqrt{3} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{4} \right) &= 0, \\ (5) \quad \frac{\sqrt{3}}{\cos \left(3x - \frac{\pi}{3} \right)} &= 2, & (6) \quad \frac{1}{\sin \left(4x + \frac{\pi}{6} \right)} &= 2. \end{aligned}$$

3.

$$(1) \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad (2) \quad \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{3}{4},$$

$$(3) \quad \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1, \quad (4) \quad \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{6} - x\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 3.$$

4.

$$(1) \quad \sin x + \sin 3x = 0, \quad (2) \quad \cos 2x + \cos x = 0,$$

$$(3) \quad \cos 3x = \cos 5x, \quad (4) \quad \sin 5x = \cos 10x,$$

$$(5) \quad \cos 3x = \cos x, \quad (6) \quad \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right).$$

5.

$$(1) \quad \sin x \cdot \cos 2x = 0, \quad (2) \quad \sin^2 x = 2 \sin x,$$

$$(3) \quad \sin^3 2x - \sin 2x = 0, \quad (4) \quad \cos^4 x - \cos^2 x = 0,$$

$$(5) \quad \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 0, \quad (6) \quad \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} - x\right).$$

6.

$$(1) \quad \sin x - \sqrt{3} \cos x = 0, \quad (2) \quad \sqrt{3} \sin x + \cos x = 0,$$

$$(3) \quad \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = 0, \quad (4) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \operatorname{ctg}(2\pi - x) = 0,$$

$$(5) \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right), \quad (6) \quad \sqrt{3} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 3 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0.$$

7.

$$(1) \quad \sin^2 x - 3 \sin x + 2 = 0, \quad (2) \quad 4 \cos^2 x - 4 \cos x + 1 = 0,$$

$$(3) \quad 2 \sin^2 x + 5 \sin x + 2 = 0, \quad (4) \quad \cos^2 x + \cos x - 6 = 0,$$

$$(5) \quad \operatorname{tg}^2 x - (\sqrt{3} + 1) \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0, \quad (6) \quad \operatorname{ctg}^2 x - (\sqrt{3} - 1) \operatorname{ctg} x - \sqrt{3} = 0.$$

8.

$$(1) \quad 2 \cos^2 x - 3 \sin x = 0, \quad (2) \quad \sin^2 x - \cos^2 x = \cos x,$$

$$(3) \quad 7 \sin^2 x - 5 \cos^2 x + 2 = 0, \quad (4) \quad 2 \sin^2 3x - 5 \cos 3x - 4 = 0,$$

$$(5) \quad \operatorname{tg} x - 4 \operatorname{ctg} x = 3, \quad (6) \quad \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2,$$

$$(7) \quad 2 \cos^2 \frac{x}{3} + 3 \sin \frac{x}{3} = 0, \quad (8) \quad 2 \sin^2 2x - \cos^2 2x = 5 \cos 2x,$$

$$(9) \quad \sin^2 \frac{x}{2} - 5 \sin \frac{x}{2} = 2 \cos^2 \frac{x}{2}, \quad (10) \quad 4 \sin^4 x + 12 \cos^2 x = 7.$$

9.

- (1) $2 \cos^4 x - 3 \cos^2 x + 1 = 0,$ (2) $\operatorname{tg}^4 x - 10 \operatorname{tg}^2 x + 3 = 0,$
 (3) $6 \sin^4 x = 1 + \sin^2 x,$ (4) $4 \cos^4 3x + 8 = 11 \sin^2 3x,$
 (5) $4 \sin^4 \frac{x}{4} - 1 = 5 \cos^2 \frac{x}{4}.$

10.

- (1) $5 \sin^2 x + 4 \sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right) = 4,$
 (2) $6 \cos^2 x + 5 \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = 7,$
 (3) $\cos^2 \left(x + \frac{\pi}{6} \right) + 3 \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) + 1 = 0,$
 (4) $2 \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{3} \right) - 3 \cos \left(\frac{\pi}{6} - x \right) + 1 = 0.$

11.

- (1) $\sin^2 x - 8 \sin x \cos x + 7 \cos^2 x = 0,$
 (2) $\cos^2 x - 3 \sin x \cos x + 1 = 0,$
 (3) $\sin^2 x + 9 \cos^2 x = 5 \sin 2x,$
 (4) $\cos^2 x - 7 \sin^2 x = 3 \sin 2x,$
 (5) $\sin^4 x - 5 \sin^2 x \cos^2 x + 4 \cos^4 x = 0,$
 (6) $2 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x + \cos^2 x = 3,$
 (7) $8 \sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x = 4,$
 (8) $2 \sin^4 2x - 9 \sin^3 2x \cos 2x + 7 \sin^2 2x \cos^2 2x = 0.$

12.

- (1) $4 \sin x \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + 4 \sin(\pi + x) \cos x + 2 \sin \left(\frac{3\pi}{2} - x \right) \cos(\pi + x) = 1,$
 (2) $2 \sin x \cos \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) - 3 \sin(\pi - x) \cos x + \sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right) \cos x = 0.$

13. Duke faktorizuar të zgjidhen ekuacionet trigonometrike

- (1) $1 + \sin x \cos x = \sin x + \cos 2x,$
 (2) $\operatorname{ctg} x + \cos x = 1 + \operatorname{ctg} x \cos x,$
 (3) $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x - 2 = 0,$
 (4) $4 \sin x \cos x - 1 = 2(\sin x - \cos x),$
 (5) $\sin^3 x + \sin^2 x \cos x - 3 \sin x \cos^2 x - 3 \cos^3 x = 0,$
 (6) $12 \sin^2 x \operatorname{tg}^2 x + 3 = 4 \sin^2 x + 9 \operatorname{tg}^2 x.$

14. Duke shfrytëzuar formulat e adiconit të zgjidhen ekuacionet trigonometrike

- (1) $\sin x \cos \frac{x}{2} + \cos x \sin \frac{x}{2} = 0,$
- (2) $\sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2},$
- (3) $\sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \sin \left(\frac{\pi}{6} - x \right) + \sin \left(\frac{\pi}{3} + x \right) \sin \left(\frac{\pi}{6} + x \right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$
- (4) $\sin \left(\frac{\pi}{6} + x \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) - \cos \left(\frac{\pi}{6} + x \right) \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = \frac{1}{2},$
- (5) $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x} = \frac{1}{\sqrt{3}},$
- (6) $3 + \sqrt{3} \operatorname{tg} x = \sqrt{3} - 3 \operatorname{tg} x.$

15. Të zgjidhen ekuacionet trigonometrike duke zëvendësuar $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$

- (1) $\sin x - 3 \cos x = 1,$
- (2) $\sin x + 2 \cos x = -\frac{3}{2},$
- (3) $\sin x + 7 \cos x + 7 = 0,$
- (4) $2 \sin 2x - 5 \cos 2x = -3,$
- (5) $3 \sin 2x + 2 \cos 2x = 3,$
- (6) $2 \sin x + 9 \cos x = 7.$

16. Duke shfrytëzuar metoda të ndryshme të zgjidhen ekuacionet:

- (1) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 1,$
- (2) $\sin 13x + \cos 13x = \sqrt{2} \sin 17x,$
- (3) $\sqrt{3} \sin x - \cos x = \sqrt{2},$
- (4) $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} = 2\sqrt{2},$
- (5) $\sin 2x + \cos 2x = -1,$
- (6) $\sin 2x + \cos 2x = -1,$
- (7) $\sin x + \cos x = 1,$
- (8) $\sin^4 x + 5 \cos 2x + 4 = 0.$

17.

- (1) $\arcsin 3x = \operatorname{arctg} 5x,$
- (2) $|\cos x| = \cos x - 2 \sin x,$
- (3) $\operatorname{arctg}(x+1) - \operatorname{arctg}(x-1) = \frac{\pi}{4}$
- (4) $2 \cos x - \sin 3x = \frac{\cos 3x \cos x}{|\sin x|},$
- (5) $|\operatorname{tg} x| = \operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x},$
- (6) $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^8 x - \cos^8 x.$

Rezultatet:

1.

$$(1) \quad x = \frac{8\pi}{3} + 4k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}; \quad (2) \quad x = -\frac{3\pi}{4} + 6k\pi, \quad k \in \mathbf{Z};$$

$$(3) \quad x = \frac{\pi}{10} \pm \frac{\pi}{8} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}; \quad (4) \quad x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad x_2 = (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbf{Z};$$

$$(5) \quad x = k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}; \quad (6) \quad x = -\frac{\pi}{4} + 3k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

2.

$$(1) \quad x = (-1)^k \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbf{Z};$$

$$(2) \quad x_1 = -\frac{19\pi}{24} + k\pi, \quad x_2 = \frac{\pi}{24} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z};$$

$$(3) \quad x = \frac{7\pi}{36} + \frac{k\pi}{3}, \quad k \in \mathbf{Z};$$

$$(4) \quad x = \frac{8\pi}{3} + 4k\pi, \quad k \in \mathbf{Z};$$

$$(5) \quad x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\frac{k\pi}{3}, \quad x_2 = \frac{\pi}{18} + 2\frac{k\pi}{3}, \quad k \in \mathbf{Z};$$

$$(6) \quad x = (-1)^k \frac{\pi}{24} - \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

3.

$$(1) \quad x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z};$$

$$(2) \quad x_1 = -\frac{\pi}{12} + k\pi, \quad x_2 = \frac{7\pi}{12} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z};$$

$$(3) \quad x_1 = 2k\pi, \quad x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z};$$

$$(4) \quad x_1 = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad x_2 = \frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

4.

$$(1) \quad x = k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}; \quad (2) \quad x = (2k+1)\frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbf{Z};$$

$$(3) \quad x = k\frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbf{Z}; \quad (4) \quad x_1 = (4k-1)\frac{\pi}{10}, \quad x_2 = (4k+1)\frac{\pi}{30}, \quad k \in \mathbf{Z};$$

$$(5) \quad x = k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}; \quad (6) \quad x = \frac{\pi}{12} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

5.

(1) $x_1 = k\pi, x_2 = (2k - 1)\frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z};$

(2) $x = k\pi, k \in \mathbf{Z};$

(3) $x = k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z};$

(4) $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z};$

(5) $x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi, x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z};$

(6) $x_1 = -\frac{\pi}{3} + k\pi, x_2 = -\frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

6.

(1) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z};$ (2) $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z};$

(3) $x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z};$ (4) $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z};$

(5) $x = k\pi, k \in \mathbf{Z};$ (6) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

7.

(1) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z};$

(2) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z};$

(3) $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z};$

(4) Ekuacioni nuk ka zgjidhje,

(5) $x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi, x_2 = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z};$

(6) $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x_2 = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

8.

- (1) $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z};$
- (2) $x_1 = (2k+1)\pi, x_2 = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z};$
- (3) $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z};$
- (4) $x = \pm \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z},$
- (5) $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x_2 = \operatorname{arctg} 4 + k\pi, k \in \mathbf{Z};$
- (6) $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z},$
- (7) $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{2} + 3k\pi, k \in \mathbf{Z};$
- (8) $x = \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z};$
- (9) $x = (-1)^{k+1} 2 \arcsin \frac{1}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z};$
- (10) $x = (2k+1) \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}.$

9.

- (1) $x_1 = k\pi, x_2 = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z};$ (2) $x_1 = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, x_2 = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z};$
- (3) $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z};$ (4) $x = \pm \frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}.$
- (5) $x = \pm \frac{4\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbf{Z};$

10.

- (1) $x_1 = 2k\pi, x_2 = \pm \arccos \left(-\frac{1}{5} \right) + 2k\pi, k \in \mathbf{Z};$
- (2) $x_1 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi, x_2 = (-1)^k \arcsin \frac{1}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z};$
- (3) $x_1 = \pm \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z};$
- (4) $x_1 = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x_2 = (4k+1) \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$

11.

- (1) $x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi, x_2 = \operatorname{arctg} 7 + k\pi, k \in \mathbf{Z};$
- (2) $x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi, x_2 = \operatorname{arctg} 2 + k\pi, k \in \mathbf{Z};$
- (3) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x_2 = \operatorname{arctg} 9 + k\pi, k \in \mathbf{Z};$
- (4) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x_2 = \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + k\pi, k \in \mathbf{Z};$
- (5) $x_1 = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, x_2 = \operatorname{arctg}(\pm 2) + k\pi, k \in \mathbf{Z};$
- (6) $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x_2 = -\operatorname{arctg} 2 + k\pi, k \in \mathbf{Z};$
- (7) $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x_2 = \operatorname{arctg} \frac{3}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z};$
- (8) $x_1 = k\frac{\pi}{2}, x_2 = (4k+1)\frac{\pi}{8}, x_3 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 3.5 + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$

12.

- (1) $x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi, x_2 = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z};$
- (2) $x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi, x_2 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + k\pi.$

13.

- (1) $(1 - \sin x)(1 - \cos 2x) = 0, \quad x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, x_2 = k\pi, k \in \mathbf{Z};$
- (2) $x_1 = 2k\pi, x_2 = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z};$
- (3) $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x_2 = \pm 0.955 + k\pi, k \in \mathbf{Z};$
- (4) $x_1 = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi, x_2 = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z};$
- (5) $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x_2 = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z};$
- (6) $(3 \operatorname{tg}^2 x - 1)(4 \sin^2 x - 3) = 0.$

14.

- (1) $x = \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbf{Z};$
- (2) $x = (-1)^k \frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbf{Z};$
- (3) $x \in \mathbf{R},$
- (4) $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z};$
- (5) $x = \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbf{Z};$
- (6) $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

Zgjidhjet e detyrave 15-17 t'i verifikoni vetë nëse i keni zgjidhur mirë ekuacionet (duke i provuar zgjidhjet e gjetura).

7.5. Jobarazimet (inekuacionet) trigonometrike

Përkufizimi 7.5.1. Çdo jobarazim (inekuacion) tek i cili e panjohura paraqitet si argument i së paku njërit prej funksioneve trigonometrike, quhet jobarazim (inekuacion) trigonometrik.

Dallojmë disa tipe të jobarazimeve trigonometrike.

1° Inekuacionet e formës $\sin x * a$, ku $*$ $\in \{<, \leq, >, \geq\}$.

(a) Inekuacionet e formës $\sin x > a$. Nëse $a \leq -1$, atëherë bashkësia e zgjidhjeve është $B = \mathbf{R}$. Nëse $-1 < a < 1$, ndërsa $\varphi = \arcsin a$, atëherë bashkësia e zgjidhjeve është:

$$B = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} (2k\pi + \varphi, (2k+1)\pi - \varphi).$$

Nëse $a \geq 1$, atëherë $B = \emptyset$.

(b) Inekuacionet e formës $\sin x < a$. Nëse $a \leq -1$, atëherë bashkësia e zgjidhjeve është $B = \emptyset$. Nëse $-1 < a < 1$, ndërsa $\varphi = \arcsin a$, atëherë bashkësia e zgjidhjeve është:

$$B = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} ((2k+1)\pi - \varphi, 2\pi(k+1) + \varphi).$$

Nëse $a \geq 1$, atëherë $B = \mathbf{R}$.

Ngjashëm shqyrtohen inekuacionet e formës $\cos x * a$.

2° Inekuacionet e formës $\operatorname{tg} x * a$, ku $*$ $\in \{<, \leq, >, \geq\}$.

(a) Inekuacionet e formës $\operatorname{tg} x > a$ janë të zgjidhshme për çdo $a \in \mathbf{R}$. Nëse $\varphi = \operatorname{arctg} a$, atëherë bashkësia e zgjidhjeve është:

$$B = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} (k\pi + \varphi, \frac{\pi}{2}(2k+1)).$$

(b) Inekuacionet e formës $\operatorname{tg} x < a$ janë të zgjidhshme për çdo $a \in \mathbf{R}$. Nëse $\varphi = \operatorname{arctg} a$, atëherë bashkësia e zgjidhjeve është:

$$B = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} (\frac{\pi}{2}(2k-1), k\pi + \varphi).$$

Ngjashëm shqyrtohen edhe inekuacionet e formës $\operatorname{ctg} x * a$, ku $a \in \mathbf{R}$, $*$ $\in \{<, \leq, >, \geq\}$.

Shembulli 7.11. Të zgjidhet inekuacioni $\sin 2x - \frac{1}{2} < 0$ në intervalin $[0, 2\pi]$.

Zgjidhje. Inekuacioni i dhënë është ekuivalent me inekuacionin

$$-1 \leq \sin 2x < \frac{1}{2},$$

prandaj kemi: $0 \leq 2x < \frac{\pi}{6} \vee \pi - \frac{\pi}{6} < 2x < 2\pi$, respektivisht bashkësia e zgjidhjeve

$$\text{është } B = \left[0, \frac{\pi}{12}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{12}, \pi\right).$$

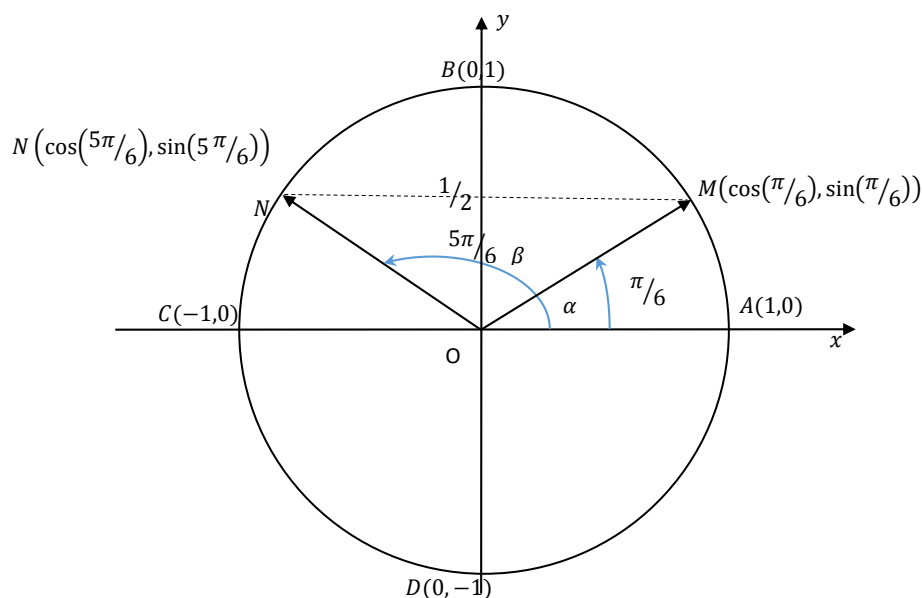


Fig. 7.5

Shembulli 7.12. Të zgjidhen inekuacionet:

- (a) $\sin x + \cos x < \sqrt{2}$, (c) $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x > 1 + \operatorname{tg} x$,
 (b) $\cos x > \sin^2 x - \cos^2 x$, $x \in [-\pi, \pi]$, (d) $\cos 2x < \cos 4x$, $x \in [0, 2\pi]$.

Zgjidhje. (a) Inekuacioni i dhënë është ekuivalent me inekuacionin $\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x < 1$, respektivisht $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < 1$. Meqenëse $|\cos x| \leq 1$, për çdo $x \in \mathbf{R}$, atëherë $x - \frac{\pi}{4} \neq 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, $x \neq \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

(b) Inekuacioni i dhënë është ekuivalent me inekuacionin $\cos x + \cos 2x > 0$, që pas transformimit në prodhim marrim:

$$\begin{aligned} 2 \cos \frac{3}{2}x \cdot \cos \frac{x}{2} > 0 &\iff \left(\cos \frac{3}{2}x > 0 \wedge \cos \frac{x}{2} > 0 \right) \vee \left(\cos \frac{3}{2}x < 0 \wedge \cos \frac{x}{2} < 0 \right) \\ &\iff \left(-\frac{\pi}{2} < \frac{3}{2}x < \frac{\pi}{2} \wedge -\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} \right) \\ &\iff \left(-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3} \wedge -\pi < x < \pi \right) \iff x \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right) = B. \end{aligned}$$

(c) Inekuacioni i dhënë është ekuivalent me inekuacionin

$$(\operatorname{tg}^2 x - 1)(\operatorname{tg} x + 1) > 0, \quad \text{respektivisht} \quad (\operatorname{tg} x + 1)^2(\operatorname{tg} x - 1) > 0.$$

Për $\operatorname{tg} x \neq -1$, d.m.th. për $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, $(\operatorname{tg} x + 1)^2 > 0$, prandaj $\operatorname{tg} x - 1 > 0$. D.m.th. $\frac{\pi}{4} + m\pi < x < \frac{\pi}{2} + m\pi, m \in \mathbf{Z}$. Bashkësia e zgjidhjeve është:

$$B = \bigcup_{m \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{Z}} \left(\frac{\pi}{4} + m\pi, \frac{\pi}{2} + m\pi \right) \setminus \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi \right\} = \bigcup_{m \in \mathbf{Z}} \left(\frac{\pi}{4} + m\pi, \frac{\pi}{2} + m\pi \right).$$

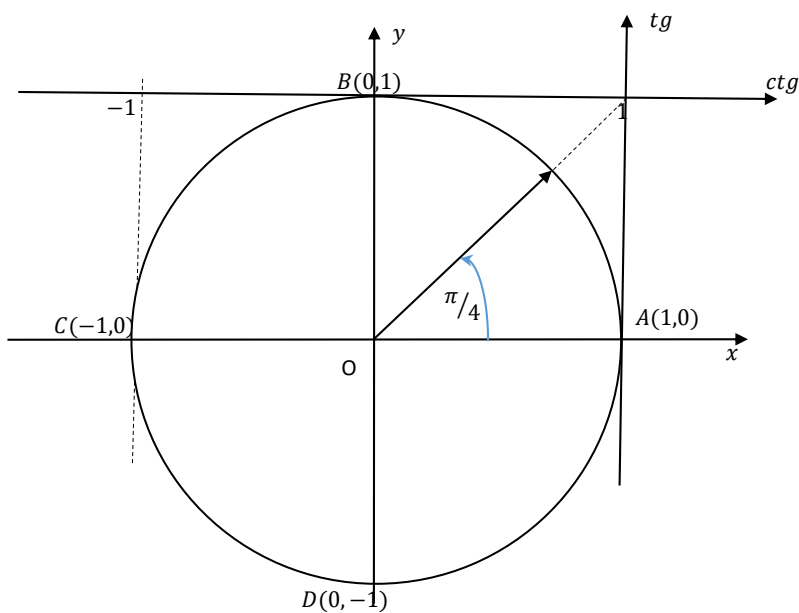


Fig. 7.6

(e) Inekuacioni i dhënë është ekuivalent me inekuacionin $-2 \sin 3x \sin(-x) < 0$, prandaj kemi:

$$(0 < 3x < \pi \wedge \pi < x < 2\pi) \vee (\pi < 3x < 2\pi \wedge 0 < x < \pi)$$

$$\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3} \wedge 0 < x < \pi \iff x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) = B.$$

Shembulli 7.13. Të zgjidhen jobarazimet (inekuacionet):

- (a) $\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x > 0$, (e) $\cos 2x + 3 \sin x > -1$,
 (b) $\cos 2x - \sin 2x \geq 0$, (f) $\sin x + \sin 3x \geq 0$,
 (c) $\sin x + \cos 2x > 1$, (g) $|\sin x| > |\cos x|$,
 (ç) $\sin^4 x + \cos^4 x < \frac{3}{4}$, (h) $\sqrt{3 + 2 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x} \leq \frac{1 + 3 \operatorname{tg} x}{2}$,
 (d) $|\sin x| > \frac{1}{2}$, (i) $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} \leq \sqrt{2}$,
 (dh) $\sin x + 2 \cos x < 2$, (j) $\operatorname{tg} \pi x + \operatorname{tg} 2\pi x \leq 0$.

Zgjidhje. (a) Jobarazimi i dhënë është ekuivalent me jobarazimin

$$\sin x(1 + \sin x + \sin^2 x) > 0.$$

Meqenëse shprehja $1 + \sin x + \sin^2 x > 0$ për çdo $x \in \mathbf{R}$ (po të zëvendësojmë $\sin x = t$, atëherë trinomi $1 + t + t^2 > 0 \forall t \in \mathbf{R}$, sepse $a = 1$ dhe $D = -3 < 0$), prandaj jobarazimi i dhënë është ekuivalent me jobarazimin $\sin x > 0$. Pra $x \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$.

(b) Për $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, jobarazimi i dhënë është ekuivalent me jobarazimin $\operatorname{tg} 2x \leq 1$, zgjidhja e të cilit është $-\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

$$\cos 2x - \sin 2x \geq 0 \iff \cos 2x \geq \sin 2x \iff x \in \left[\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \frac{9\pi}{4} + 2k\pi\right], \quad k \in \mathbf{Z}.$$

(c) **Udhëzim.** $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$.

(ç) Vlen

$$\begin{aligned} \sin^4 x + \cos^4 x < \frac{3}{4} &\iff 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x < \frac{3}{4} \iff \sin^2 2x > \frac{1}{2} \\ &\iff \frac{1 - \cos 4x}{2} > \frac{1}{2} \iff \cos 4x < 0 \\ &\iff \frac{\pi}{2} + 2k\pi < 4x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \\ &\iff x \in \left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right), \quad k \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

(d) Vlen

$$\begin{aligned}
|\sin x| > \frac{1}{2} &\iff -1 \leq \sin x < -\frac{1}{2} \vee \frac{1}{2} < \sin x \leq 1 \\
&\iff -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi < x < -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \frac{\pi}{6} + 2m\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2m\pi, \quad k, m \in \mathbf{Z} \\
&\iff x \in \left(-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{6} + 2m\pi, \frac{5\pi}{6} + 2m\pi\right), \quad k, m \in \mathbf{Z}.
\end{aligned}$$

(dh) **Udhëzim.** Merret zëvendësimi $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$.

$$\mathbf{Rez.} \quad x \in \left(2\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + 2k\pi, 2(k+1)\pi\right) \setminus \{(2k+1)\pi\}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

(e) Vlen

$$\begin{aligned}
\cos 2x + 3 \sin x < -1 &\iff 1 + \cos 2x + 3 \sin x > 0 \iff 2 \cos^2 x + 3 \sin x > 0 \\
&\iff 2(1 - \sin^2 x) + 3 \sin x > 0 \iff 2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 < 0.
\end{aligned}$$

Pas zëvendësimit $\sin x = t$, marrim se $-\frac{1}{2} < \sin x \leq 1$ respektivisht

$$x \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

(f) **Udhëzim.** Shprehja $\sin x + \sin 3x$ të zbërthehet në prodhim dhe me atë rast fitoni sistem të jobarazimeve trigonometrike.

$$\mathbf{Rez.} \quad x \in [2k\pi, \pi(2k+1)].$$

(g) 1° Për $x \in \left[2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$, $\sin x \geq 0$ dhe $\cos x \geq 0$. Prandaj

$$|\sin x| > |\cos x| \iff \sin x > \cos x \iff x \in \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right], \quad k \in \mathbf{Z}.$$

2° Për $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi\right]$, $\sin x \geq 0$, $\cos x < 0$. Prandaj

$$|\sin x| > |\cos x| \iff \sin x > -\cos x \iff x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

3° Për $x \in \left(\pi + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$, $\sin x < 0$, $\cos x \leq 0$. Prandaj

$$\begin{aligned}
|\sin x| > |\cos x| &\iff -\sin x > -\cos x \iff \sin x < \cos x \\
&\iff x \in \left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right], \quad k \in \mathbf{Z}.
\end{aligned}$$

4° Për $x \in \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right]$, $\sin x \leq 0$, $\cos x > 0$. Prandaj

$$|\sin x| > |\cos x| \iff -\sin x > \cos x \iff x \in \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Rrjedhimisht

$$x \in \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right),$$

respektivisht $x \in \left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi\right)$.

Vërejtje 7.1. Për $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, jobarazimi i dhënë do të transformohet në jobarazimin $|\operatorname{tg} x| > 1$, i cili është më i thjeshtë për t'u zgjidhur.

(h) Jobarazimi i dhënë është ekuivalent me sistemin e jobarazimeve

$$\left. \begin{array}{l} 3 + 2 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x \geq 0 \\ 3 + 2 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x \leq \left(\frac{1 + 3 \operatorname{tg} x}{2}\right)^2 \end{array} \right\}.$$

Pasi të zgjidhet në lidhje me $\operatorname{tg} x$, marrim $x \in \left[\frac{\pi}{4} + k\pi, \operatorname{arctg} 3 + k\pi\right]$, $k \in \mathbf{Z}$.

7.6. Grafikët e funksioneve trigonometrike

a) **Grafiku i funksionit** $f(x) = \sin x$

1. Domena e funksionit është e tërë bashkësia e numrave realë.
2. Funksioni është tek $f(-x) = -f(x)$, prandaj grafiku i funksionit është simetrik ndaj origjinës $O(0,0)$ të sistemit koordinativ.
3. Funksioni është periodik me periodë $T = 2\pi$. Për këtë arsye, mjafton që këtë funksion ta shqyrtojmë në intervalin $[0, 2\pi]$, ose p.sh. $[-\pi, \pi]$. Ne po e shyrtojmë në intervalin $[0, 2\pi]$.
4. Funksioni bëhet zero në pikat $x_k = k\pi, k \in \mathbf{Z}$, ndërsa në segmentin $[0, 2\pi]$, ai bëhet zero në pikat: $0, \pi$ dhe 2π , kurse shenja e tij është pozitive në segmentin $[0, \pi]$, ndërsa negative në $[\pi, 2\pi]$.
5. Funksioni $f(x) = \sin x$ ka maksimum të barabartë me 1, që arrihet në pikat $x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, ndërsa minimum të barabartë me -1, që arrihet në pikat $x_k = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$. Në segmentin $[0, 2\pi]$, funksioni e merr vlerën maksimale 1 në pikën $x_0 = \frac{\pi}{2}$, ndërsa atë minimale -1 në pikën $x_1 = \frac{3\pi}{2}$. Kështu, për $x \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ funksioni është monotono-rritës, ndërsa për $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ funksioni është monotono-zvogëlues.

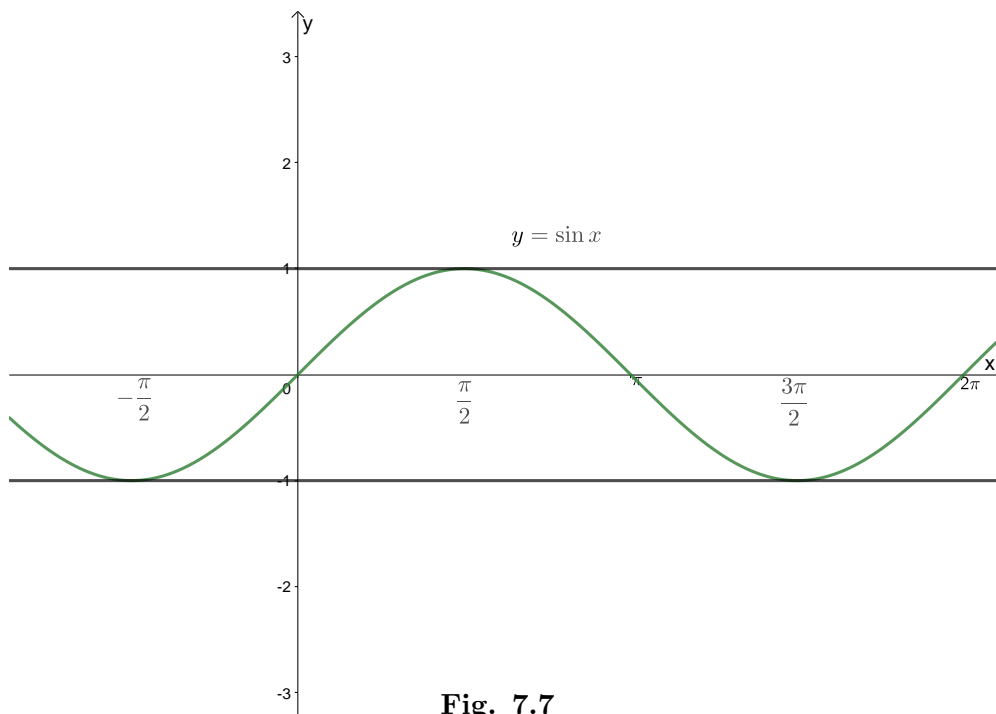


Fig. 7.7

b) **Grafiku i funksionit** $f(x) = \cos x$

Duke shfrytëzuar barazimin $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, atëherë grafiku i funksionit $f(x) = \cos x$ fitohet nga grafiku funksionit $f(x) = \sin x$, duke zhvendosur këtë të fundit për $\frac{\pi}{2}$ majtas.

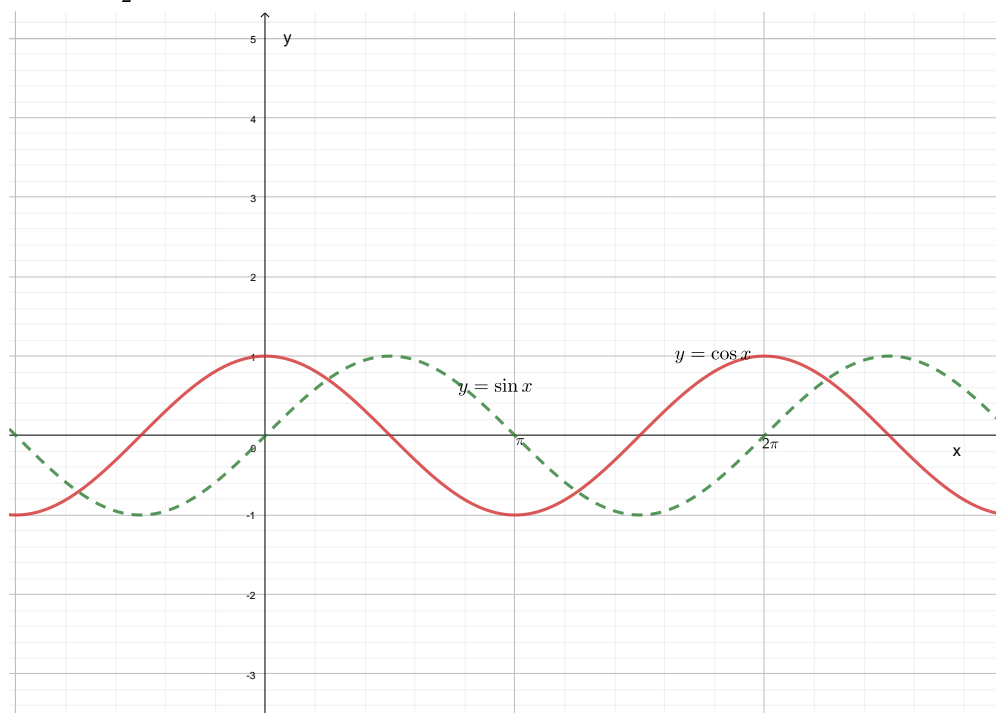


Fig. 7.8

c) **Grafiku i funksionit** $f(x) = \operatorname{tg} x$

1. Domena e funksionit. Funksioni $f(x) = \operatorname{tg} x$ nuk është i përkufizuar në pikat $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

2. Funksioni është tek $f(-x) = -f(x)$, prandaj grafiku i funksionit është simetrik ndaj origjinës $O(0, 0)$ të sistemit koordinativ dhe kalon nëpër origjinë.

3. Funksioni është periodik me periodë $T = \pi$. Për këtë arsye, mjafton që këtë funksion ta shqyrtojmë në intervalin $[0, \pi]$, ose p.sh. $[-\pi/2, \pi/2]$. Ne po e shyrtojmë në intervalin $[-\pi/2, \pi/2]$.

4. Funksioni bëhet zero në pikat $x_k = k\pi, k \in \mathbf{Z}$, ndërsa në segmentin $[-\pi/2, \pi/2]$, ai bëhet zero vetëm në 0, kurse shenja e tij është pozitive në segmentin $[0, \pi/2]$, ndërsa negative në $[-\pi/2, 0]$.

5. Funksioni $f(x) = \operatorname{tg} x$ është gjithnjë monotono-rritës në $[-\pi/2, \pi/2]$ dhe ai nuk ka vlera ekstreme. Kur x i ofrohet numrit $\pi/2$ nga ana e majtë, funksioni rritet në pakufi; ndërsa kur x i ofrohet $-\pi/2$ nga ana e djathtë, funksioni zvogëlohet në minus pakufi. Drejtëzat $x = \pi/2$ dhe $x = -\pi/2$ janë asimptotat vertikale të tij.

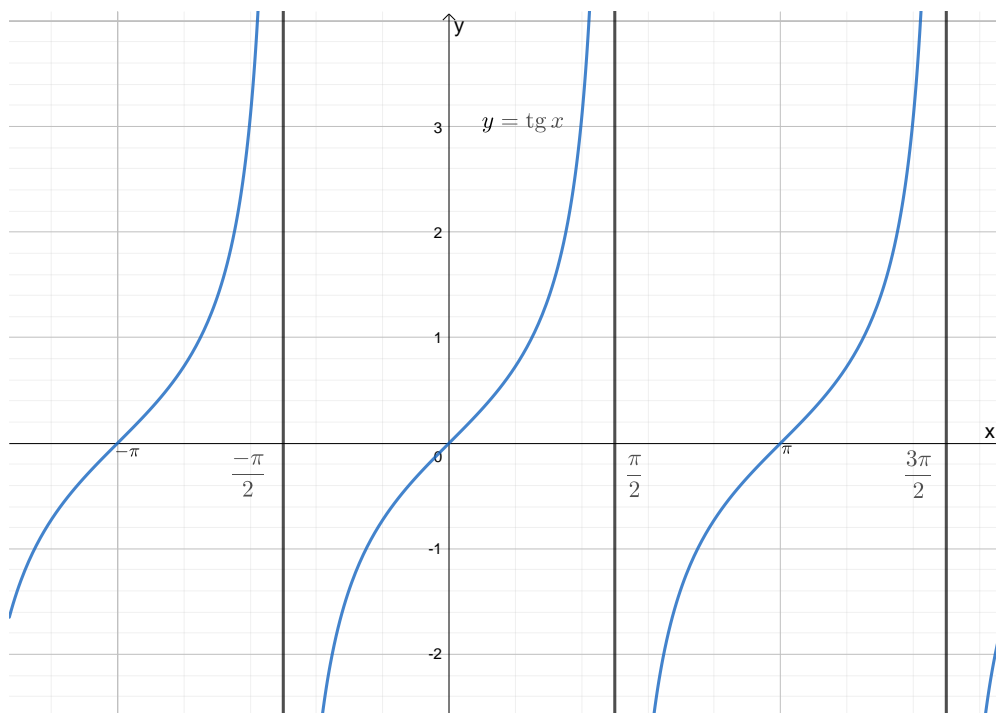


Fig. 7.9

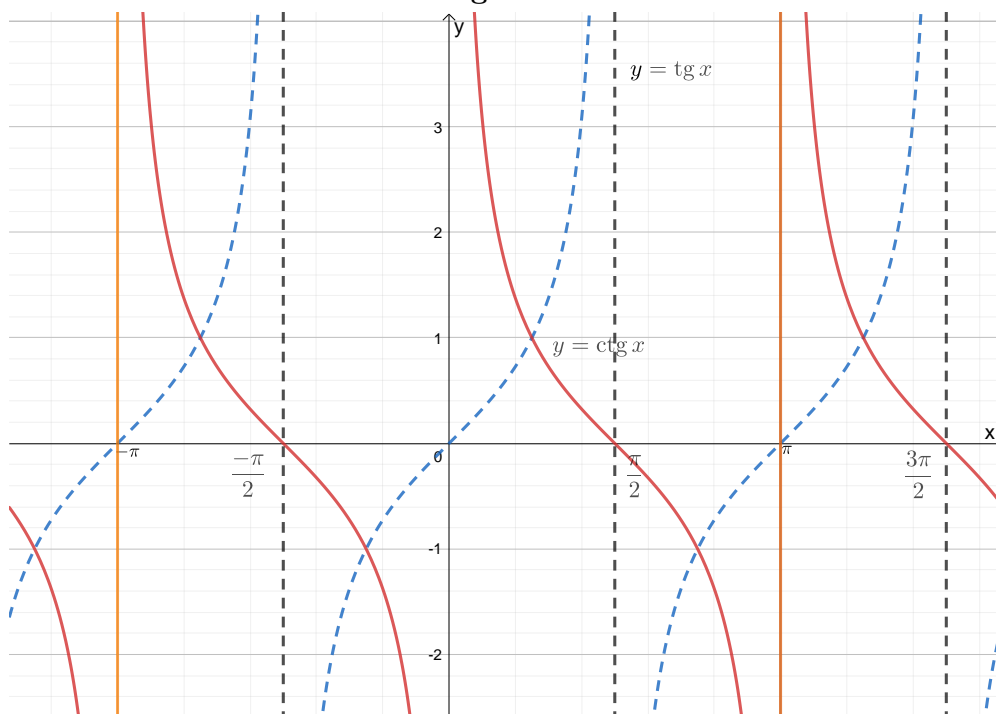


Fig. 7.10

b) **Grafiku i funksionit** $f(x) = \text{ctg } x$

Duke shfrytëzuar barazimin $\text{ctg } x = -\text{tg} \left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, atëherë grafiku i funksionit $f(x) = \text{ctg } x$ fitohet nga grafiku funksionit $f(x) = \text{tg } x$, së pari duke zhvendosur

këtë të fundit për $\frac{\pi}{2}$ majtas, pastaj duke e rrotulluar për 180° rreth boshtit Ox .

7.7. Funkzionet inverse trigonometrike

Deri më tani dijmë t'i njehsojmë vlerat e funksioneve trigonometrike për këndin e çfarëdoshëm α , qoftë pa ndihmën ose me ndihmën e ndoënjë algoritmi, ose të ndonjë mjeti ndihmës, p.sh. kalkulatori, tabela logaritmike, etj. Në praktikë, shpesh kërkohet zgjidhja e problemit të anasjelltë, d.m.th. është dhënë vlera e ndonjë funksioni trigonometrik, ndërsa kërkohet këndi. Për këtë qëllim përdorim funksionet inverse trigonometrike. Ato përkufizohen si vijon:

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}, \quad \arcsin x = y \stackrel{\text{def.}}{\iff} \sin y = x,$$

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}, \quad \arccos x = y \stackrel{\text{def.}}{\iff} \cos y = x,$$

$$\arctg : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad \arctg x = y \stackrel{\text{def.}}{\iff} \operatorname{tg} y = x,$$

$$\operatorname{arcctg} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad \operatorname{arcctg} x = y \stackrel{\text{def.}}{\iff} \operatorname{ctg} y = x.$$

Në mënyrë që funksioni të ketë invers, duhet që ai të jetë bijektiv, prandaj kodomenet e funksioneve të mësipërme duhet reduktuar, në mënyrë që të sigurojmë bijektivitetin.

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \arcsin x = y \stackrel{\text{def.}}{\iff} \sin y = x,$$

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi], \quad \arccos x = y \stackrel{\text{def.}}{\iff} \cos y = x,$$

$$\arctg : \mathbf{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \arctg x = y \stackrel{\text{def.}}{\iff} \operatorname{tg} y = x,$$

$$\operatorname{arcctg} : \mathbf{R} \rightarrow (0, \pi), \quad \operatorname{arcctg} x = y \stackrel{\text{def.}}{\iff} \operatorname{ctg} y = x.$$

Grafikët e funksioneve inverse trigonometrike janë dhënë në figurat në vijim.

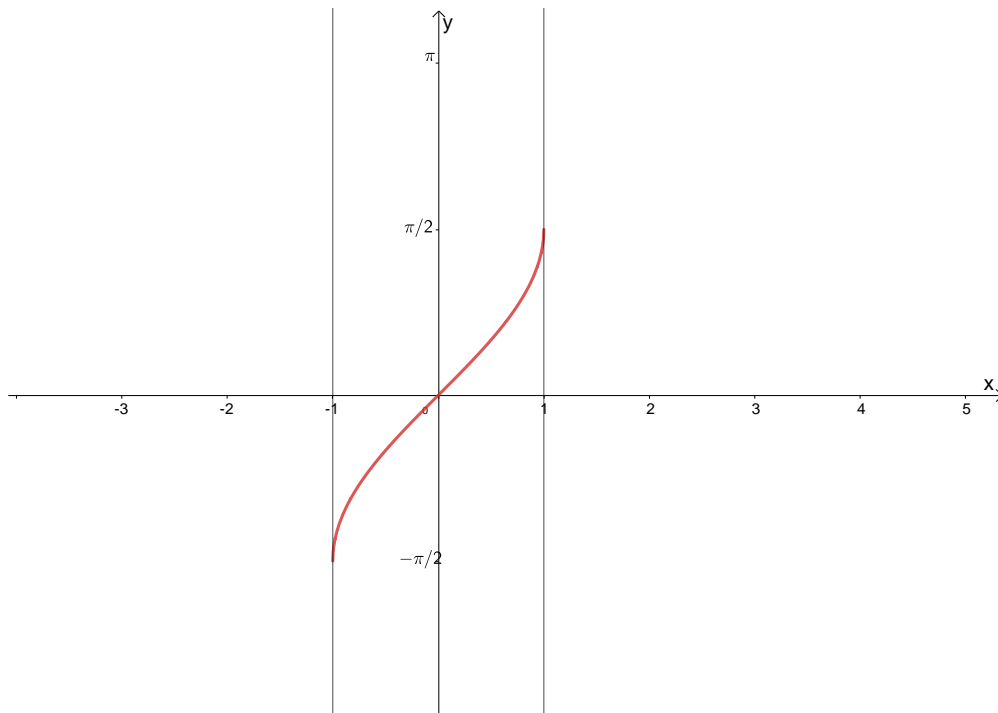


Fig. 7.11

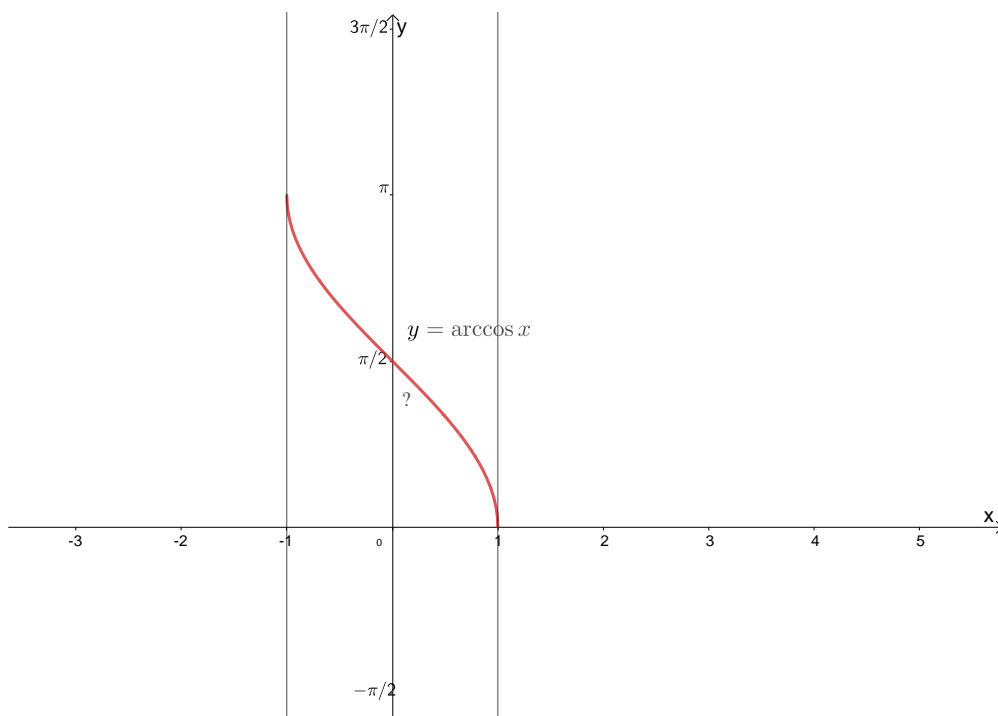


Fig. 7.12

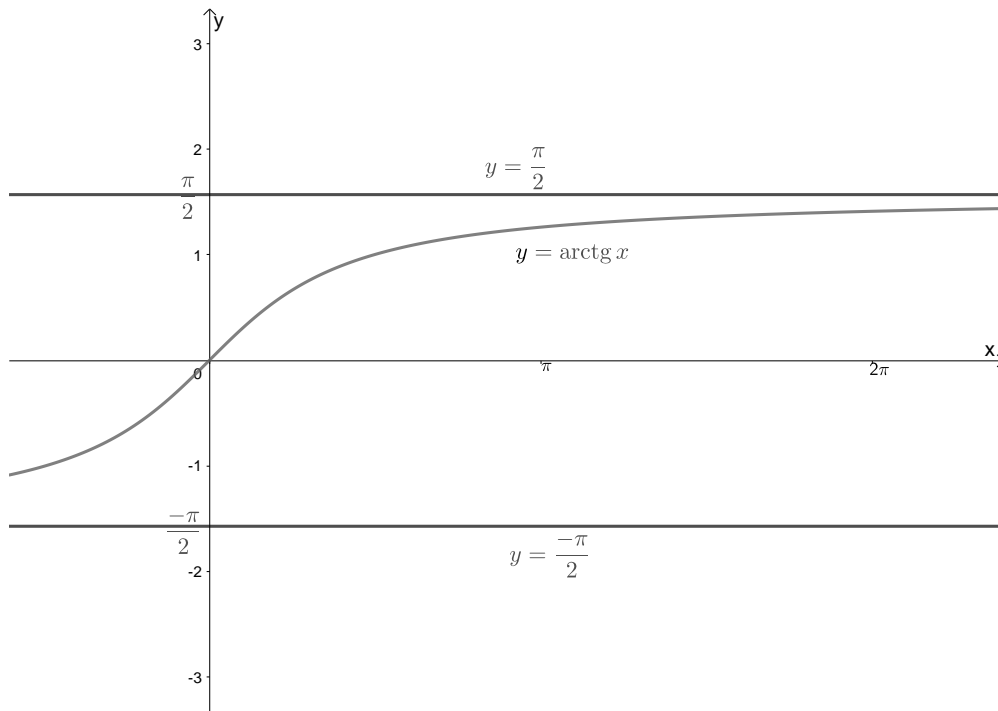


Fig. 7.13

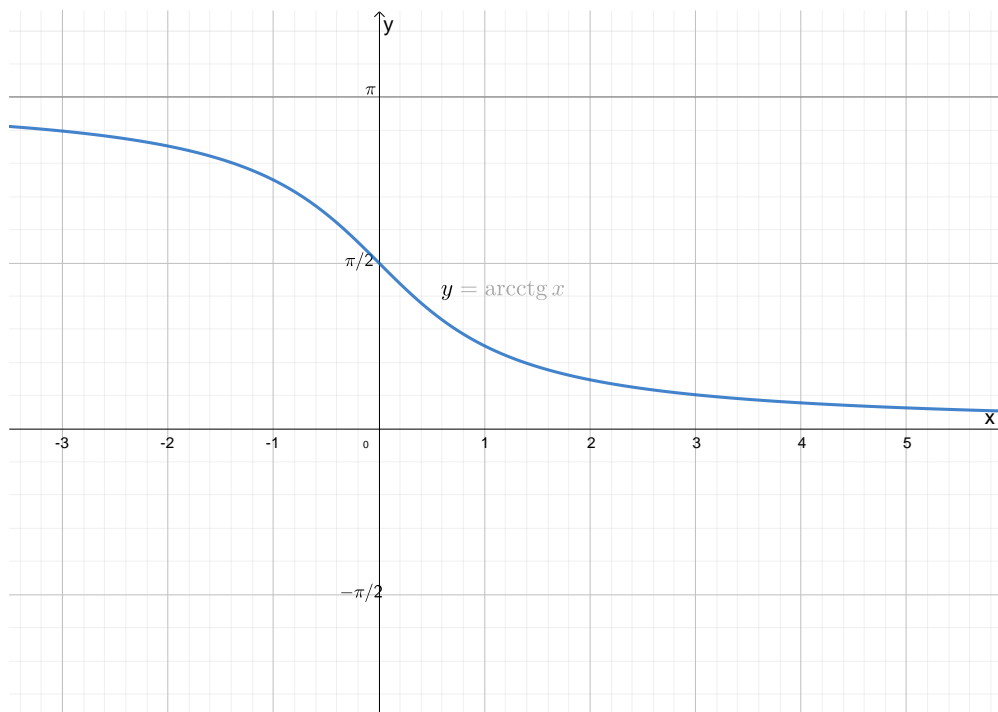


Fig. 7.14

Vlejnë këto barazime:

- (1) $\sin \arcsin x = x, \forall x \in [-1, 1]$ (5) $\operatorname{tg} \operatorname{arctg} x = x, \forall x \in \mathbf{R}$
 (2) $\arcsin \sin x = x, \forall x \in \mathbf{R}$ (6) $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \operatorname{tg} x = x, \forall x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$
 (3) $\cos \operatorname{arc} \cos x = x, \forall x \in [-1, 1]$ (7) $\operatorname{ctg} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x = x, \forall x \in \mathbf{R}$
 (4) $\operatorname{arc} \cos \cos x = x, \forall x \in \mathbf{R}$ (8) $\operatorname{arc} \operatorname{ctg} \operatorname{ctg} x = x, \forall x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Po ashtu, nga relacionet e mësipërme kemi:

$$(a) \quad \sin(\operatorname{arc} \cos x) = \pm \sqrt{1 - \cos^2(\operatorname{arc} \cos x)} = \pm \sqrt{1 - x^2}, |x| \leq 1,$$

ndërsa shenja varet se në cili kuadrant merret këndi $\operatorname{arc} \cos x$. Në mënyrë analoge nxjerrim formulat:

$$\begin{aligned} (a) \quad \sin(\operatorname{arc} \cos x) &= \pm \sqrt{1 - x^2}, & (c) \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arc} \cos x) &= \frac{\pm \sqrt{1 - x^2}}{x}, \\ (b) \quad \cos(\operatorname{arc} \sin x) &= \pm \sqrt{1 - x^2}, & (d) \quad \operatorname{ctg}(\operatorname{arc} \sin x) &= \frac{\pm \sqrt{1 - x^2}}{x}, \\ (c) \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arc} \sin x) &= \frac{x}{\pm \sqrt{1 - x^2}}, & (dh) \quad \operatorname{ctg}(\operatorname{arc} \cos x) &= \frac{x}{\pm \sqrt{1 - x^2}}. \end{aligned}$$

Shembulli 7.14. Gjeni formula e përshtatshme për njehsimin e

$$\begin{aligned} \sin(\operatorname{arctg} x), \quad \cos(\operatorname{arctg} x), \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x), \\ \sin(\operatorname{arcctg} x), \quad \cos(\operatorname{arcctg} x), \quad \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x). \end{aligned}$$

Zgjidhje. Le të jetë $\sin(\operatorname{arctg} x) = u$. Atëherë

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} x = \arcsin u &\iff x = \operatorname{tg}(\arcsin u) = \frac{u}{\pm \sqrt{1 - u^2}} \\ &\iff x^2 = \frac{u^2}{1 - u^2} \iff x^2 = u^2(1 + x^2) \iff u = \pm \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}. \end{aligned}$$

D.m.th. $\sin(\operatorname{arctg} x) = \pm \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$. Në mënyrë analoge merren formulat:

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}.$$

Shembulli 7.15. Vërtetoni identitetet:

- (1) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in [-1, 1],$ (4) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in \mathbf{R},$
 (2) $\arcsin(-x) = -\arcsin x, \quad x \in [-1, 1],$ (5) $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x, \quad x \in \mathbf{R},$
 (3) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x, \quad x \in [-1, 1],$ (6) $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x, \quad x \in \mathbf{R}.$

Zgjidhje. (1) Vlen

$$\begin{aligned} \arcsin x + \arccos x &= \frac{\pi}{2} \iff \cos(\arcsin x + \arccos x) = 0 \\ \cos(\arcsin x) \cdot \cos(\arccos x) - \sin(\arcsin x) \cdot \sin(\arccos x) &= \\ &= \sqrt{1-x^2}x - x\sqrt{1-x^2} \equiv 0. \end{aligned}$$

Ngjashëm tregohen identitetet tjera.

Detyra në lidhje me funksionet inverse trigonometrike

1. Njehsoni:

$$\begin{aligned} (1) \quad \arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right), & \quad (3) \quad \arcsin\left(\cos\frac{33\pi}{5}\right), \\ (2) \quad \operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{8\pi}{3}\right), & \quad (4) \quad \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{8\pi}{3}\right)\right). \end{aligned}$$

2. Vërtetoni identitetet:

$$\begin{aligned} (1) \quad \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} &= \operatorname{arctg}(1 + \sqrt{2})^2, \\ (2) \quad \arccos\frac{1}{2} + \arccos\frac{1}{7} &= \arccos\left(-\frac{11}{4}\right), \\ (3) \quad 2 \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{4} &= \operatorname{arctg}\frac{32}{43}, \\ (4) \quad \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

3. Gjeni formulat e përshtatshme për njehsimin e shumave:

$$\begin{aligned} (1) \quad \arcsin x + \arcsin y, & \quad (3) \quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y, \\ (2) \quad \arccos x + \arccos y, & \quad (2) \quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y. \end{aligned}$$

4. Vërtetoni identitetet:

$$\begin{aligned} (1) \quad \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \dots + \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2 + n + 1} &= \operatorname{arctg}(n + 1), \\ (2) \quad \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \dots + \operatorname{arctg} \frac{1}{2 \cdot n^2} &= \operatorname{arctg} \frac{n}{n + 1}. \end{aligned}$$

Udhëzim. Shfrytëzoni induksionin matematik.

5. Të paraqiten grafikisht funksionet:

$$\begin{aligned} (a) \quad y &= \sin x + |\sin x|, & (c) \quad y &= \sqrt{\sin^2 x - 2|\sin x| + 1}, \\ (b) \quad y &= \cos^2 x, & (d) \quad y &= \arcsin(\cos x). \end{aligned}$$

7.8. Teorema e sinusit dhe kosinusit për trekëndëshin e çfarëdoshëm

Le të jetë $l(O, r)$ rrethi i jashtashkruar për trekëndëshin $\triangle ABC$, kurse $\{B_1\} = d(C, O) \cap l(O, r)$, d.m.th. segmenti $[CB_1]$ është diametër i rrethit $l(O, r)$. Këndi $\angle CBB_1 = 90^\circ$ (si kënd periferik mbi diametër), ndërsa $\alpha_1 = \angle BB_1C \cong \angle BAC = \alpha$ (si kënde periferike mbi të njëjtën tetivë). Prandaj, nga trekëndëshi kënddrejtë BB_1C me kënd të drejtë në kulmin B dhe hipotenuzë CB_1 , ku $|CB_1| = 2r$, kemi:

$$\sin \alpha = \frac{|BC|}{|CB_1|} = \frac{a}{2r}, \quad \text{ose} \quad \frac{a}{\sin \alpha} = 2r.$$

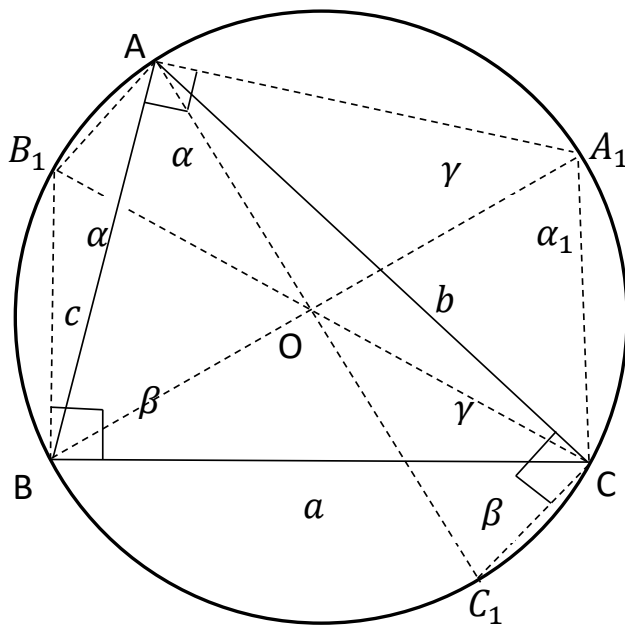


Fig. 7.15

Ngjashëm, $\triangle B_1AC$ është kënddrejtë, ndërsa $\angle AB_1C \cong \angle ABC = \beta$, prandaj

$$\sin \beta = \frac{b}{|CB_1|} = \frac{b}{2r}, \quad \text{ose} \quad \frac{b}{\sin \beta} = 2r,$$

si dhe $\frac{c}{\sin \gamma} = 2r$. D.m.th. vlejné barazimet

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r, \quad (1)$$

ku r është rrezja e rrethit të jashtashkruar.

Relacioni (1) njihet si *teorema e sinusit* për brinjët dhe këndet e një trekëndëshi.

Vërejtje 7.2. Vlen edhe pohimi i anasjelltë i teoremës së sinusit. D.m.th. nëse për tri segmente a, b, c dhe tri kënde α, β, γ vlen relacioni (1), atëherë ato segmente përkatësisht ato kënde paraqesin brinjët përkatësisht këndet e një trekëndëshi.

Për vërtetimin e teoremës së kosinusit do të nisemi nga një trekëndësh i çfarëdoshëm $\triangle ABC$ me brinjë a, b, c dhe këndet respektive α, β, γ . Meqenëse në trekëndësh më së shumti një kënd i tij mund të jetë i drejtë ose i gjerë, atëherë për këndin γ dallojmë rastet:

1. $\gamma < 90^\circ$. Atëherë projekcioni normal D i kulmit A në drejtëzën $d(B, C)$ i takon brinjës $[BC]$, d.m.th. vlen renditja $(B - D - C)$. Zbatojmë teoremën e Pitagorës dhe do të kemi:

$$\begin{aligned} c^2 &= |BD|^2 + |AD|^2 = (a - |DC|)^2 + b^2 + |DC|^2 = a^2 - 2a \cdot |CD| + |CD|^2 + \\ &+ b^2 - |CD|^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \end{aligned}$$

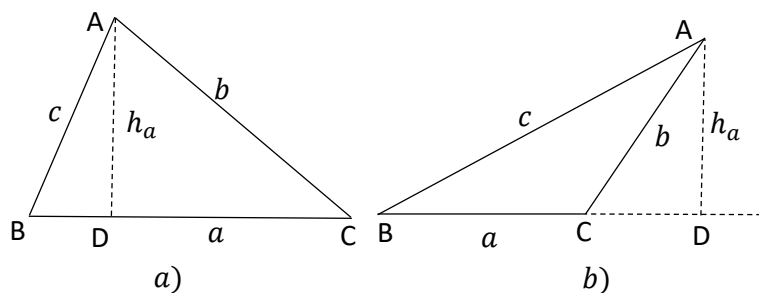


Fig. 7.16

2. $\gamma > 90^\circ$. Atëherë për projekcioni normal D të kulmit A në drejtëzën $d(B, C)$ vlen renditja $(B - C - D)$. Zbatojmë teoremën e Pitagorës dhe do të kemi:

$$\begin{aligned} c^2 &= |BD|^2 + |AD|^2 = (a + |DC|)^2 + b^2 - |DC|^2 = a^2 + 2a \cdot |CD| + \\ &+ |CD|^2 + b^2 - |CD|^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(180^\circ - \gamma) = \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \end{aligned}$$

3. Rasti $\gamma = 90^\circ$ sjell barazimin $c^2 = a^2 + b^2$, d.m.th. teoremën e Pitagorës, prandaj përfundojmë se ka vend identiteti

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Ngjashëm marrim se vlen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

D.m.th. vlejné barazimet:

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

Relacionet (2) njihen si *teorema e kosinusit* për trekëndëshin me brinjë a, b, c dhe kënde α, β, γ .

7.9. Zgjidhja e trekëndëshit

Të *zgjidhet* një trekëndësh, do të thotë të njehsojmë çdo element të trekëndëshit (brinjët, këndet, syprinën, lartësitë, medianet, rrezet e rrethit të brendashkruar përkatësisht jashtashkruar, etj.) në saje të elementeve të dhëna (njohura). Në rastin e përgjithshëm nevojiten tre elemente të pavarura. P.sh. te trekëndëshi kënddrejtë nevojiten edhe dy elemente (por jo dy këndet e ngushta), sepse një element është i njohur (këndi i drejtë), ndërsa për trekëndëshin barabrinjës nevojitet vetëm një element.

Për thjeshtim të problemit, ne do të njehsojmë vetëm këndet dhe brinjët, nëse nuk kërkohet ndryshe.

Shembulli 7.16. Të zgjidhet trekëndëshi ABC nëse janë dhënë brinja c dhe këndet α, β që pushojnë në brinjën c .

Zgjidhje. Nga teorema e sinusit kemi:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r,$$

ku r është rrezja e rrethit të jashtashkruar. Por $\alpha + \beta + \gamma = \pi = 180^\circ$, prandaj $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$, prandaj

$$a = \frac{\sin \alpha}{\sin(\pi - (\alpha + \beta))} \cdot c = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot c, \quad b = \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot c.$$

Shembulli 7.17. Tregoni se syprina S e trekëndëshit të çfarëdoshëm është:

$$S = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin \gamma}.$$

Zgjidhje. Për syprinën S të trekëndëshit ABC vlen:

$$S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}. \quad (1)$$

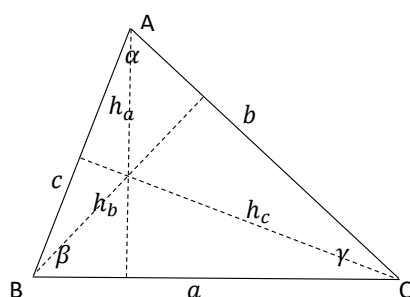


Fig. 7.17

Por, nga $\triangle ABC$ (fig. 7.17) kemi:

$$\sin \gamma = \frac{h_a}{b} \implies h_a = b \sin \gamma.$$

Pas zëvendësimit në (1), marrim $S = \frac{ab \sin \gamma}{2}$. Nga teorema e sinusit kemi:

$$b = c \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}, \quad a \sin \gamma = c \sin \alpha,$$

prandaj

$$S = \frac{1}{2} a \sin \gamma \cdot b = \frac{1}{2} c \sin \alpha \cdot c \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin \gamma}.$$

Shembulli 7.18. Tregoni se për çdo trekëndësh me brinjë a, b, c dhe kënde α, β, γ vlejné këto relacione:

- (a) $\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}}$ (teorema e tangjentës)
- (b) $\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}}, \quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}},$ (teorema e Molvajdit)
- (c) $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},$ ku $s = \frac{a+b+c}{2}$
- (d) $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},$ ku $s = \frac{a+b+c}{2},$
- (e) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$
- (f) $S = \frac{abc}{4r} = s\rho = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (formula e Heronit për syprinën e trekëndëshit, ku $r(\rho)$ është rrezja e rrethit të jashtashkruar (brendashkruar)).

Zgjidhje. (a) Duke shfrytëzuar teoremën e sinusit dhe vetitë e proporcioneve marrim:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \implies \frac{a-b}{a+b} = \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta} = \frac{2 \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2}}{2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Rasti (b) zgjidhet në mënyrë analoge si ai (a).

(c) Nga teorema e kosinusit marrim se $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. Tani

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 + \cos \alpha}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) = \frac{(b+c)^2 - a^2}{4bc} = \frac{(b+c-a)(b+c+a)}{4bc} \\ &= \frac{s}{bc} \cdot \frac{b+c-a}{2} = \frac{s}{bc} \cdot \frac{a+b+c-2a}{2} = \frac{s(s-a)}{bc}. \end{aligned}$$

D.m.th. vlen barizimi (c).

Rasti (d) zgjidhet në mënyrë analoge me atë (c) duke shfrytëzuar formulën

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \text{ dhe teoremën e kosinusit.}$$

Rasti (e) rrjedh nga rastet (c) dhe (d).

(f) Vlen

$$S = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{ab}{2} \cdot \sin \gamma = \frac{abc}{4r},$$

ku r është rrezja e rrethit të jashtashkruar.

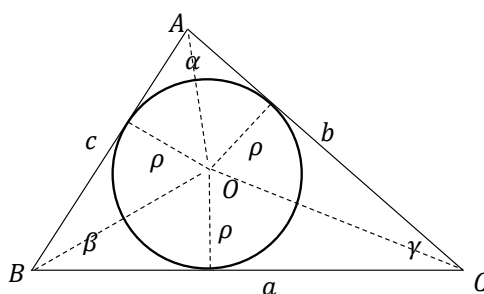


Fig. 7.18

Nëse O është qendra e rrethit të brendashkruar, ndërsa ρ rrezja e atij rrethi, atëherë kemi:

$$S_{\triangle AOB} = \frac{c\rho}{2}, \quad S_{\triangle AOC} = \frac{b\rho}{2}, \quad S_{\triangle BOC} = \frac{a\rho}{2},$$

prandaj $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle AOC} + S_{\triangle BOC} = \frac{a+b+c}{2}\rho = s\rho$. Nga relacionet (c) dhe (d) kemi:

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{bc},$$

ndërsa $S = \frac{bc \sin \alpha}{2}$, prandaj

$$S = \frac{bc \sin \alpha}{2} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Shembulli 7.19. Të zgjidhet trekëndëshi nëse janë dhënë këto elemente:

- (a) $a = 31$ cm, $\alpha = 54^\circ 15'$, $\beta = 76^\circ 20'$,
- (b) $b = 6$ cm, $\alpha = 37^\circ 25'$, $\gamma = 102^\circ 45'$,
- (c) $b = 18$ cm, $c = 13$ cm, $\alpha = 44^\circ 30'$,
- (ç) $a = 10$ cm, $b = 18$ cm, $\alpha = 28^\circ 35'$,
- (d) $a = 10$ cm, $b = 18$ cm, $c = 9$ cm.

Udhëzim. Për dy rastet e para shfrytëzoni teoremën e sinusit, ndërsa për rastet tjera teoremën e kosinusit.

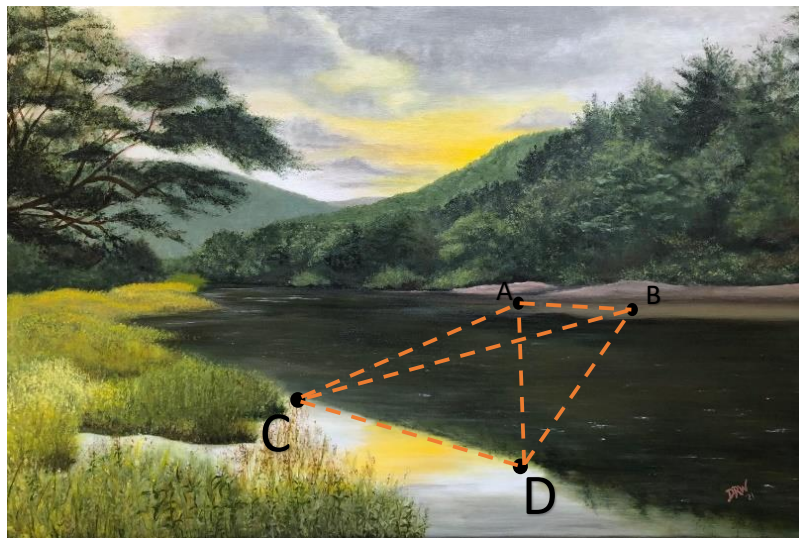


Fig. 7.19

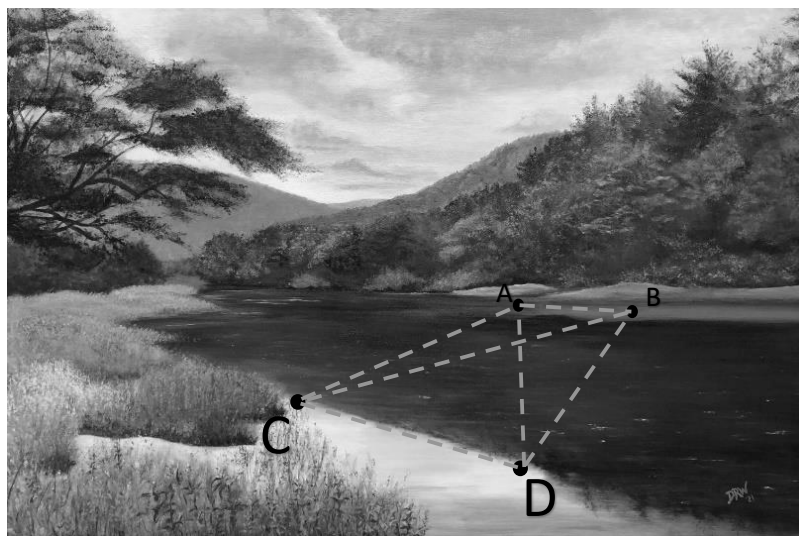


Fig. 7.19

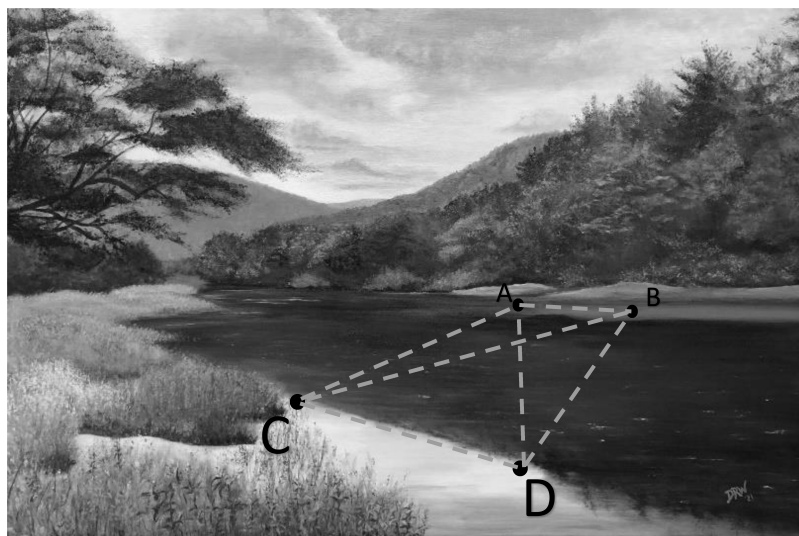


Fig. 7.19

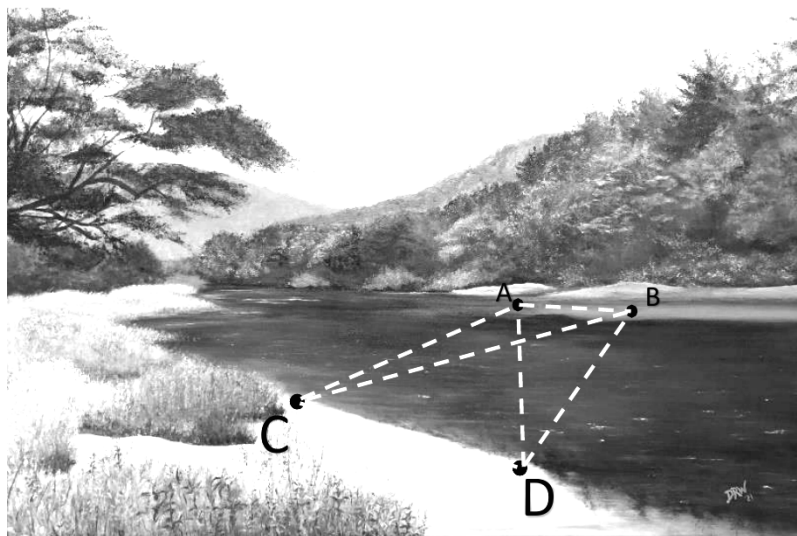


Fig. 7.19

Shembulli 7.20. Pikat A dhe B ndodhen në njërin anë të një lumi, ndërsa pikat C dhe D ndodhen në anën tjetër. Njehsoni distancën ndërmjet pikave A dhe B nëse dihen këto elemente:

$$(a) |CD| = 2570 \text{ m}, \alpha = \angle BCD = 79^\circ 34', \beta = \angle ACD = 32^\circ 31',$$

$$\gamma = \angle BDC = 33^\circ 34', \delta = \angle ADC = 78^\circ 45',$$

$$(b) |CD| = 137 \text{ m}, \alpha = \angle BCD = 143^\circ 20', \beta = \angle ACD = 159^\circ 43',$$

$$\gamma = \angle BDC = 21^\circ 35', \delta = \angle ADC = 9^\circ 10'.$$

Zgjidhje. (a) Nga figura 7.19 kemi:

$$\varepsilon = \angle CAD = 180^\circ - (\beta + \delta), \quad \varphi = \angle CBD = 180^\circ - (\alpha + \gamma).$$

Nga teorema e sinusit kemi:

$$\frac{|BD|}{\sin \alpha} = \frac{|CD|}{\sin \varphi} = \frac{|BC|}{\sin \gamma},$$

prandaj

$$|BD| = \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi} |CD| = 2748.5 \text{ m}, \quad |BC| = \frac{\sin \gamma}{\sin \varphi} |CD|.$$

Nga trekëndëshi $\triangle ACD$ kemi:

$$\frac{|CD|}{\sin \varepsilon} = \frac{|AD|}{\sin \beta} = \frac{|AC|}{\sin \delta},$$

respektivisht

$$\begin{aligned} |AD| &= \frac{\sin \beta}{\sin \varepsilon} |CD| = \frac{\sin \beta}{\sin(180^\circ - (\beta + \delta))} |CD| = \\ &= \frac{\sin \beta}{\sin(\beta + \delta)} |CD| = 1482.4 \text{ m.} \end{aligned}$$

Zbatojmë teoremën e kosinusit për trekëndëshin $\triangle ABD$ dhe kemi:

$$|AB|^2 = |AD|^2 + |BD|^2 - 2|AD||BD|\cos(\gamma - \delta),$$

respektivisht

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2(\beta + \delta)} |CD|^2 + \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2(180^\circ - (\alpha + \gamma))} |CD|^2 - \\ &\quad - \frac{2 \sin \alpha \sin \beta \cos(\gamma - \delta)}{\sin(180^\circ - (\alpha + \gamma)) \sin(\beta + \delta)} |CD|^2 \\ &= \left(\frac{\sin^2 \beta}{\sin^2(\beta + \delta)} + \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2(\alpha + \gamma)} - \frac{2 \sin \alpha \sin \beta \cos(\gamma - \delta)}{\sin(\alpha + \gamma) \sin(\beta + \delta)} \right) |CD|^2 \\ &\implies |AB| = 2002 \text{ m.} \end{aligned}$$

(b) Rez. $|AB| = 162.5 \text{ m.}$

Shembulli 7.21. Duke shfrytëzuar teoremën e sinusit tregoni se simetralja e cilitdo kënd të brendshëm të trekëndëshi ABC e ndan brinjën përballë në raport sikurse raporti i dy brinjëve tjera.

Zgjidhje. Nga $\triangle ABA_1$ (shih figurën 7.20) kemi:

$$\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{|A_1B|} = \frac{\sin \beta}{|A_1A|} = \frac{\sin \delta}{|AB|}, \quad (1)$$

ndërsa nga $\triangle ACA_1$ kemi:

$$\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{|A_1C|} = \frac{\sin \gamma}{|A_1A|} = \frac{\sin(180^\circ - \delta)}{|AC|} = \frac{\sin \delta}{|AC|}. \quad (2)$$

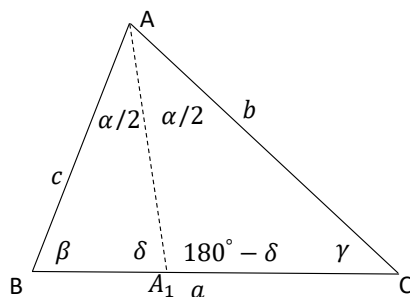


Fig. 7.20

Pasi t'i pjesëtojmë relacionet (1) dhe (2) anë për anë marrim:

$$\frac{|A_1C|}{|A_1B|} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{|AC|}{|AB|}.$$

D.m.th.

$$\frac{|A_1C|}{|A_1B|} = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma},$$

çka duhej vërtetuar.

Provoni se i njëjti pohim vlen edhe për simetralen e cilitdo kënd të jashtëm të trekëndëshit.

Shembulli 7.22. Simetralj e këndit α të trekëndëshit kënddrejtë ABC e ndanë kateten a (përballë këndit α) në dy segmente m dhe n . Të zgjidhet trekëndëshi ABC (të njehsohen dy brinjët tjera dhe këndet e ngushta).

Udhëzim. Shfrytëzoni shembullin paraprak.

Shembulli 7.23. Sateliti artificial S bën lëvizje rrethore rreth Tokës në lartësinë h prej saj. Pasi të kaloj nëpër zenitin e pikës A , e cila ndodhet në Tokë, pas t -sekondave kalon në një pikë (pozitë) tjetër, e cila nga pika A e Tokës shihet nën këndin α ndaj horizontit. Caktoni kohën për të cilën sateliti S e bën një lëvizje të plotë rrethore rreth Tokës, si dhe njehsoni shpejtësinë e lëvizjes së satelitit rreth Tokës. Shqyrtoni rastin e veçantë nëse:

$$h = 250 \text{ km}, t = 30 \text{ s}, R = 6370 \text{ km},$$

ku R është rrezja e Tokës.

Zgjidhje.

Nga figura 7.21 kemi:

$$|OS| = R + h, \quad \angle OAS = 90^\circ + \alpha,$$

ndërsa këndi δ caktohet nga ekuacioni:

$$\frac{\sin \delta}{R} = \frac{\sin(90^\circ + \alpha)}{R + h} \implies \sin \delta = \frac{R}{R + h} \cos \alpha,$$

ndërsa

$$\gamma = 180^\circ - (90^\circ + \alpha + \delta) = 90^\circ - \alpha - \delta.$$

Meqenëse shpejtësi këndore e satelitit është $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\gamma}{t}$ (sateliti bën lëvizje të njëtrajtshme rrethore, $\omega = \text{const.}$), atëherë koha për të cilën sateliti S e bën një lëvizje të plotë rrethore është:

$$T = \frac{2\pi t}{\gamma} = \frac{2\pi t}{\frac{\pi}{2} - \alpha - \arcsin \frac{R \cos \alpha}{R+h}}.$$

Në rstatin e veçantë, kemi $T = 5346.7$ s.

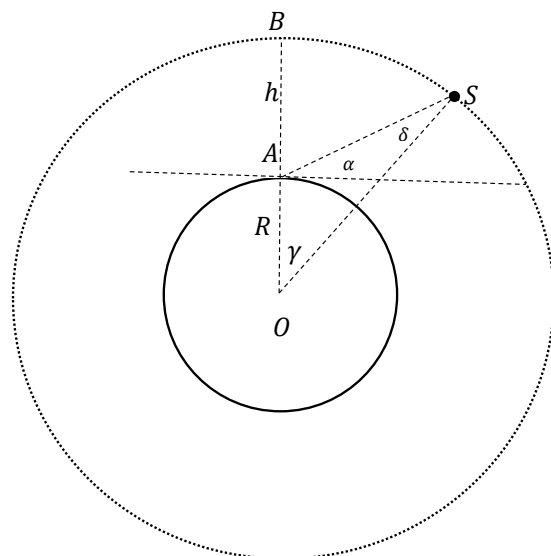


Fig. 7.21

Shpejtësi e lëvizjes së satelitit është:

$$v = \omega \cdot r = \omega(R + h) = \frac{2\pi}{T}(R + h) = \frac{2\pi}{T}(6370 + 250) \text{ km} = 7.8 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

7.10. Funkzionet hiperbolike dhe inverset e tyre

Funksionet hiperbolike $\text{sh } x$, $\text{ch } x$, $\text{th } x$ dhe $\text{cth } x$ përkufizohen në këtë mënyrë:

$$\text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbf{R},$$

$$\text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad \text{cth } x = \frac{\text{ch } x}{\text{sh } x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

Grafikët e këtyre funksioneve janë dhënë në figurat që vijojnë. Vërejmë se funksioni $f(x) = \text{sh } x$ është i përkufizuar për çdo $x \in \mathbf{R}$; është tek ($f(-x) = -f(x)$), prandaj grafiku i tij është simetrik ndaj origjinës $O(0,0)$; $x = 0$ është zero e funksionit; për $x \in (-\infty, 0)$ funksioni është negativ, kurse për $x \in (0, \infty)$ është pozitiv. Kur x rritet shumë, d.m.th. $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \sim \frac{e^x}{2}$, ndërsa kur x zvogëlohet shumë, d.m.th. $x \rightarrow -\infty$, $f(x) \sim -\frac{e^{-x}}{2}$. (Fig. 7.22)

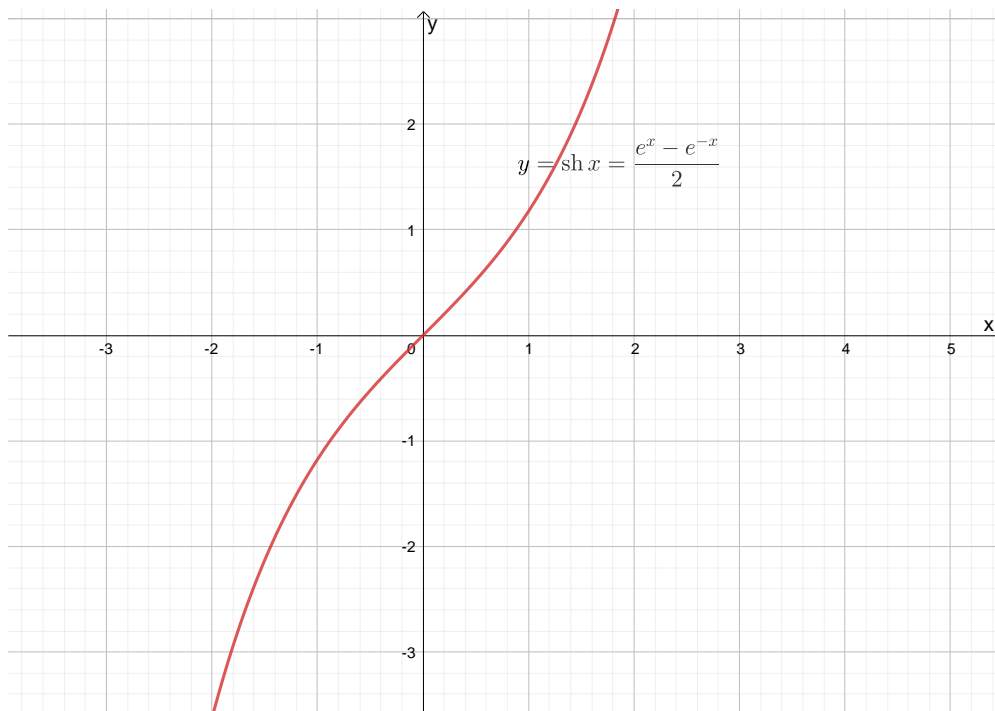


Fig. 7.22

Ngjashëm, funksioni $f(x) = \text{ch } x$ është i përkufizuar për çdo $x \in \mathbf{R}$; është çift ($f(-x) = f(x)$), prandaj grafiku i tij është simetrik ndaj boshtit Oy ; kurse për çdo $x \in \mathbf{R}$ funksioni është pozitiv. Për më tepër, $f(x) = \text{ch } x \geq 1$. Kur x rritet

shumë, d.m.th. $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \sim \frac{e^x}{2}$, ndërsa kur x zvogëlohet shumë, d.m.th. $x \rightarrow -\infty$, $f(x) \sim \frac{e^{-x}}{2}$ (Fig. 7.23).

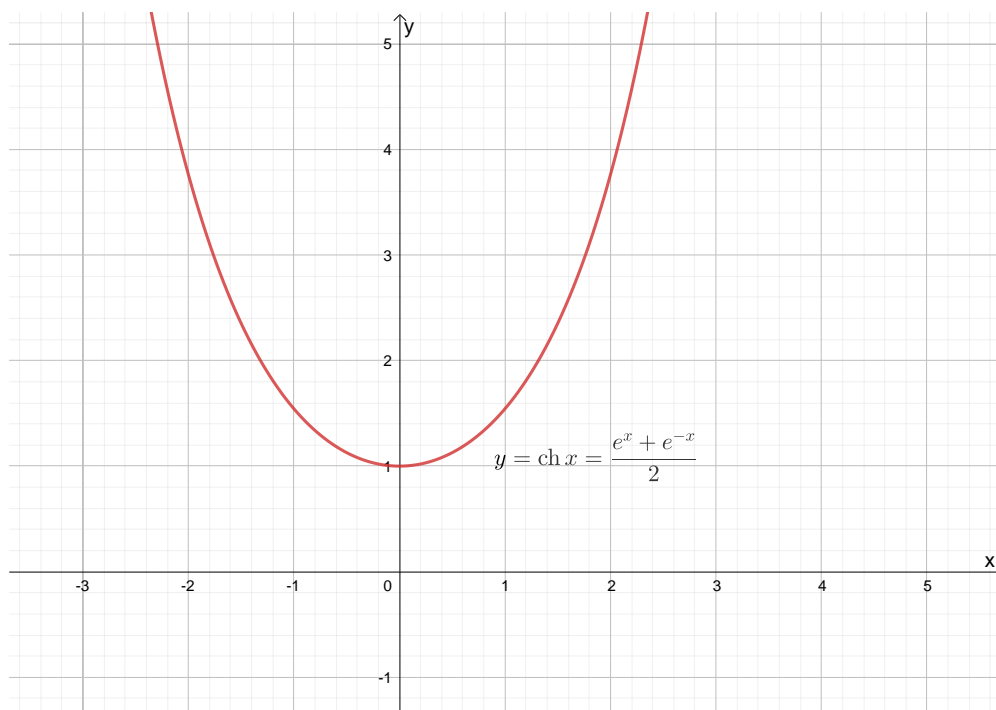


Fig. 7.23

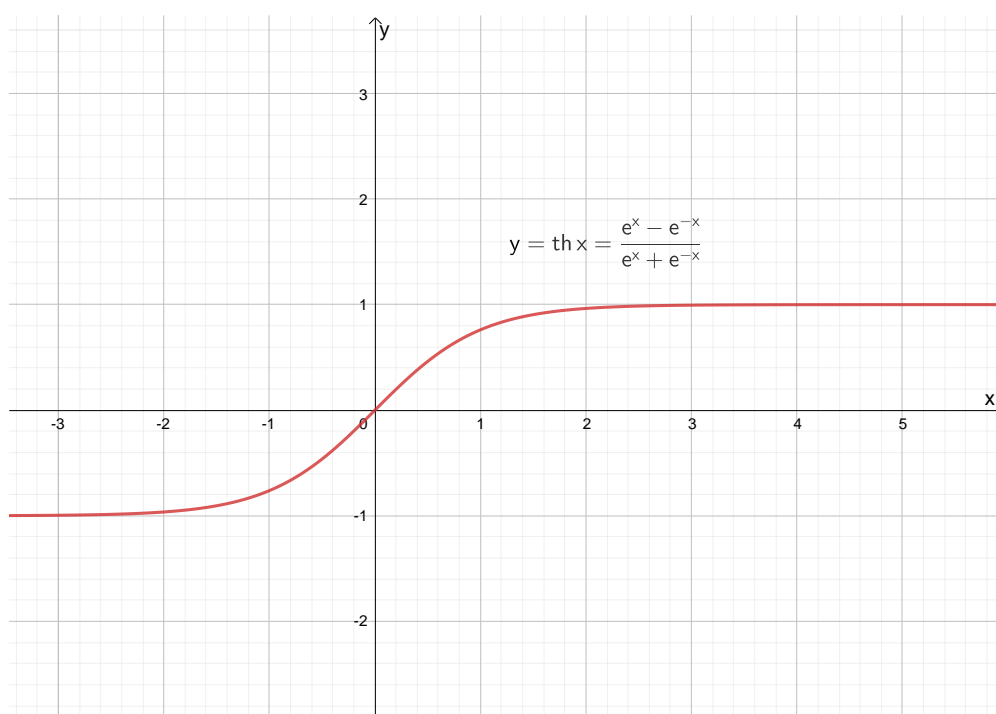


Fig. 7.24

Funksioni $f(x) = \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ është i përkufizuar për çdo $x \in \mathbf{R}$; është tek ($f(-x) = -f(x)$), prandaj grafiku i tij është simetrik ndaj origjinës $O(0,0)$; $x = 0$ është zero e funksionit; për $x \in (-\infty, 0)$ funksioni është negativ, kurse për $x \in (0, \infty)$ është pozitiv. Kur x rritet shumë, d.m.th. $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow 1$, ndërsa kur x zvogëlohet shumë, d.m.th. kur $x \rightarrow -\infty$, $f(x) \rightarrow -1$. Pra drejtëzat $y = 1$ dhe $y = -1$ janë asimptota horizontale të funksionit (Fig. 7.24).

Funksioni $f(x) = \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ është i përkufizuar për çdo $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$; është tek ($f(-x) = -f(x)$), prandaj grafiku i tij është simetrik ndaj origjinës $O(0,0)$; $f(x) = \operatorname{cth} x \neq 0$, për $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, prandaj grafiku i tij nuk e pret boshtin Ox . Drejtëza $x = 0$, d.m.th. boshti Oy është asimptotë vertikale e funksionit, sepse kur $x \rightarrow 0^+$, $f(x) \rightarrow +\infty$, ndërsa kur $x \rightarrow 0^-$, $f(x) \rightarrow -\infty$. Kur x rritet shumë, d.m.th. $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow 1$, ndërsa kur x zvogëlohet shumë, d.m.th. kur $x \rightarrow -\infty$, $f(x) \rightarrow -1$. D.m.th. drejtëzat $y = 1$ dhe $y = -1$ janë asimptota horizontale të funksionit (Fig. 7.25).

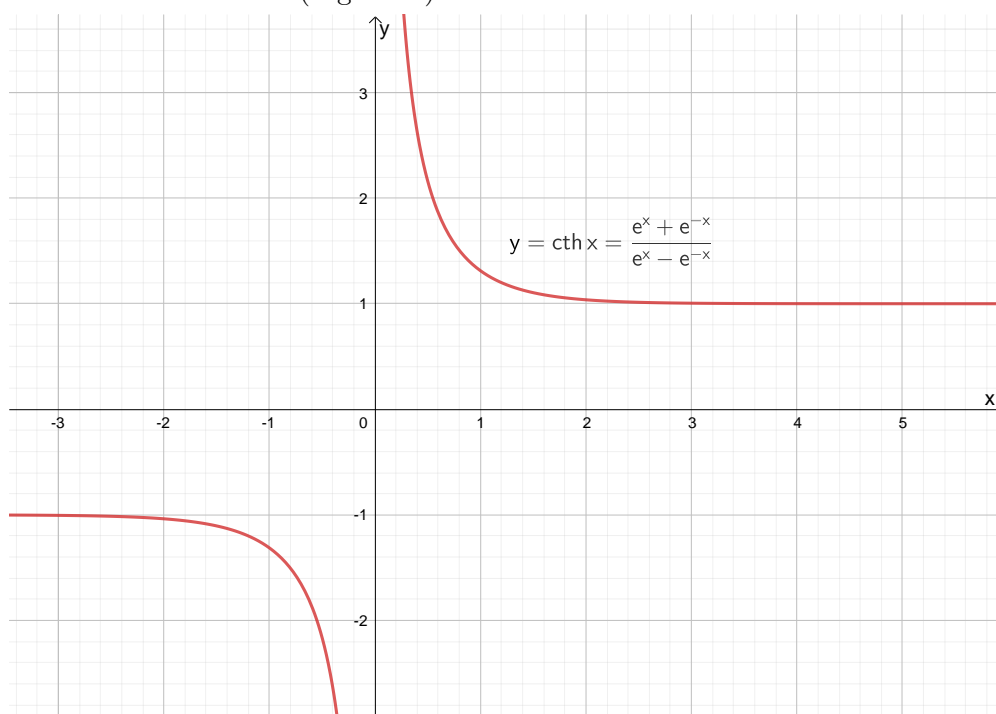


Fig. 7.25

Vlejnë identitetet:

$$\begin{array}{ll} 1. & \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x, \\ 2. & \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \\ 3. & \operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}, \\ 4. & \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}. \end{array}$$

Shembulli 7.24. Gjeni funksionet inverse të funksioneve hiperbolike.

Zgjidhje. 1. Funkzioni $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \operatorname{sh} x$ është bijektiv (tregoni!), prandaj ekziston inversi i tij $f^{-1} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Nga $y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ marrim se $2y = e^x - e^{-x}$, respektivisht $e^{2x} - 2e^x y - 1 = 0$. Me zëvendësimin $e^x = t > 0$, marrim ekuacionin $t^2 - 2ty - 1 = 0$, zgjidhjet e të cilit sipas të panjohurës t janë

$$t_{1,2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}.$$

Meqenëse $t = e^x > 0, \forall x \in \mathbf{R}$, atëherë $t = y + \sqrt{y^2 + 1}$, ose $e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$, respektivisht $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$. Prandaj funksioni invers është

$$f^{-1}(x) = \operatorname{Arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), (x \in \mathbf{R}).$$

Grafiku i tij është dhënë në Fig. 7.26.

2. Funkzioni $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \operatorname{ch} x$ nuk është bijektiv (tregoni!), prandaj nuk ekziston inversi i tij $f^{-1} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Në mënyrë që të gjejmë inverin e tij, jemi të detyruar të ngushtojmë domenën dhe kodomenën e tij. Kështu, funksioni $f_1 : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$, $f(x) = \operatorname{ch} x$ është bijektiv (tregoni!), prandaj ekziston inversi i tij $f_1^{-1} : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$. Ngjashëm, funksioni $f_2 : (-\infty, 0] \rightarrow [1, \infty)$, $f(x) = \operatorname{ch} x$ është bijektiv (tregoni!), prandaj ekziston inversi i tij $f_2^{-1} : [1, \infty) \rightarrow (-\infty, 0]$. Gjetja e funksioneve inverse për funksionet f_1 dhe f_2 , bëhet njësoj si për funksionin $f(x) = \operatorname{sh} x$. Kështu,

$$f_1^{-1}(x) = \operatorname{Arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (x \geq 1),$$

$$f_2^{-1}(x) = \operatorname{Arch} x = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}) \quad (x \geq 1),$$

që së bashku shkruhen si

$$f^{-1}(x) = \operatorname{Arch} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}) \quad (x \geq 1) \quad (\text{Fig.7.27}).$$

Ngjashëm, për funksionet tjera hiperbolike marrim se inverset i tyre janë:

$$f^{-1}(x) = \operatorname{Arth} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), (x \in (-1, 1)) \quad (\text{Fig.7.28})$$

$$f^{-1}(x) = \operatorname{Arcth} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), (|x| > 1) \quad (\text{Fig.7.29}).$$

Grafikët e funksioneve inverse të funksioneve hiperbolike ndërtohen nga ato hiperbolike, si figura simetrike ndaj drejtëzës $y = x$. Grafikët e tyre janë dhënë në vijim.

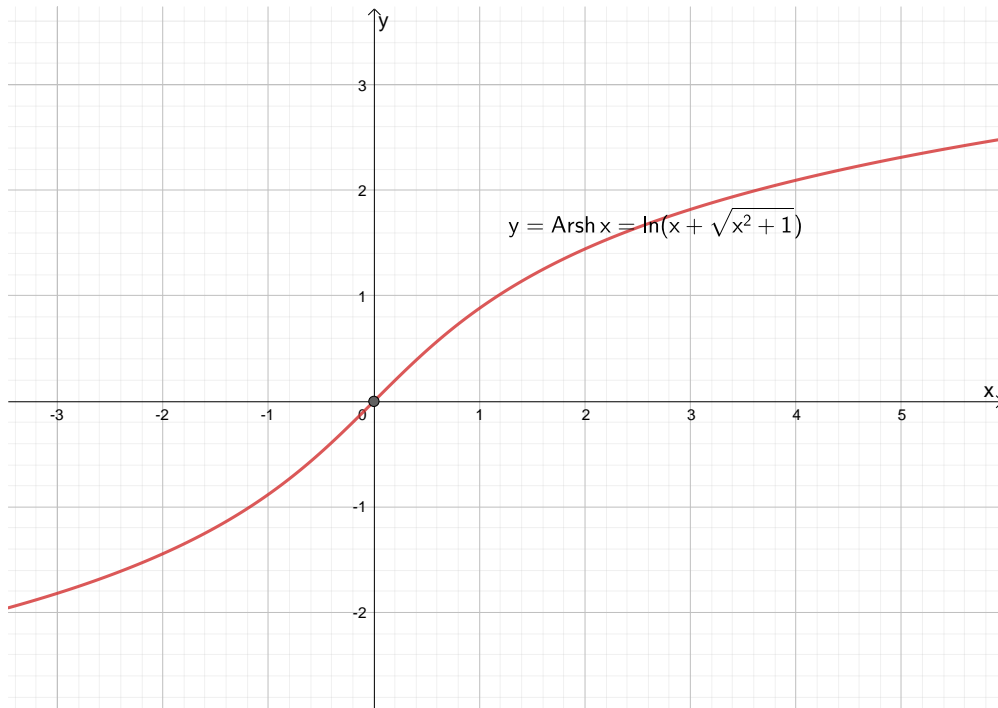


Fig. 7.26

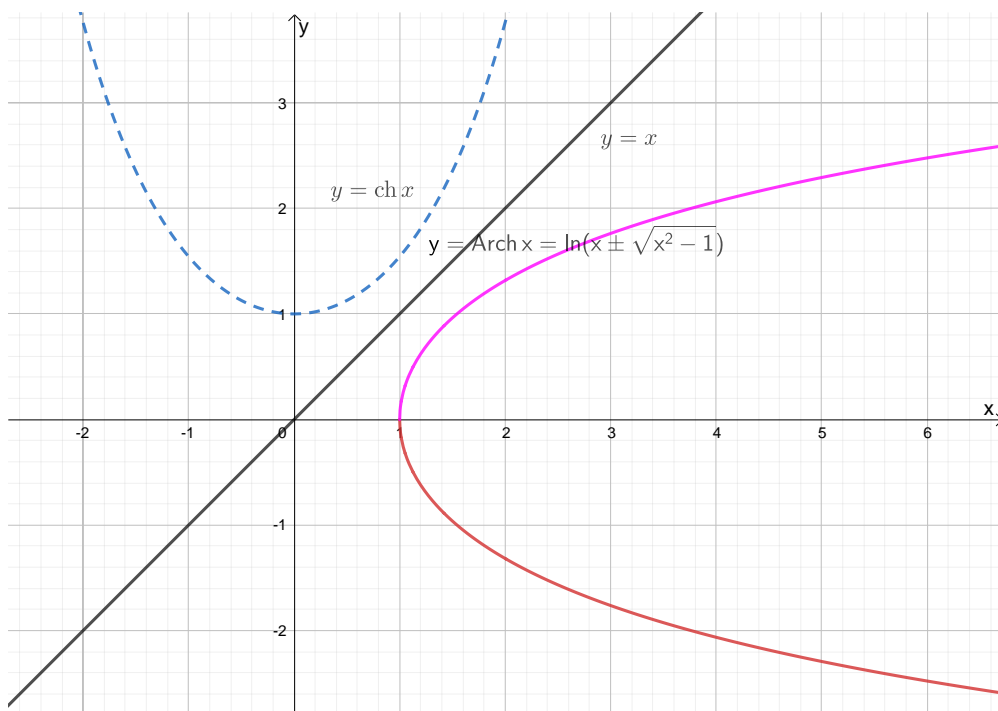


Fig. 7.27

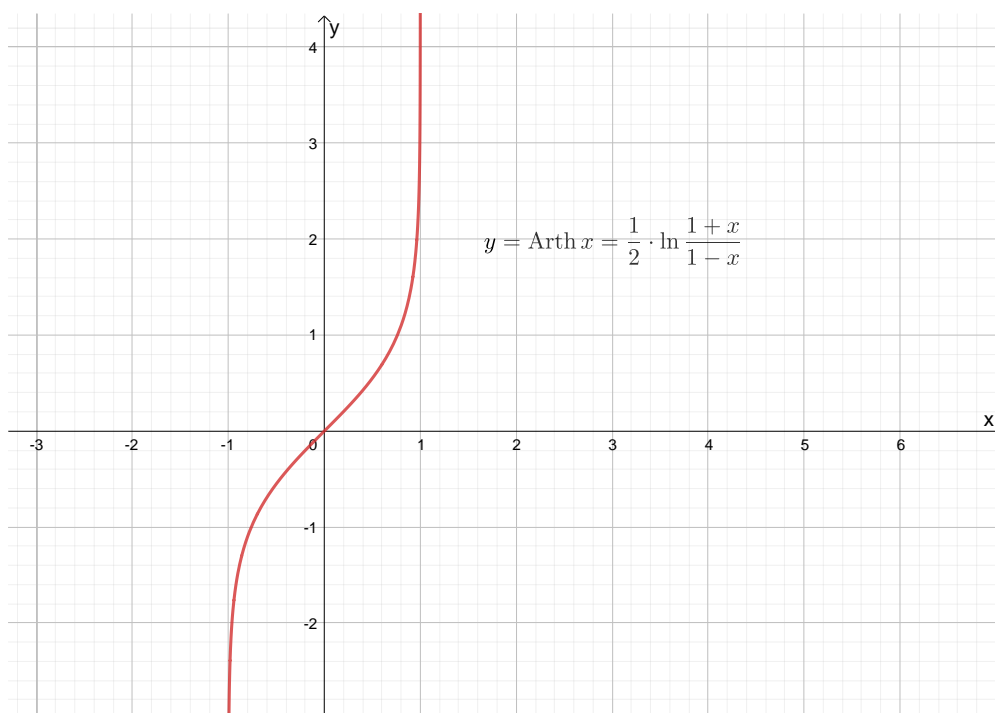


Fig. 7.28

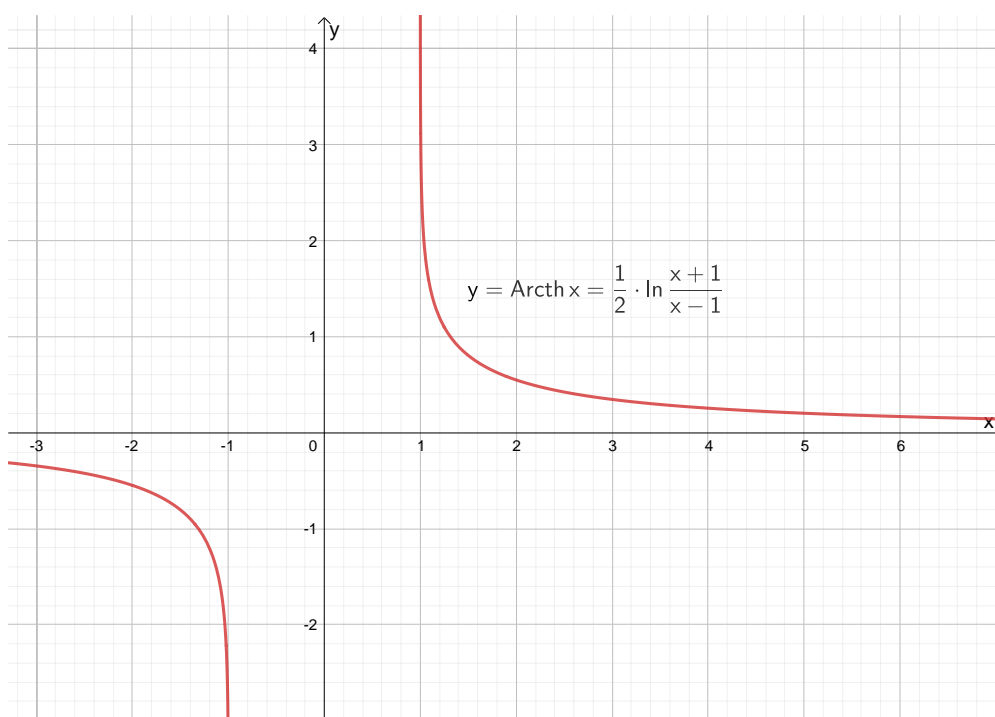


Fig. 7.29

LITERATURA

1. B. Bragg, Ch. Hall, H. Kennedy: *Algebra 2*, Kentucky, Prentice Hall Mathematics, Boston, Massachusetts, Arizona 2010.
2. M. Efendija, Q. Haxhibeqiri, R. Limani: *Matematika 11 për gjimnazin Matematikë-informatikë*, Prishtinë 2005.
3. Terry H. Wesner, Harry L. Nustad: *Intermediate Algebra With Applications*, WCB Group 1991.
4. Vene T. Bogoslavov: *Zbirka rešenih zadataka iz matematike I*, Beograd 1994.
5. Vene T. Bogoslavov: *Zbirka rešenih zadataka iz matematike II*, Beograd 1996.

Indeksi i emrave

Briggs, Henry, 178
Cramer, Gabriel, 86
De Morgan, Augustus, 14
Dirichlet, Peter Gustav Lejeune, 27
Heron nga Aleksandria, 205
Lagrange, Joseph-Louis, 56
Maclaurin, Colin, 178
Napier, John, 178
Newton, Isaac, 51
Pascal, Blaise, 49, 52
Venn, John, 7
Viét, François, 107

Indeksi i nocioneve

- Asimptotë horizontale, 172, 256
- Asimptotë vertikale, 256
- Bashkësi, 5,7
- Bashkësi boshe, 9
- Bashkësi e fundme, 9
- Bashkësi e numërueshme, 9
- Bashkësi e pafundme, 9
- Bashkësi e panumërueshme, 9
- Bashkësi e zgjidhjeve, 77
- Diferencë e bashkësive, 17
- Diferencë simetrike, 18
- Domenë, 20
- Ekuacion bikuadratik, 117
- Ekuacion eksponencial, 159
- Ekuacion irracional, 146
- Ekuacion kuadratik, 105
- Ekuacion linear, 77
- Ekuacion logaritmik, 187
- Ekuacion trigonometrik, 219
- Element, 7
- Formula e binomit (Njutonit), 51
- Formulat e Vietit, 107
- Funksion, 20
- Funksion eksponencial, 159, 170
- Funksion hiperbolik, 254
- Funksion karakteristik, 27
- Funksion kuadratik, 122
- Funksion logaritmik, 178
- Funksion trigonometrik, 205, 207, 236
- Fuqizim, 37
- Inekuacion eksponencial, 159
- Inekuacion irracional, 149
- Inekuacion kuadratik, 137
- Inekuacion linear, 98
- Inekuacion logaritmik, 187
- Inekuacion trigonometrik, 230
- Kodomenë, 20
- Komplement, 14
- Kosekans, 205
- Kosinus, 205
- Kosinus hiperbolik, 254
- Kotangjent, 205
- Kotangjent hiperbolik, 254
- Logaritëm, 178
- Nënbashkësi, 9
- Origjinal, 20
- Përfytyrë, 20
- Pasqyrim, 20
- Pasqyrim bijektiv, 21
- Pasqyrim konstant, 21
- Pasqyrim identik, 21
- Pasqyrim injektiv, 21
- Pasqyrim invers, 23
- Pasqyrim surjektiv, 21
- Permutacion i bashkësisë, 21
- Pjesa kryesore e një rrënje, 41
- Prerje, 13
- Produkt kartezyan, 15
- Rrënjëzim, 40
- Sekans, 205
- Sinus, 205
- Sinus hiperbolik, 254
- Sistem i ekuacioneve lineare, 77
- Tangjent, 205
- Tangjent hiperbolik, 254
- Transformim i bashkësisë, 22
- Union, 12
- Vlera absolute, 25

RAMADAN LIMANI

MATEMATIKA ELEMENTARE

Lektore

MELIHATE ZEQRIRI

Korrektor

Autori

Realizimi kompjuterik

Autori

Figurat i punoi

Autori

Formati 17×24 cm (B5)

Katalogimi në botim (CIP)

Biblioteka Kombëtare e Kosovës

© Të gjitha drejtat e autorit mbrohen me ligj.

Matematika elementare–Ramadan Limani
Universiteti i Prishtinës "Hasan Prishtina", Prishtinë

ISBN _____