

MEKANIKA I

**PRINCIPET THEMELORE
TE MEKANIKES**

Mekanika është shkencë e cila merret me levizjen dhe ekuilibrin e trupave që shkaktohet nga veprimi i forcave.

Ne varesi të objekteve të studimit mekanika ndahet në:

- Mekanika e trupi të ngurtë
- Mekanika e fluideve
- Mekanika e gazrave

Trupi i ngurt është pjesa e hapësirës e cila në mënyrë të pa ndërprerë është e mbushur me material.

Ai mund të jetë:

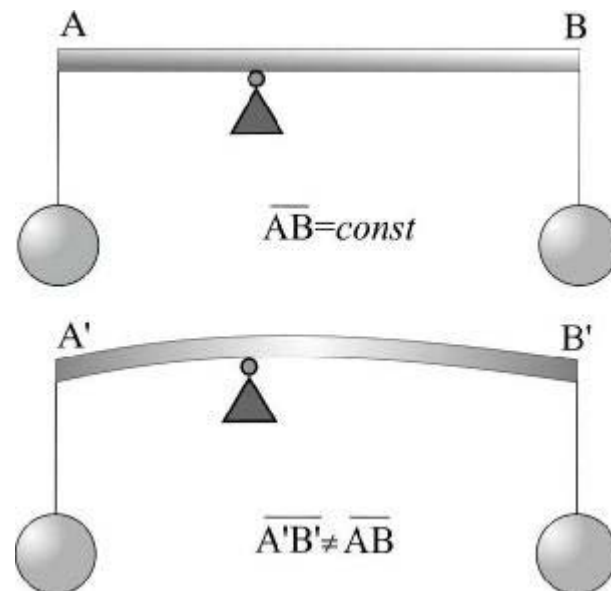
- **Deformabil** - (mund të ndërroj formën dhe vëllimin)

Shembull i trupit deformabil është **sungjeri**.

- **Jo Deformabil** – trupi absolut i ngurtë

Kuptimi i trupit te ngurte ne mekanike

Trupi absolut i ngurte eshte trupi tek i cili distanca AB, ne mes te qfaredo dy pikave te trupit, nga veprimi i forcave mbetet e pa ndryshueshme ($AB = \text{const}$).



(trupi absolut i ngurte eshte nje idealizim i cili shfrytezohet ne mekanik qe lehte dhe ne menyre te pershtateshme te zgjidhen problemet ne mekanik)

Sipas llojit të trupit që studion, mekanika e trupit të fortë ndahet në:

- **Mekanikën e trupit të ngurtë,**
- **Mekanikën e trupit të deformueshëm(deformabil)**

Mekanika e trupit te ngurtë ndahët në:

- **Statikë** - studion ekuilibrin e trupave
- **Kinematikë** - studion karakteristikat gjeometrike te levizjes se trupit
- **Dinamikë** - studion ligjet e levizjes se trupit nga veprimi i forcave ne trup.

Kuptimi i levizjes dhe qetesise mekanike

Te gjithë trupat ne natyre levizin:

Njerëzit levizin në raport me tokën, toka leviz në raport me diellin, sistemi diellor lëviz në raport me hapësirën...

Ne natyre nuk egziston qetesi absolute dhe levizje absolute.

Ne këtë kurs supozojm se toka nuk leviz dhe se trupat të cilet janë të lidhur fortë me sipërfaqën e tokës nuk levizin.

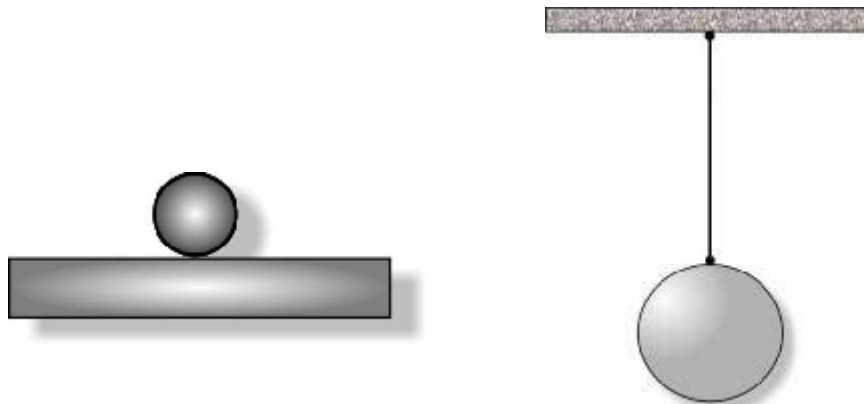
Sipas mundesise se levizjes trupat mund te ndahen ne:

Trupa te lire - levizja eshte e lire nga një pozitë në tjetrën

Shembull: fluturimi i aeroplanit në ajr.

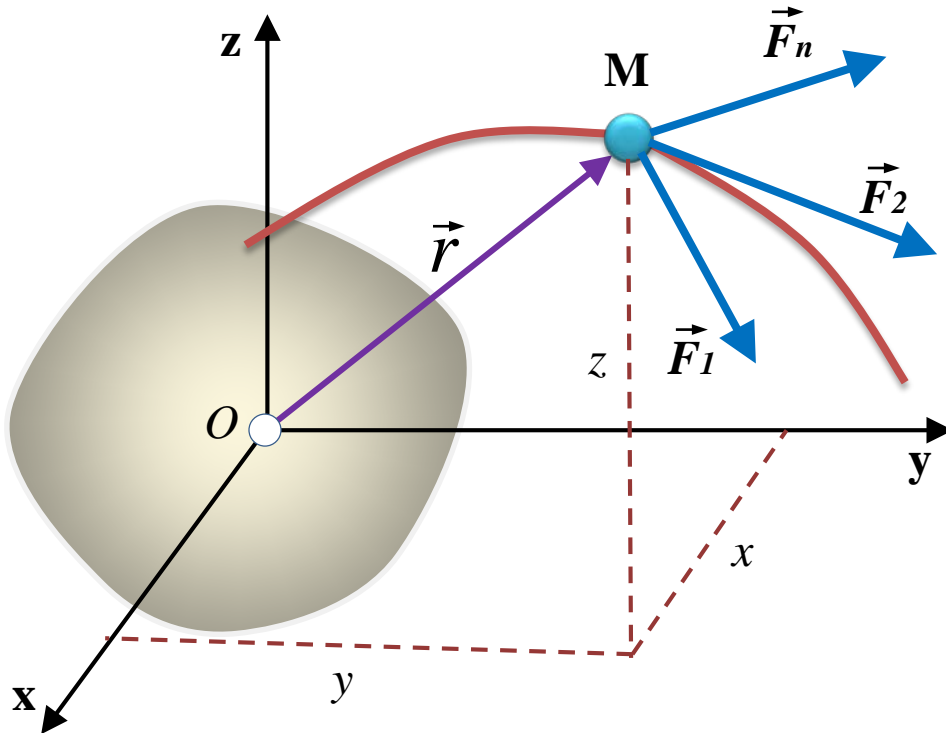
Trupa te lidhur - levizja në hapësir është e kushtëzuar nga trupat tjerë.

Shëmbuj: levizja e trenit nepër binar, mbeshtetja e lir e trupit dhe lidhja me litar.



Trupi referent

Trup referent quhet trupi ne raport me te cilin analizohet levizja apo qetesia e trupave tjerë.



Për trupin referent lidhet sistemi koordinativ ne bazë të cilit relizohet llogaria.

EKUILIBRI I TRUPIT

Përë trupin thëmi se është në ekuiliber nese ai nuk e ndërron pozitën në raport me trupin referent, gjegjesishtë nuk levizë në raport me të.

Veprimi mekanik

Me veprim mekanik nenkuptojm veprimin reciprok mes trupave si pasoj e të cilit vije deri te:

- **ndërrimi i levizjës së trupave,**
- **prishja e qetësisë apo**
- **ndërrimi i formës së trupit.**

Te gjitha madhësit në mekanikë mundë të ndahën në:

- Madhësi skalare
- Madhësi vektoriale

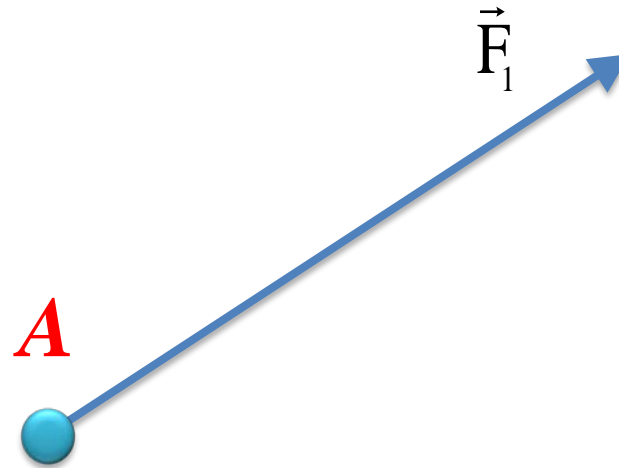
Madhësi skalare janë të përcaktuara vetëm me intensitetin

(numrin):

Masa [kg], Dendësia [kg/m³], Temperatura [K], Koha [s], Gjatësia [m] ...

Madhësitë vektoriale përcaktohen me:

- Intenzitetin,
- Drejtimin,
- Kahjen dhe
- Pikëveprimin.



Madhësitë themelore vektoriale në mekanikë janë:

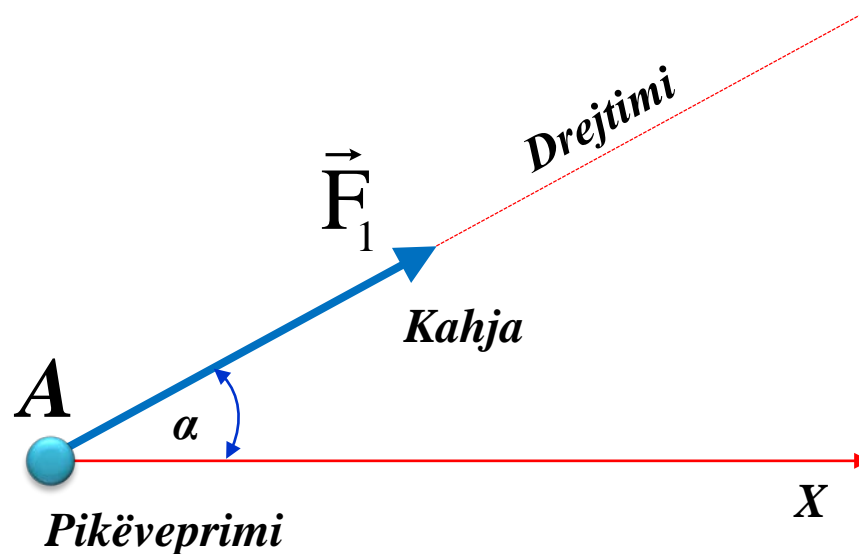
vektori i pozitës [m], forca [N], shpejtësia [m/s], nxitimi [m/s²].

FORCA - MADHËSIA E PARË E VEPRIMIT MEKANIKË

Forca është madhësia e veprimit reciprok mes dy trupave. Forca shkakton lëvizjen e trupit i cili ka qenë në qetësi ose e ndërron formën e lëvizjes së trupit i cili ka qenë në lëvizje.

Forca është madhësi vektoriale dhe përcaktohet me:

- intensitetin,
- drejtimin,
- kahjen dhe
- pikë veprimin.



Forcat ndahen ne:

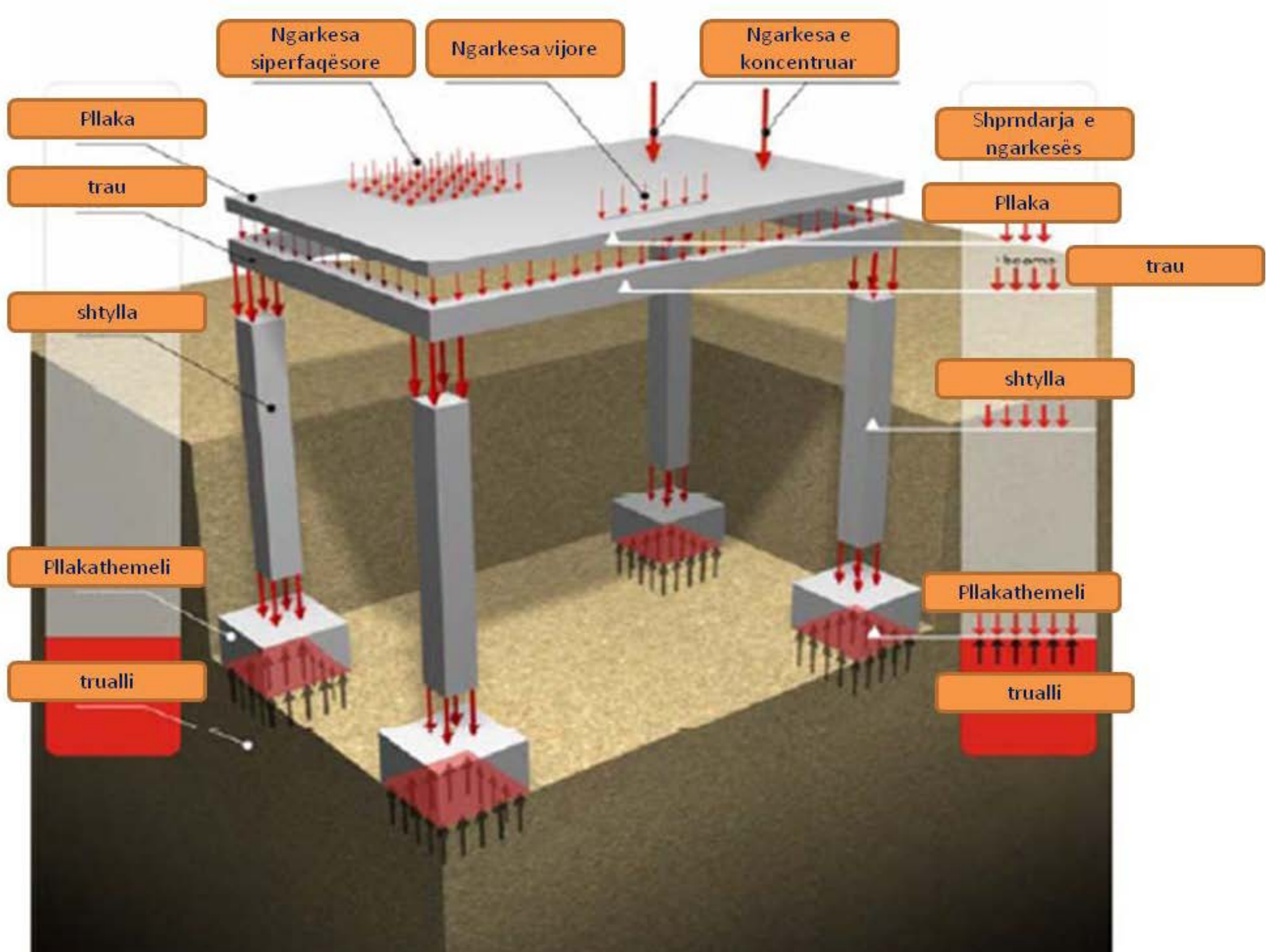
- **Aktive** - shkaktojnë lëvizje (forca nga era, bora,...)
- **Pasive** - nuk shkaktojnë lëvizje (reaksionet e lidhjeve, forca e fërkimit,..)

Sipas vend veprimit forcat ndahen në:

- **Jashtme** - forcat te cilat i shkaktojnë trupat tjerë në trupin e shikuar.
- **Brendshme** - forcat e veprimit reciprok të pjesëve te trupit mes veti.

Veprimi i forcës mundë të jetë:

- **Në vetëm një pikë** - forca e koncentruar e cila vepron në një pikë .
- **Në një numer pikash** - forca kontinuale është ngarkesa e cila vepron në një gjatësi të konsideruar (sipërfaqe, vëllim) të mbajtësit.



LIGJET NJUTNIT (NEWTON)

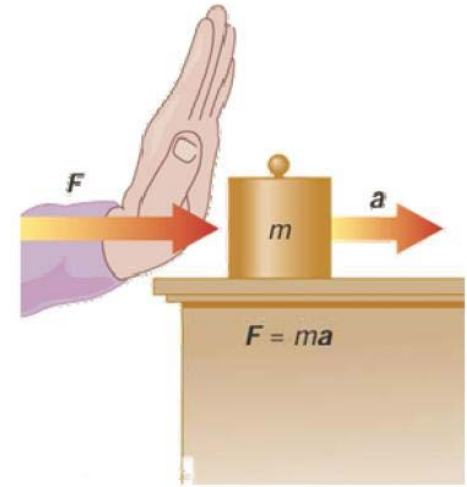
Ligji i pare - ligji i inercisë

Trupi e ruan gjendjen e mëparshme deri sa ne trup te mos veprojnë ndonjë forcë e jashtme për të ndërruar pozitën.



Ligji i dyte - ekuacioni themelor i dinamikës

$$\vec{F}_1 = m \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{V} - \vec{V}_0}{t - t_0} = m \vec{a} \quad \vec{F}_1 = m \vec{a}$$



Ligji i trete - ligji i aksionit dhe reaksionit

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$



NJËSIT MATËSE

SI (Systeme Internationale d'Unites)

Masa **m** – (kg) kilogram,

Gjatesia **L** – (m) metri,

Koha **t** – (s) sekond

Forca **F** – (N) Njutn


$$1\text{N} = 1\text{kgm}/\text{s}^2$$

Kur vlerat numerike janë shumë të vogla apo shumë të mëdha, njesit mundë të modifikohen duke shfrytëzuarë prefikset e paraqitur në tabelë.

	Forma eksponenciale	Prefiksi	SI simboli
1000 000 000	10^9	Giga	G
1000 000	10^6	Mega	M
1000	10^3	Kilo	k
0.001	10^{-3}	Mili	m
0.000 001	10^{-6}	Mikrro	μ
0.000 000 001	10^{-9}	Nano	n

Pesha e trupit - gjithashtu është forcë dhe matët me Njutën.

$$G = mg ,$$

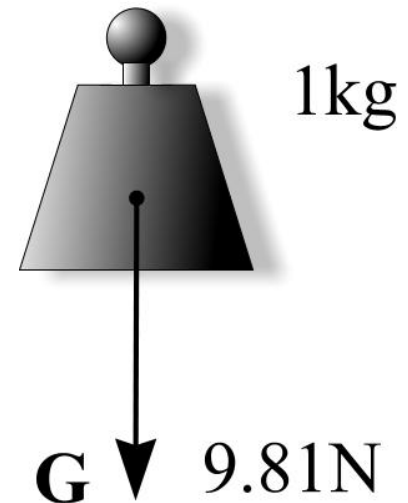
ku:

G - forca e gravitetit, pesha e trupit, ndërsa

g - nxitimi i rendimit të tokës $g = 9.81\text{m/s}^2$.

Trupi me masë 1kg ka peshën 9,81 N,

Trupi me masë 2kg ka peshën 19,62 N.



AKSIOMAT E STATIKËS

- **Aksiomat**-janë të vërteta të cilat matematikisht nuk vërtetohen.

Ato bazohen në hulumtimet eksperimentale.

- **Teoremat**- janë të vërteta të cilat në bazë të aksiomave vërtetohen matematikishtë.

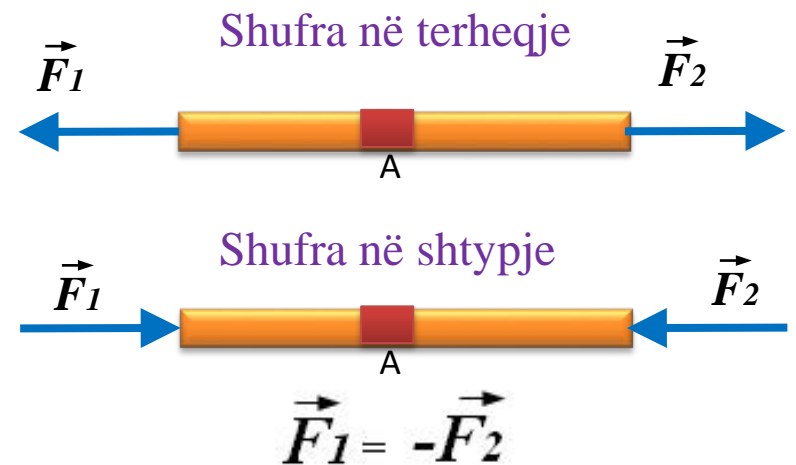
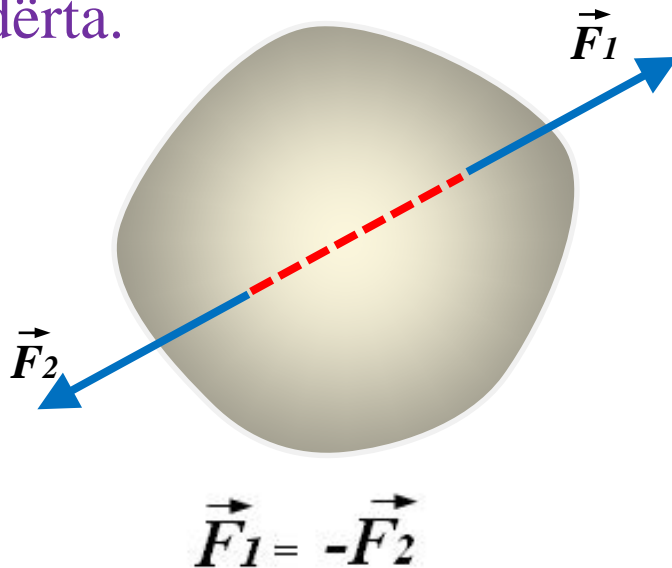
Statika bazohet në disa aksioma.

Aksioma e parë – *principi i inercionit (ligji i parë i njutnit)*

Trupi e ruan gjendjen e me parshme deri sa ne trup te mos veprojnë forca jashtme per tia nderruar poziten.

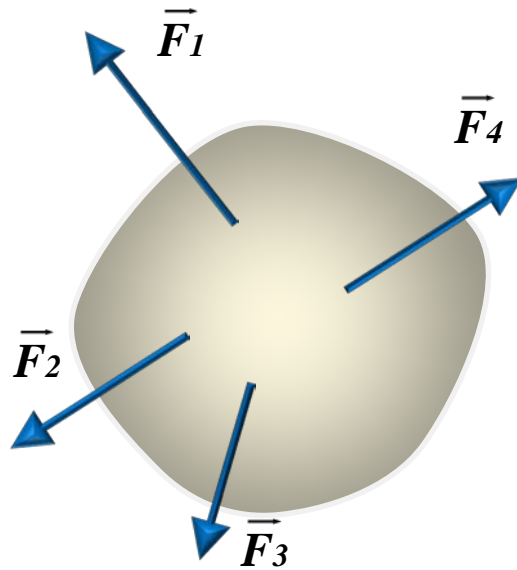
Aksioma e dytë – *ekuilibri i dy forcave*

trupi i ngurtë në të cilin veprojnë dy forca gjëndet në ekuilibër vetem nese forcat kanë intenzitet dhe drejtim të njëjtë, por kahje të kundërta.



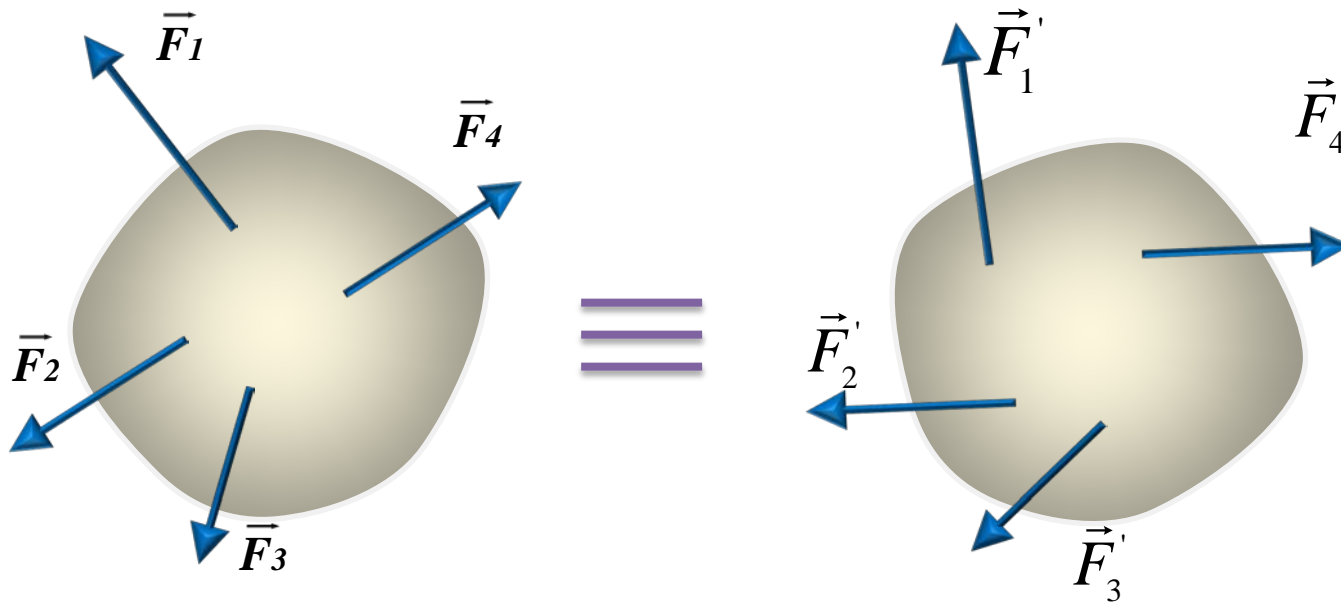
Sistemi i forcave

Bashkësia e forcave që veprojnë në trup quhet sistem i forcave.



Sistemi i forcave ekuivalente

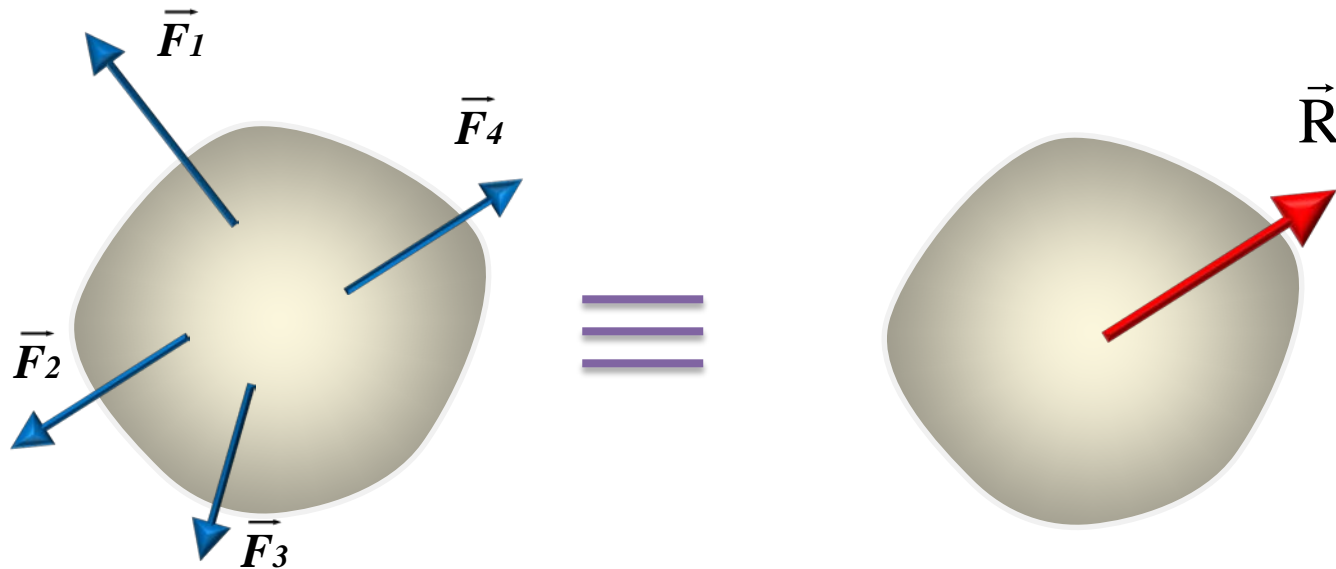
Në qoftë se në një sistem forcash i cili vepron në trup mund të zavëndësohet me një sistem tjetër të forcave duke mos e prishur gjendjen e qetësisë apo të levizjes, atëherë ato dy sisteme forcash quhen sisteme ekuivalente.



$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4) \equiv (\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \vec{F}'_3, \vec{F}'_4)$$

Rezultanta e sistemit të forcave

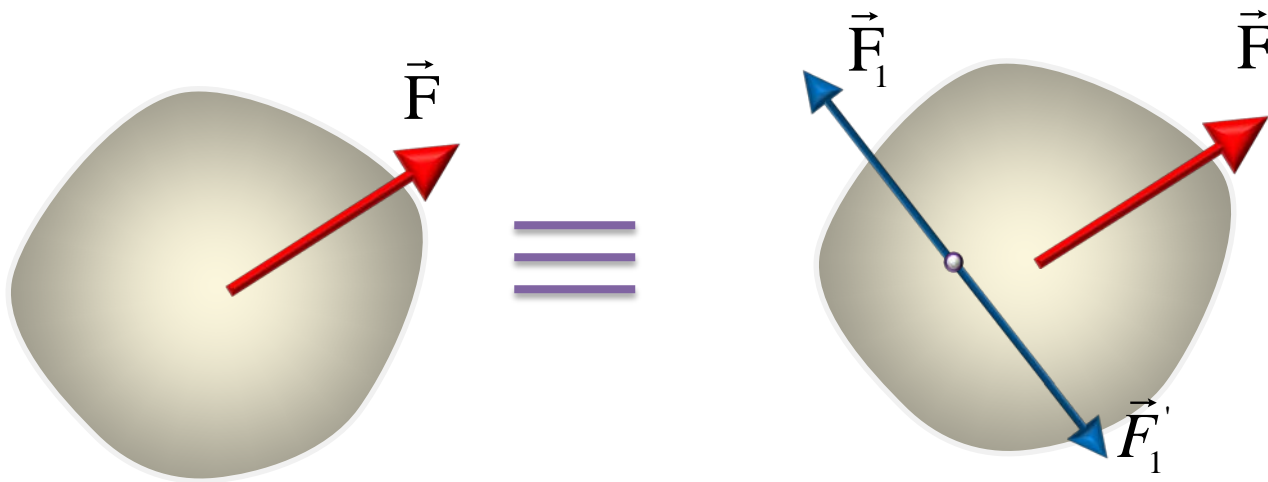
Në qoftë se një sistem i forcave mundë të zavëndësohet vetëm me një forcë e që të mos ndikoj në gjëndjen e qetësisë apo levizjes së trupit atëherë ajo forcë është *Rezultanta e sistemit të forcave*.



$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4) \equiv (\vec{R})$$

Aksioma e tretë - shtimi dhe largimi i sistemit të forcave ekuilibruese

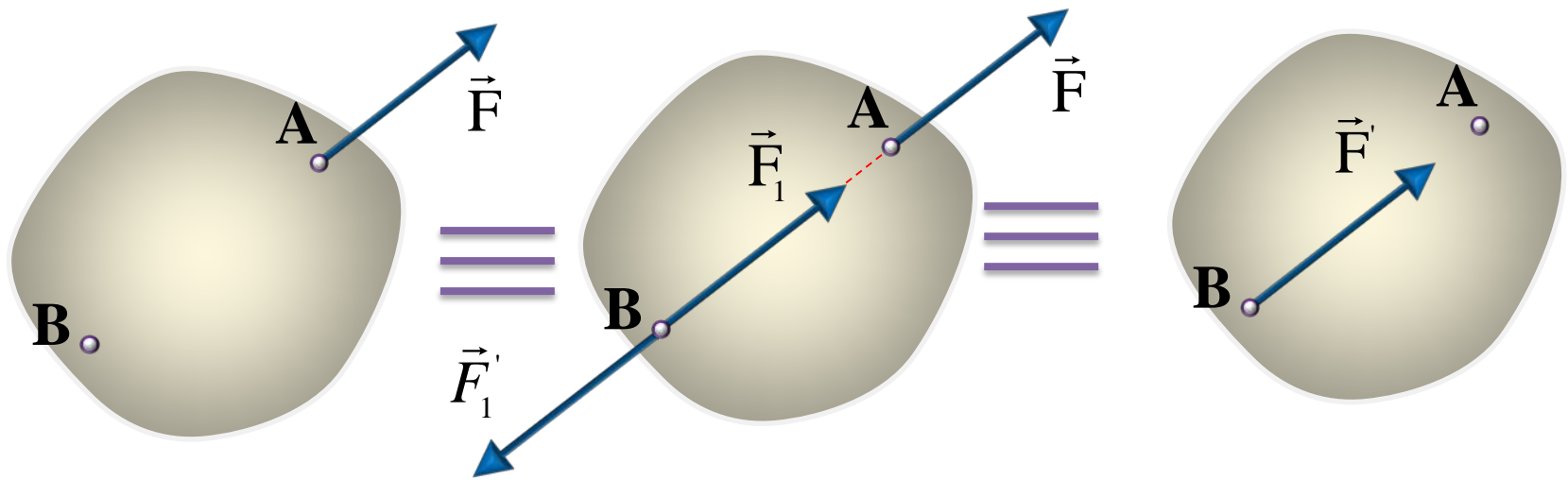
Në qoftë se trupit i shtojm apo i heqim nje sistem të forcave ekuilibruese ai nuk e ndërron gjendjen e më parshme (ekulibrin).



$$(\vec{F}_1, \vec{F}'_1) \equiv 0, \quad (\text{A3}) \Rightarrow (\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}'_1) \equiv (\vec{F})$$

Teorema e çvendosjes së forcës

Veprimi i forcës në trup nuk ndërron nese pikëveprimi i sajë ndërron (çvendoset) në cilëndo pikë të trupit përgjatë vijëveprimimit të sajë (rrjedhë se Forca është vektor rrëshqitës).

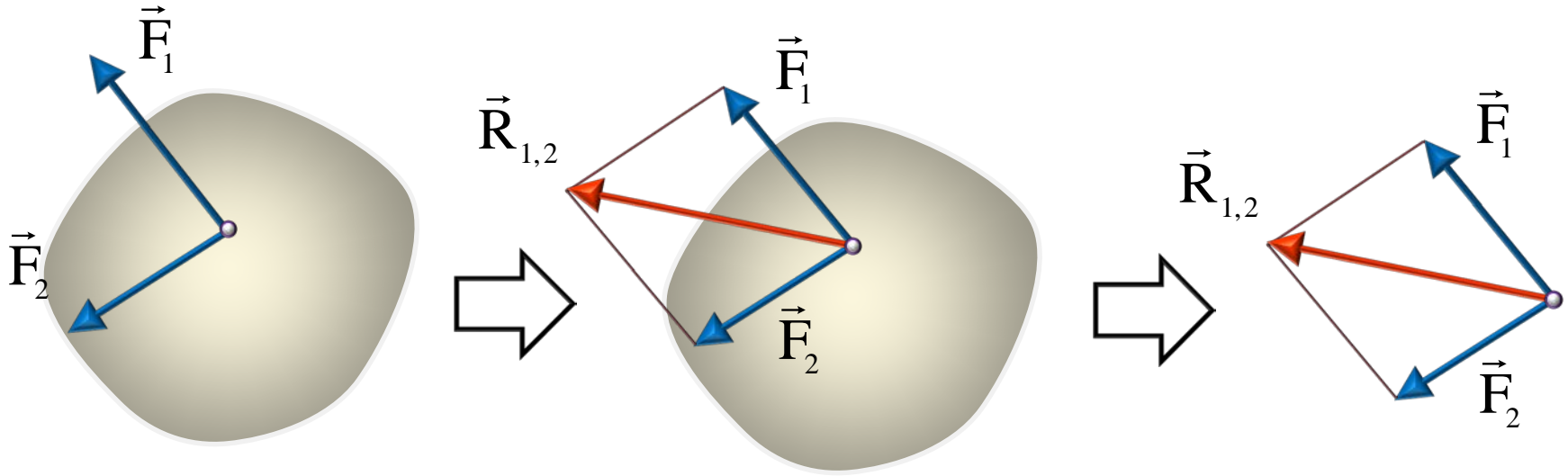


$$\vec{F}_1 = \vec{F}'_1, \quad (\vec{F}_1, \vec{F}') \equiv 0, \quad (A3) \Rightarrow (\vec{F}) \equiv (\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}'_1) \equiv (\vec{F}')$$

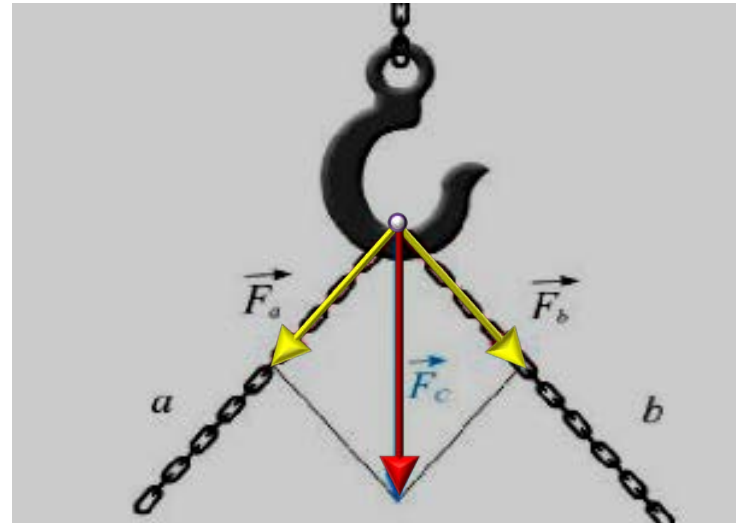
Sistemi i forcave ekuivalente në kuptimin statik mund të jetë jo ekuivalent në kuptimin deformabil.

Shembull: Reaksionet janë zero por kemi diagrame

Aksioma e katërt- Rregulla e paralelogramit të forcave



$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$



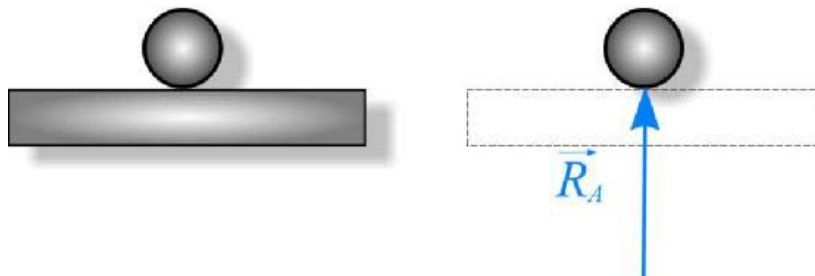
Aksioma e pestë

Çdo trup konsiderohet i lirë nese i largojm lidhjet dhe ndikimin e tyre e zavedesojmë me forca. Ato forca quhen **forcat e lidhjeve apo reaksionet e lidhjeve.**

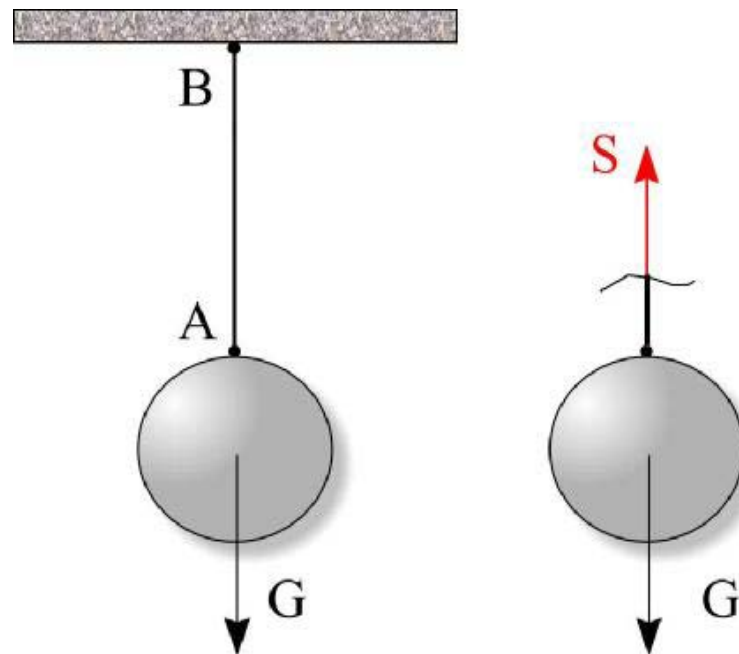
Reakcioni i lidhjes është forca me të cilën lidhja vepron në trup dhe e cila pengon levizjen e trupit në hapësirë në varësi të llojit, gjegjesisht tipit të lidhjes.

Reaksionet e lidhjeve

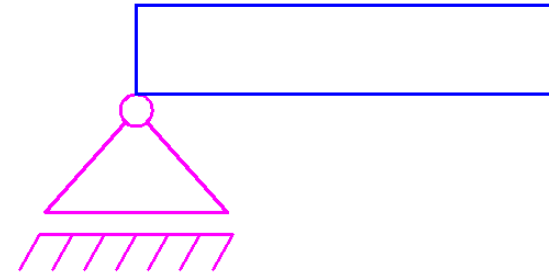
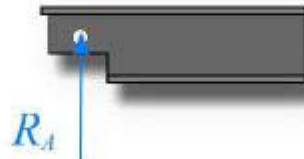
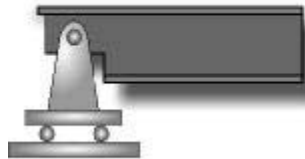
Lidhja e realizuarë me sipërfaqe të lëmuar



Lidhja e realizuarë me litarë

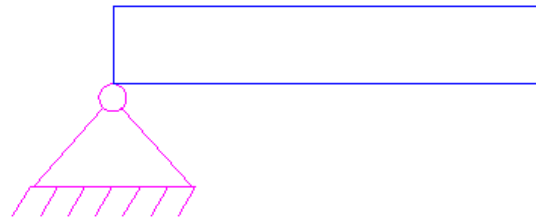
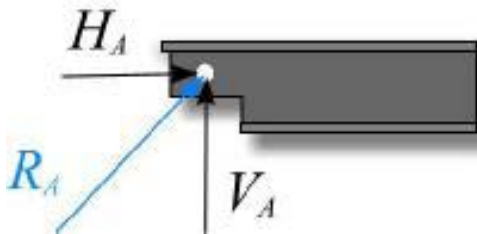


Lidhja e realizuarë me mbështetës të levizshëm



paraqitja skematike e lidhjes

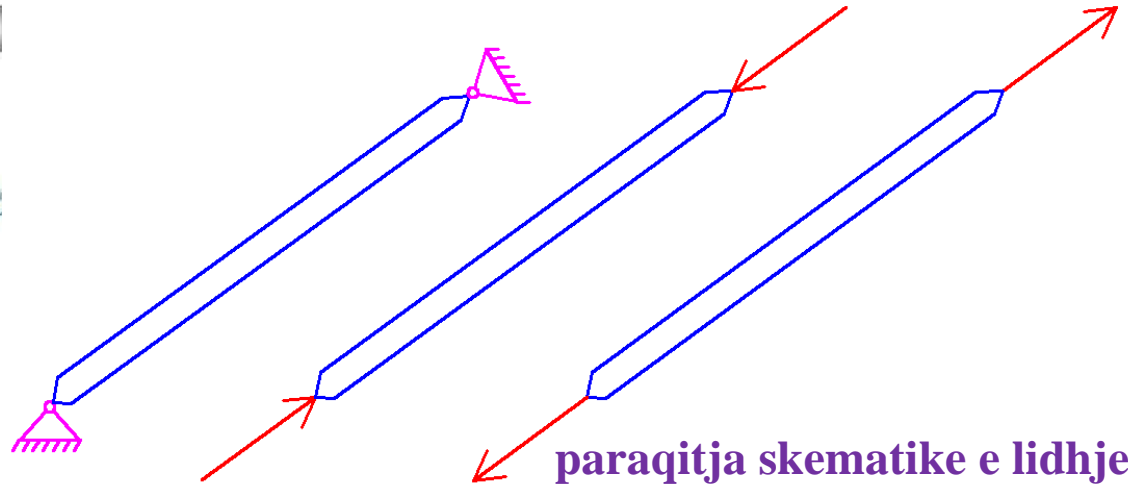
Lidhja e realizuarë me mbështetës të pa levizshëm



paraqitja skematike e lidhjes



Lidhja e realizuarë meshufër të thjeshtë (pesha e shufrës nuk merrët parasyshë)

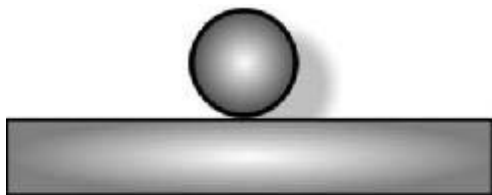


Aksioma e gjashtë- principi i aksionit dhe reaksionit

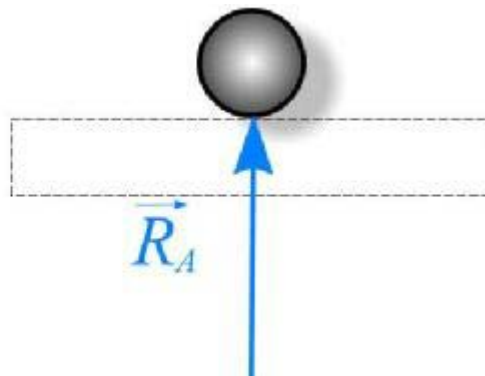
Veprimi i dy trupave në mes veti është i njëjtë por me kahje të kundërt, kjo do të thotë që aksionit në mënyrë të njëjtë i përgjigjet reaksioni.

Lidhja e realizuarë me sipërfaqe të lëmuar

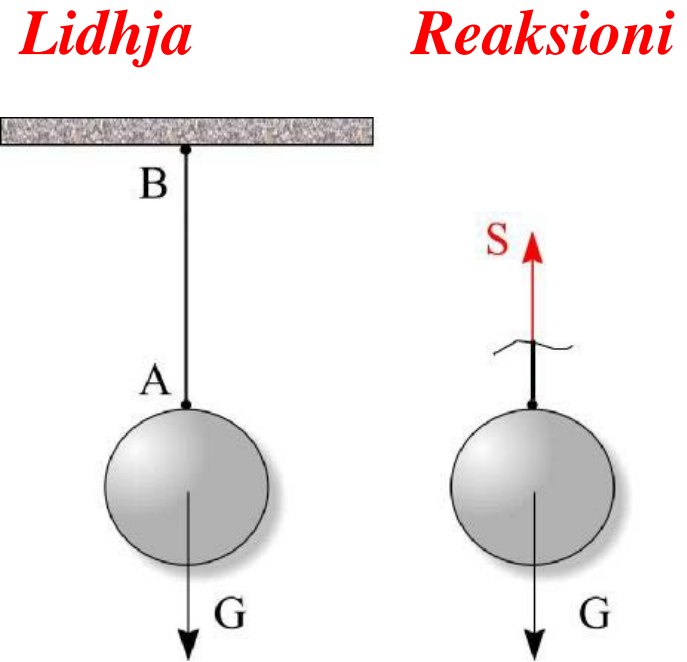
Lidhja



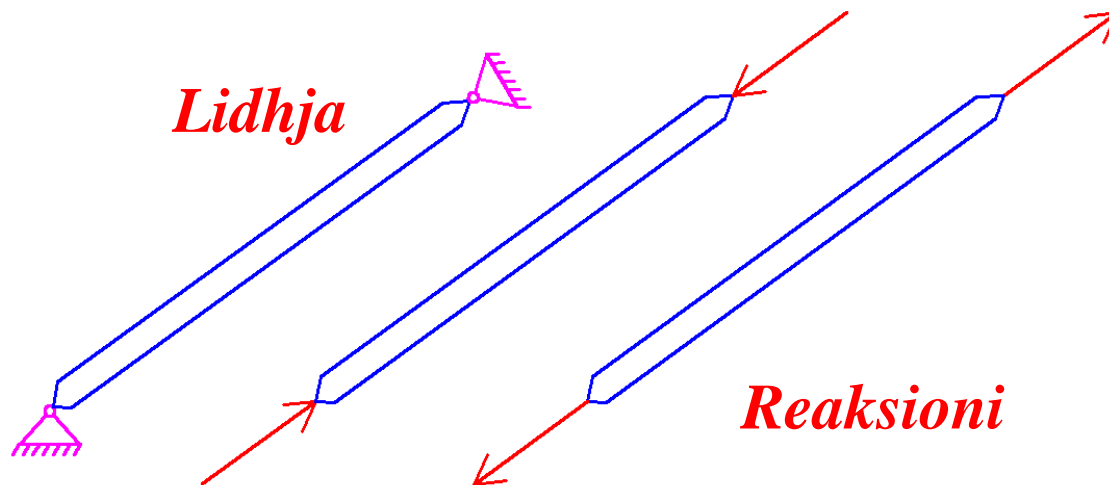
Reaksioni



Lidhja e realizuarë me litarë



Lidhja e realizuarë me shufër të thjeshtë

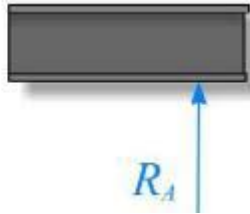


Lidhja e realizuarë me mbështetës të levizshëm

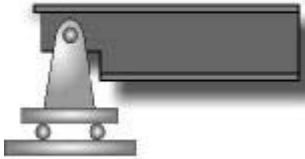
Lidhja



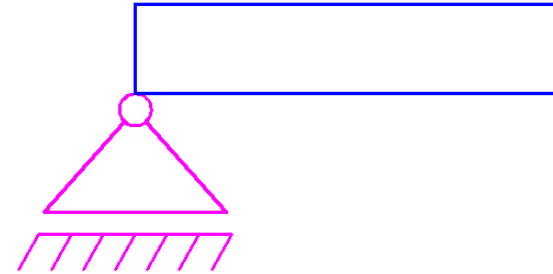
Reaksioni



Lidhja



Reaksioni

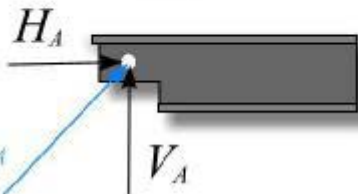


paraqitja skematike e lidhjes

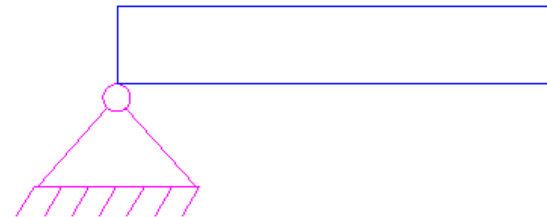
Lidhja e realizuarë me mbështetës të pa levizshëm



Lidhja



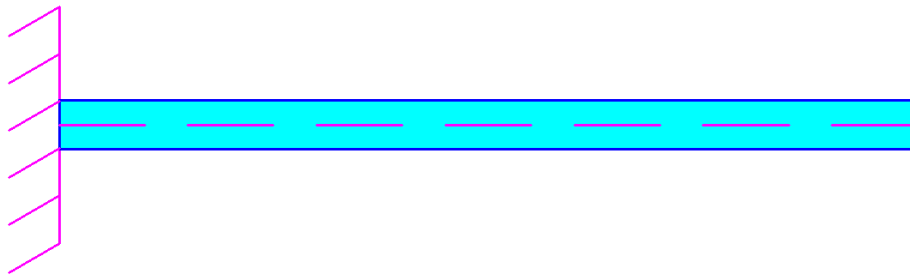
Reaksioni



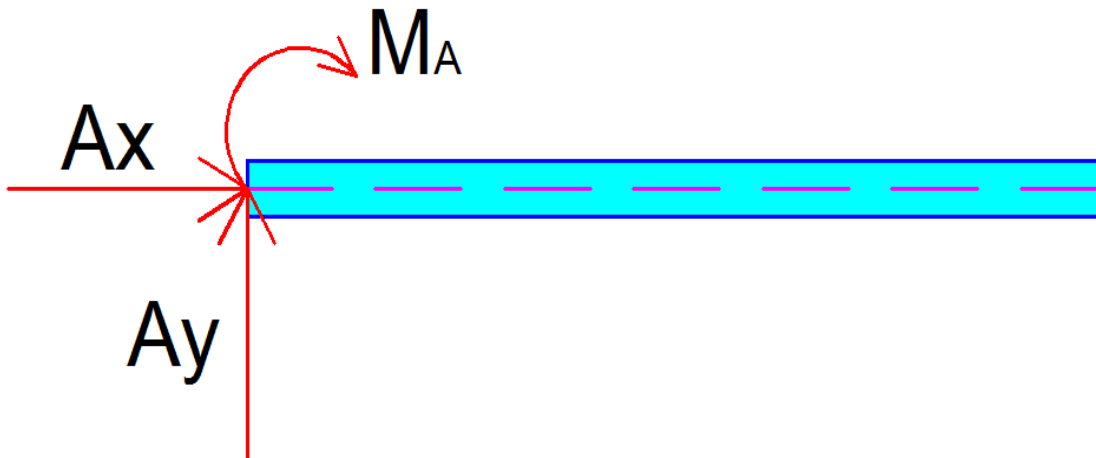
paraqitja skematike e lidhjes

Lidhja e realizuarë me inkastrim

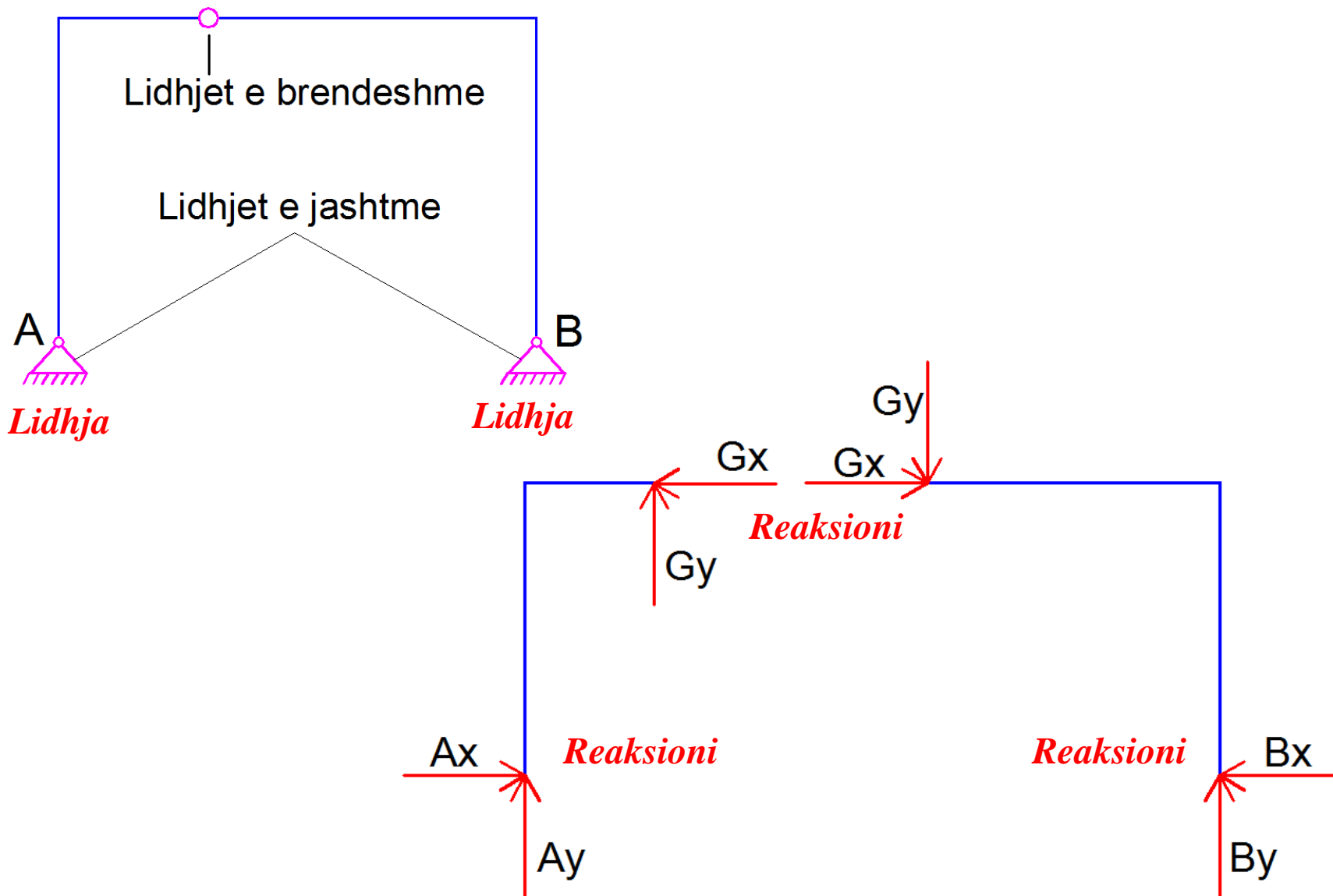
Lidhja



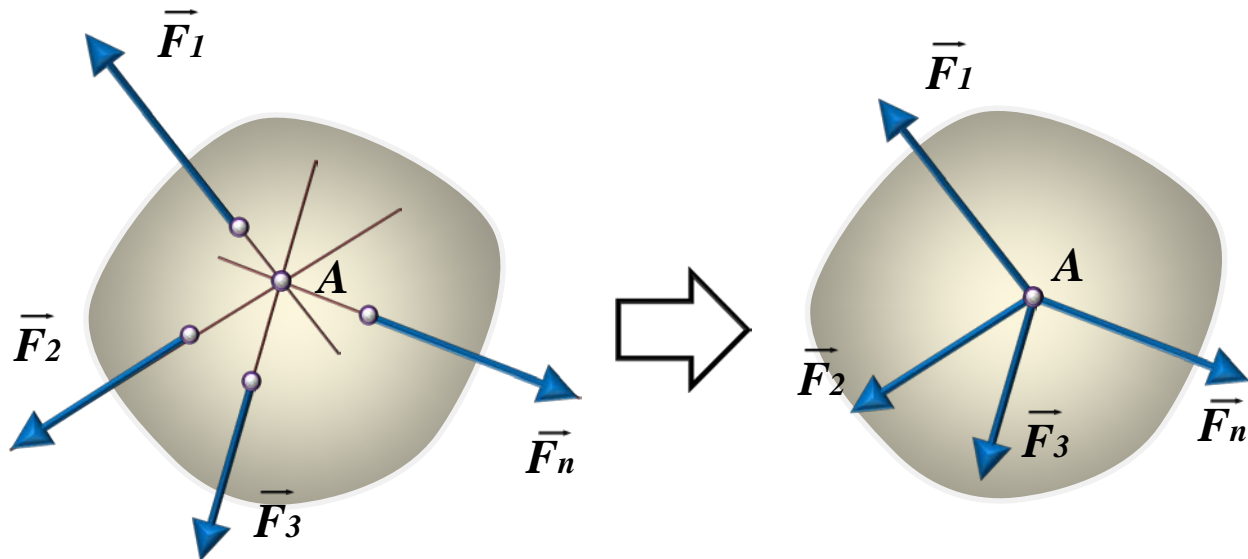
Reaksioni



Lidhja me sharnier



SISTEMI I FORCAVE KONKURENTE



Sistemi i forcave konguente është sistemi i forcave që veprojnë në një pikë ose drejtimet e tyre priten në një pikë.

**PËRBËRJA, SHPËRBËRJA DHE
DHE EKUILIBRI I FORCAVE ME
PIKËVEPRIM TË PËRBASHKËT**

Mënyra gjeometrike e përbërjes së dy forcave

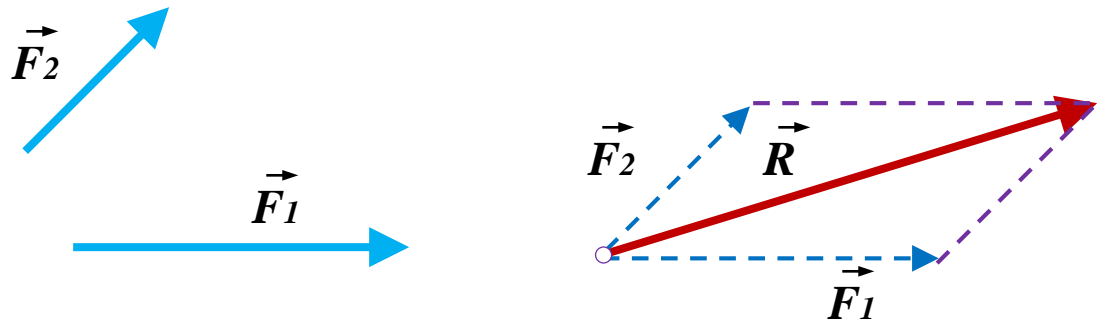
Me kuptimin e përbërjes së dy forcave nënkuptojmë përcaktimin e rezultatës së atyre forcave.

Dy forca kongurente gjeometrikishtë mundë përbëhen në dy forma, me formimin:

- paralelogramin e forcave, ose**
- trekëndëshin e forcave**

Mënyra gjeometrike e pëcaktimit të rezultatës së dy forcave konguente me formimin e paralelogramit të forcave

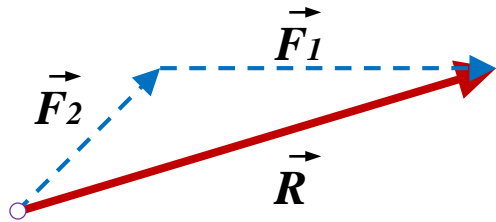
Rezultanta e forcave është e barabartë me diagonalën e paralelogramit të konstruktuar mbi këto forca.



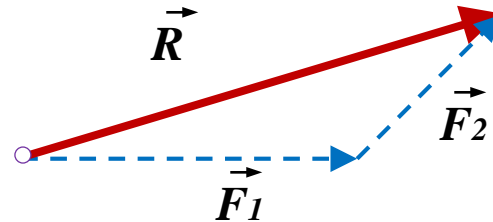
Paralelogrami i Forcave

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Mënyra gjeometrike e pëcaktimit të rezultatës së dy forcave konguente me formimin e trekëndëshit të forcave



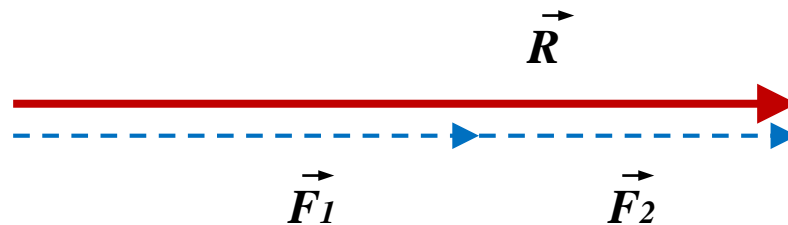
Trekendeshi i Forcave



Trekendeshi i Forcave

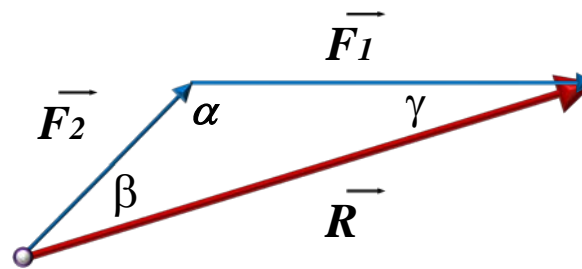
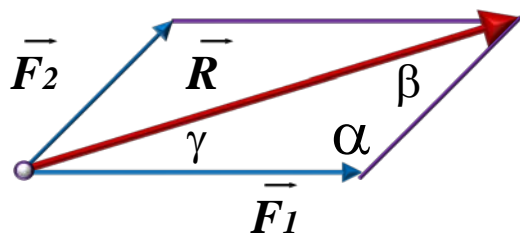
$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Mënyra gjeometrike e pëcaktimit të rezultatës së dy forcave paralele



$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Intenzitetin e rezultatës së dy forcave mundë ta përcaktojmë me teoremën e kosinuset, ndërsa drejtimin e sajë me teoremën e sinusit.



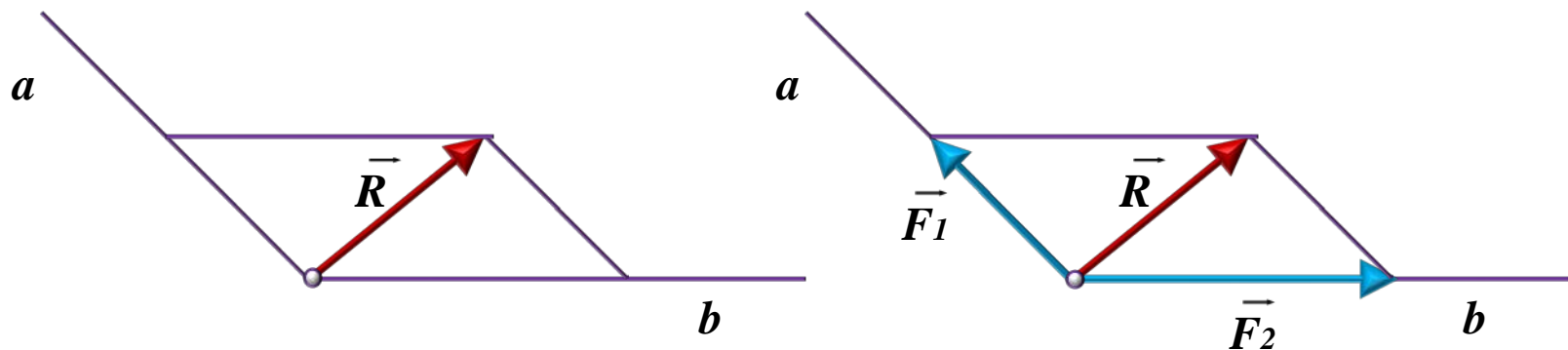
$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha},$$

$$\frac{F_1}{\sin \beta} = \frac{F_2}{\sin \gamma} = \frac{R}{\sin \alpha}$$

Zbërthimi i forcës në dy komponente

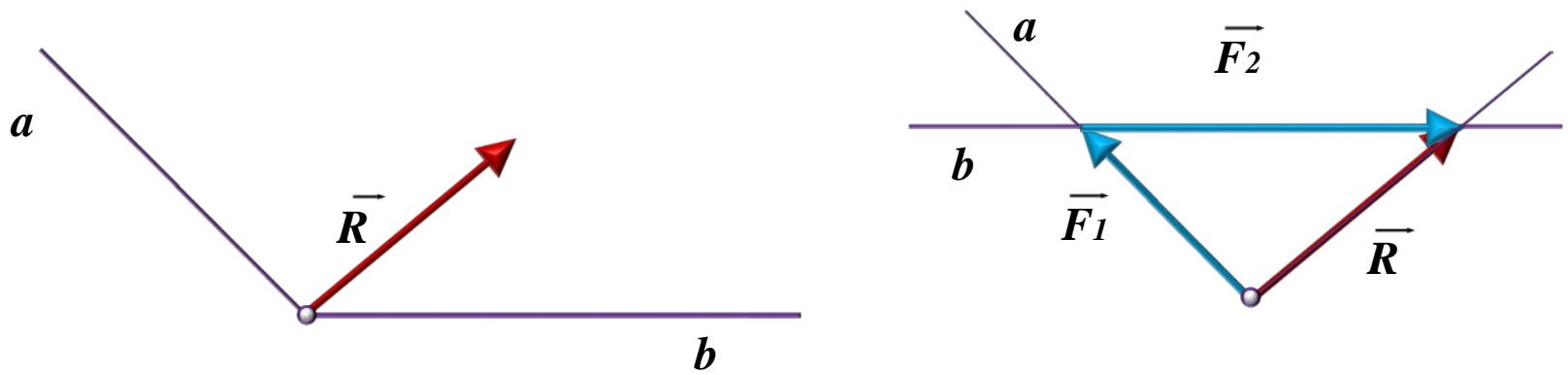
Procesi i kundërt i përbërjes së forcave është zbërthimi i forcës.

Forca mundë të zbërthehet në dy komponente, të cilave u dihet vijëdrejtimi, me rregullën e paralelogramit të forcave.



$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

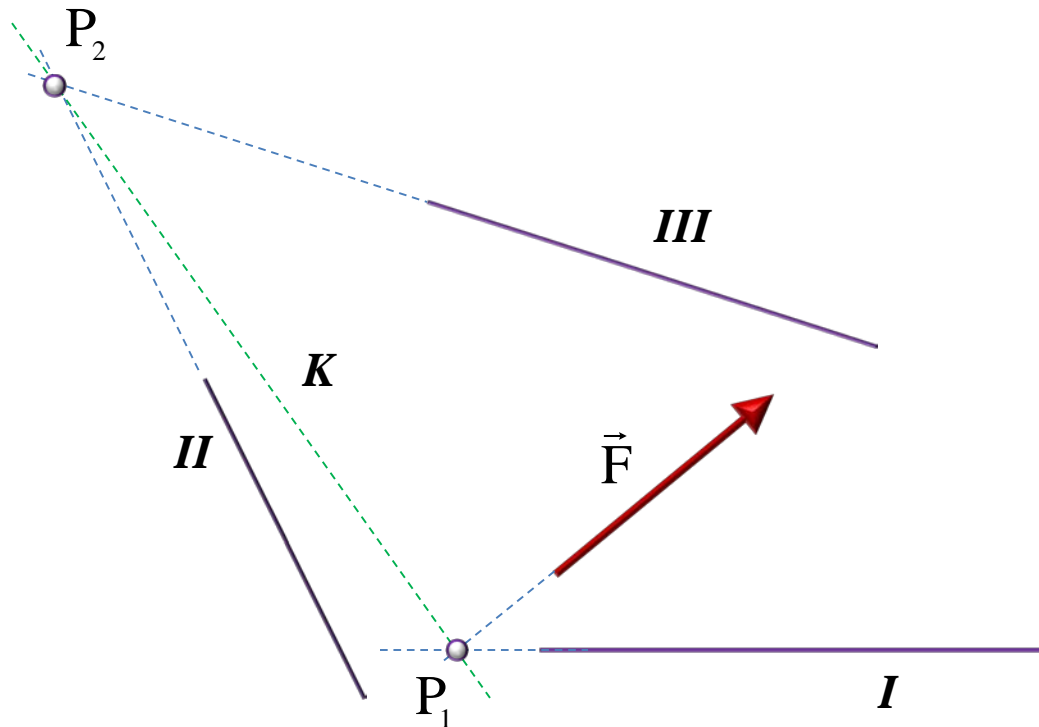
Por forcën mundë ta zbërthejmë në dy komponente edhe me rregullën e trkëndëshit të forcave.



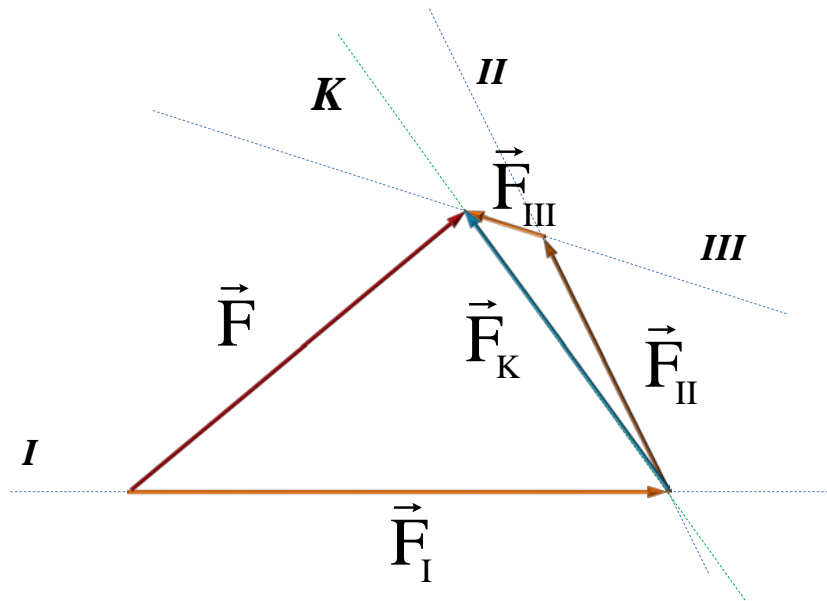
$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Zbërthimi i forcës në tri komponente- Drejtime

Jepet forca F dhe tri drejtimet (I, II, III) ne te cilat deshirojm me e zberthyer forcen. Ku priten vijëdrejtimet e forcës dhe drejtimi I caktohet pika P_1 , më pas ku priten drejtimet II dhe III caktohet pika P_2 . Me bashkimin e pikave P_1 dhe P_2 caktohet drejtëza K .

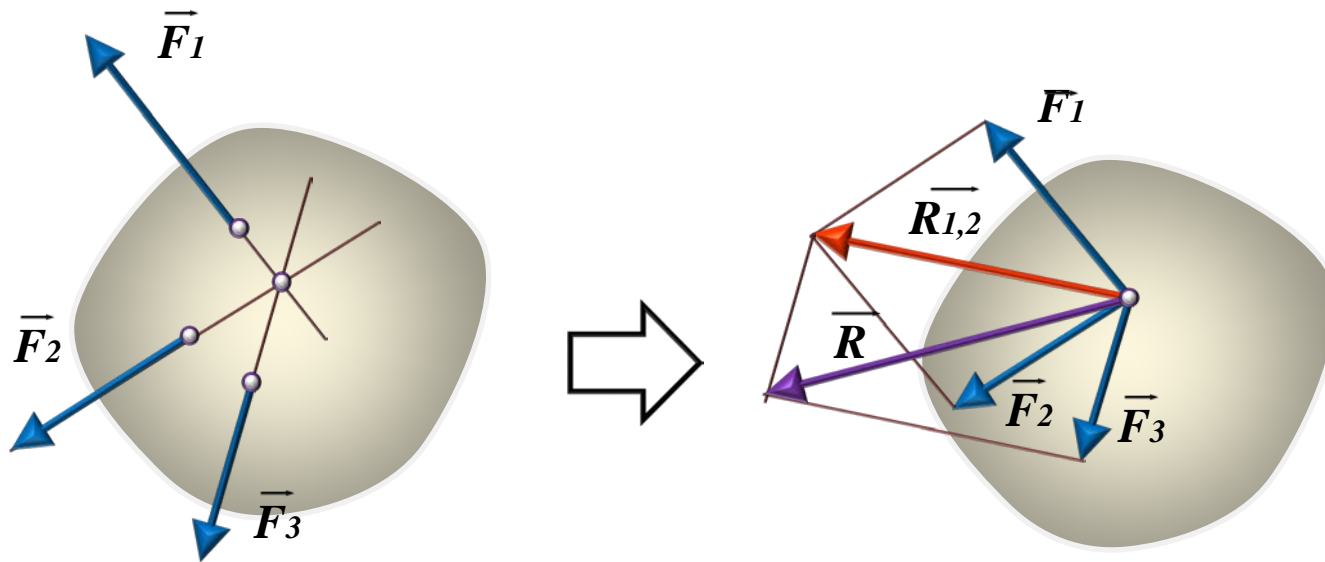


Fillimisht zberthehet Forca F në forcat (drejtimet) F_I dhe F_K , në vazhdim Forca F_K zberthehet në dy drejtimet F_{II} dhe F_{III} dhe kështu forca F është zbërthyer në tri drejtime.

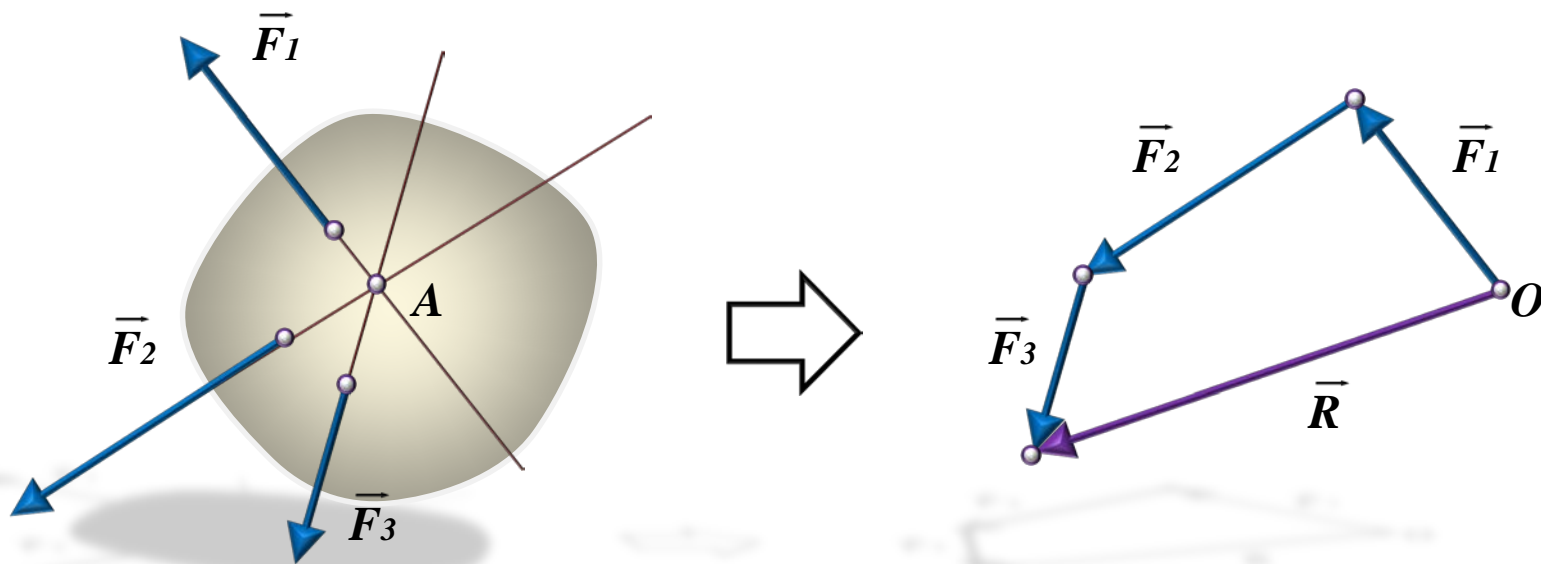


Përbërja e sistemit të forcave kongruente

Përbërjen e sistemit të forcave kongruente mundë ta realizojmë me metodën e paralelogramit. Rezultanta e sistemit të forcave kongruente është e barabartë me shumën gjeometrike të forcave me pikëveprim në pikëprerjen e vijëdrejttimeve të sistemit të forcave.



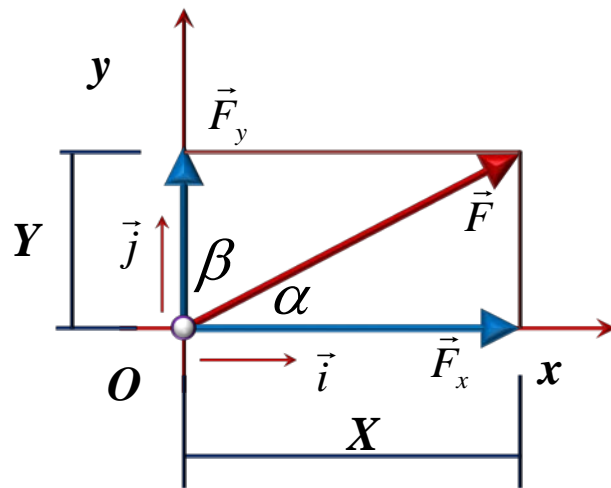
Vektori i cili është i barabartë me shumën e vektorëve të forcave të sistemit quhet vektori kryesorë i atijë sistemi. Vektori kryesorë i sistemit të forcave konguente përcaktohet me rregullën e paralelogramit ose të poligonit të forcave.



Nëse forca (vektori kryesorë) bartët në pikën A të trupit, atëher ajo zëvendëson veprimin e të gjitha forcave në trup, që do të thotë se ajo është rezultanta e forcave që veprojnë në trup.

Mënyra analitike e përbërjes së sistemit të forcave konguente në rrafsh

Që të caktohet rezultanta e sistemit të forcave, më e përshtatëshme është që paraprakisht të përcaktohen projeksionet e tyre në akse, të mlidhën ato projeksione dhe pastaj të caktohet rezultanta e atyre forcave.



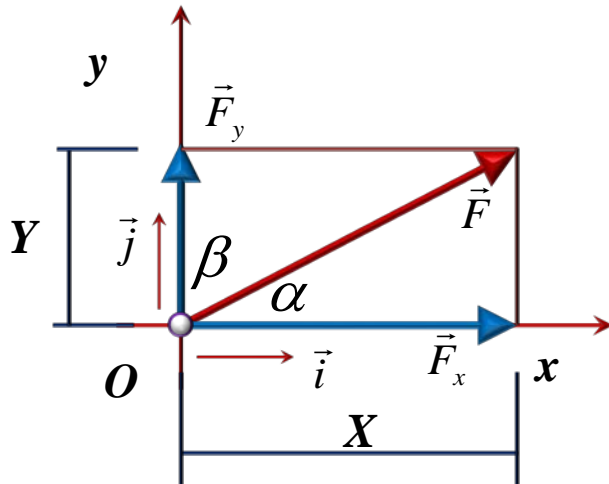
$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y,$$

$$\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j},$$

$$\vec{F}_x = X\vec{i}, \vec{F}_y = Y\vec{j}$$

Projeksioni i forcës në aks dhe rrafsh

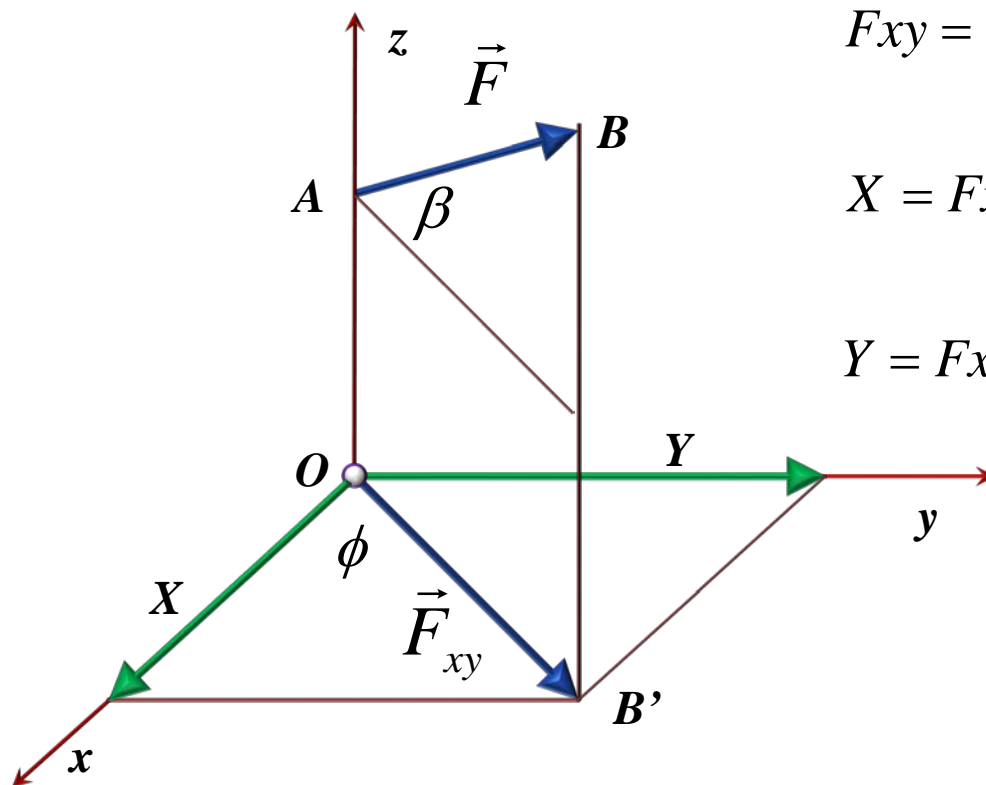
Projeksioni i forcës në aks është madhësi skalare e cila është e barabartë me prodhimin e intenzitetit të forcës dhe kosinuset të këndit mes forcës dhe aksit.



$$X = F_x = F \cdot \cos \alpha = F \cdot \sin \beta$$

$$Y = F_y = F \cdot \sin \alpha = F \cdot \cos \beta$$

*Në dallim nga projektioni i forcës në aks projektioni i forcës në rrafsh është vektor sepse nuk karakterizohet vetëm me intenzitetin e sajë, por edhe me drejtimin dhe kahjen në rrafshin Oxy.
Intenziteti i këtijë projektioni është:*

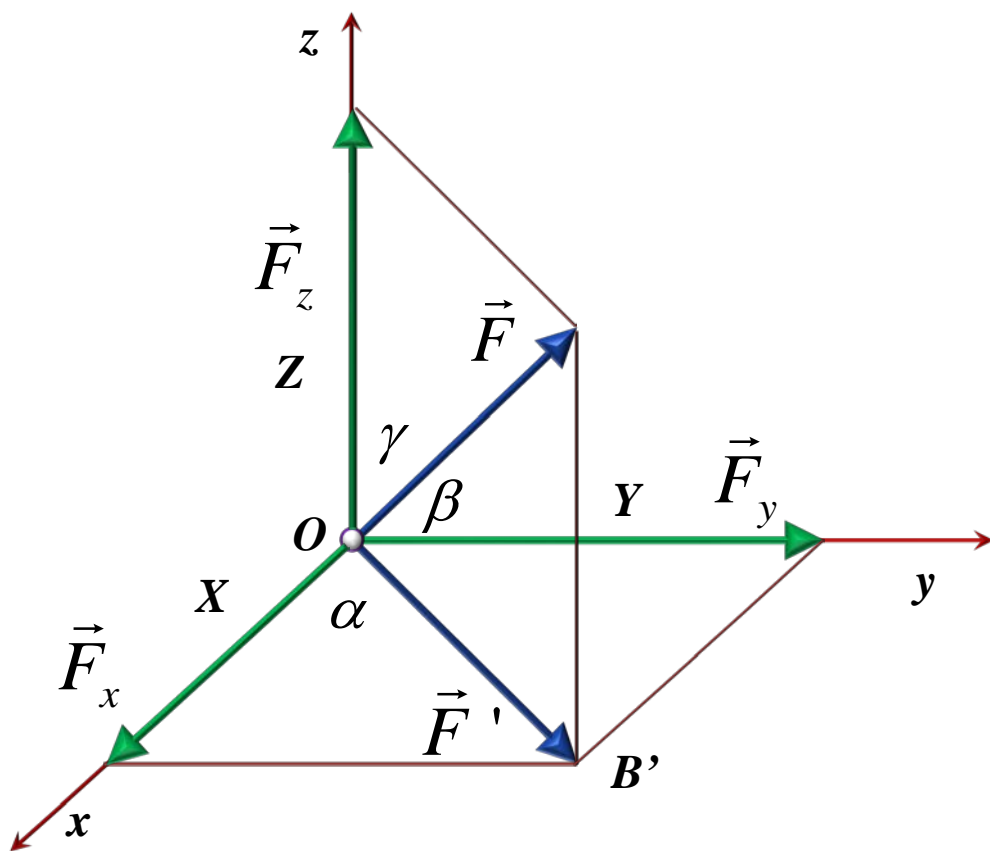


$$F_{xy} = F \cdot \cos \beta$$

$$X = F_{xy} \cdot \cos \phi = F \cdot \cos \beta \cdot \cos \phi$$

$$Y = F_{xy} \cdot \sin \phi = F \cdot \cos \beta \cdot \sin \phi$$

Projeksioni i forcës në hapësirë



$$X = F \cdot \cos \alpha$$

$$Y = F \cdot \cos \beta$$

$$Z = F \cdot \cos \gamma$$

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z$$

$$\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$

$$\vec{F}_x = X\vec{i}, \vec{F}_y = Y\vec{j}, \vec{F}_z = Z\vec{k}$$

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$\cos \alpha = \frac{X}{F}, \cos \beta = \frac{Y}{F}, \cos \gamma = \frac{Z}{F}$$

Mënyra analitike e përbërjes së forcave

$$\vec{R}' = \vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad X_R = \sum_{i=1}^n X_i, \quad Y_R = \sum_{i=1}^n Y_i, \quad Z_R = \sum_{i=1}^n Z_i.$$

Kur janë të njohura projeksionet e rezultantës në akset koordinative atëher intenziteti i vektorit kryesorë, gjegjësishtë rezultantës është:

$$R = \sqrt{X_R^2 + Y_R^2 + Z_R^2}, \quad \cos \alpha_R = \frac{X_R}{R}, \quad \cos \beta_R = \frac{Y_R}{R}, \quad \cos \gamma_R = \frac{Z_R}{R}$$

Këto formula mundësojnë zgjidhjen e problemit të përbërjes së forcave në mënyrë analitike.

Kur forcat shtrihen në rrafsh atëher këto formula marrin formën:

$$R = \sqrt{X_R^2 + Y_R^2}, \quad \cos \alpha_R = \frac{X_R}{R}, \quad \cos \beta_R = \frac{Y_R}{R}.$$

Ekilibri i sistemit të forcave konguente me pikëveprim të përbashkët

Kushti vektorial i ekilibrit

Sistemi i forcave është në ekilibër në qoftë se rezultanta e tyre është e barabartë me zero.

Që sistemi i forcave konguente të jetë në ekilibër është e nevojshme dhe e mjaftueshme qëpoligoni i forcave, i konstruktuarë nga ato forca, të jetë i mbyllurë.

Kushtet analitike të ekuilibrit

Sistemi i forcave është në ekuilibër në qoftë se rezultanta është

e barabartë me zero. $R = \sqrt{X_R^2 + Y_R^2 + Z_R^2}$

Rzultanta është e barabartë me zero vetëm nëse anëtarët nën rrënje njëkohesishtë janë barazi me zero.

$$X_R = 0, Y_R = 0, Z_R = 0.$$

$$X_R = \sum_{i=1}^n X_i, Y_R = \sum_{i=1}^n Y_i, Z_R = \sum_{i=1}^n Z_i$$

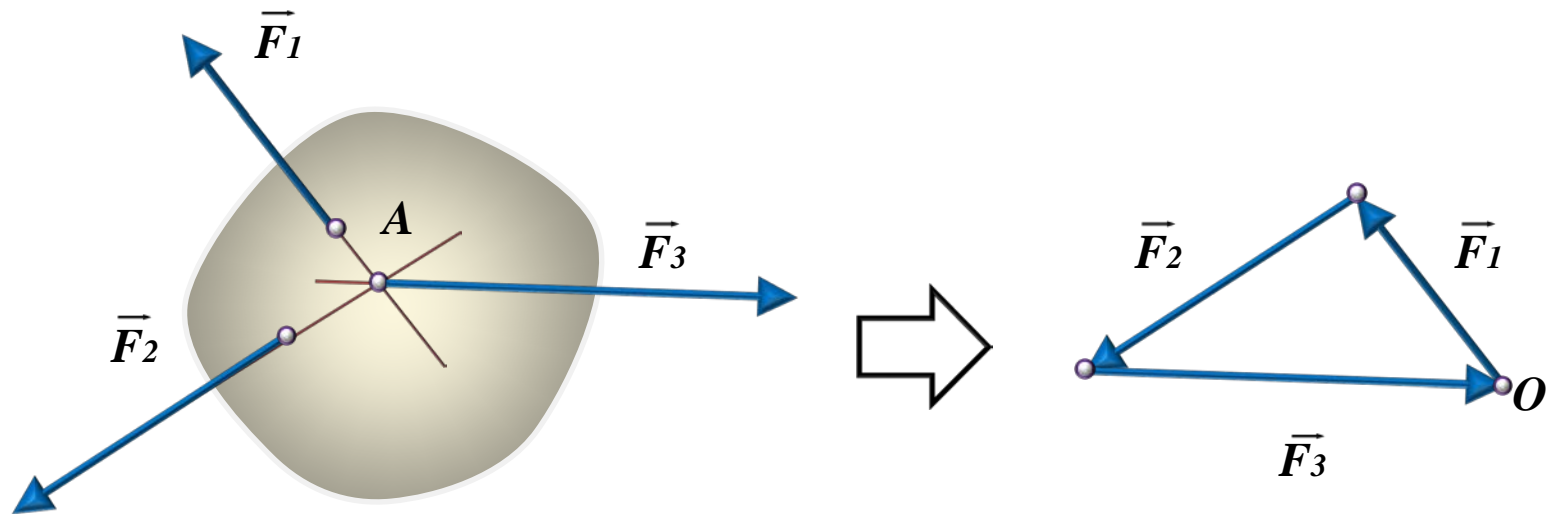
$$\sum_{i=1}^n X_i = 0, \sum_{i=1}^n Y_i = 0, \sum_{i=1}^n Z_i = 0$$

Për sistemin e forcave në rrafsh kemi:

$$X_R = 0, Y_R = 0, X_R = \sum_{i=1}^n X_i, Y_R = \sum_{i=1}^n Y_i,$$

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0, \sum_{i=1}^n Y_i = 0,$$

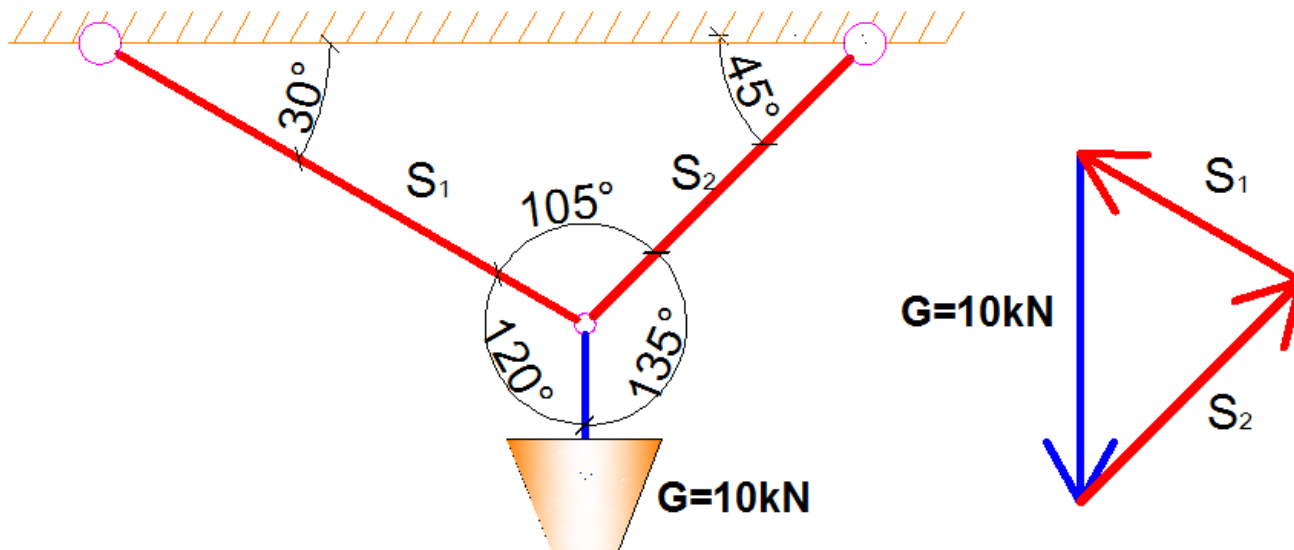
Ekuilibri i tri forcave



$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$$

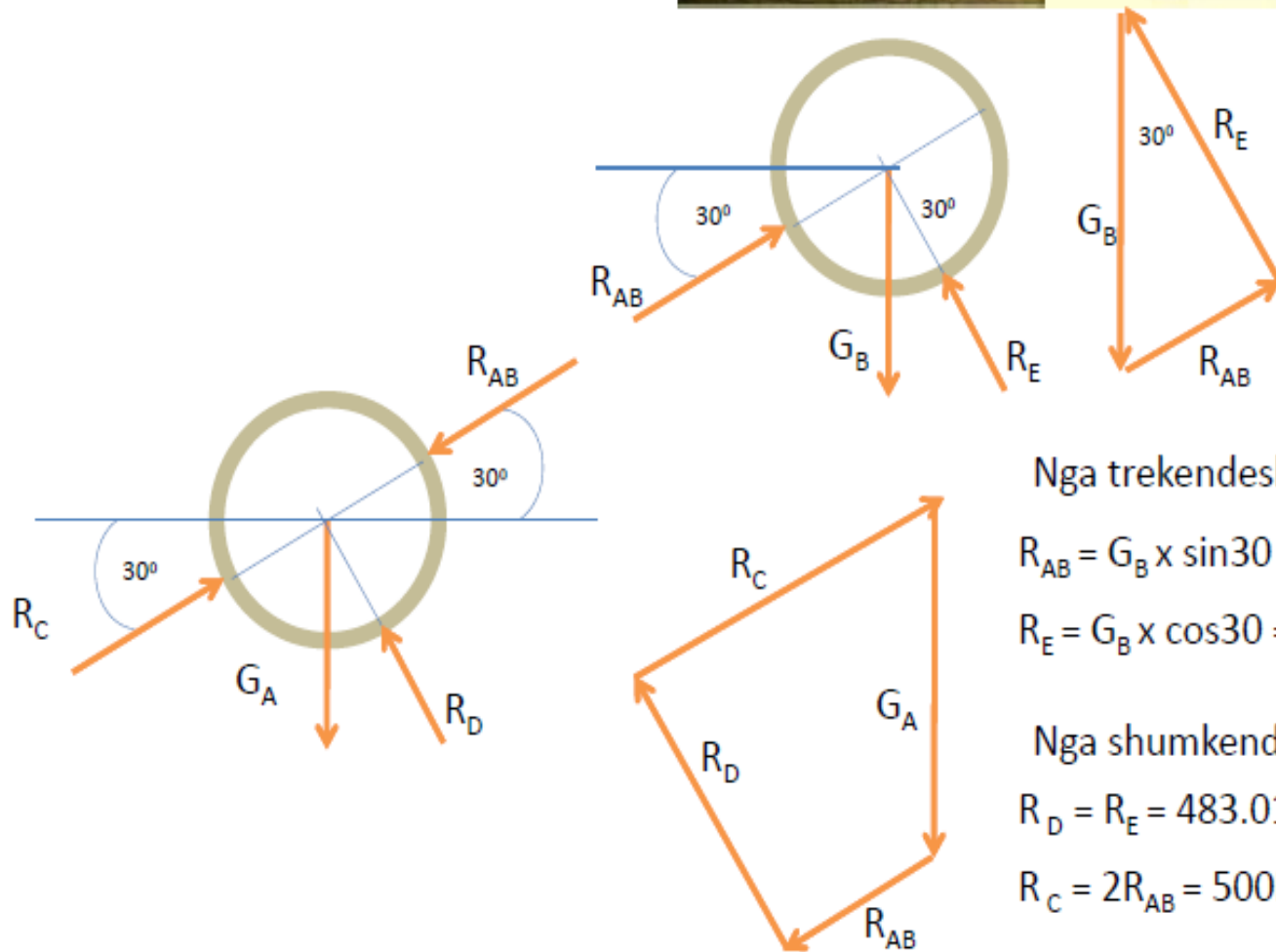
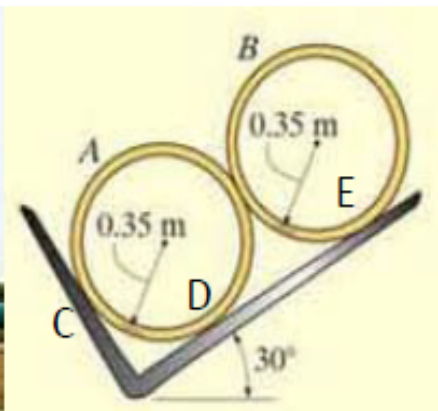
Trupi do të jetë në ekuilibër nga veprimi i tri forcave nese poligoni i konstruktuar nga ato tri forca (trekëndëshi i tyre) do të jetë i mbyllurë.

Shembull 1 - Të caktohën forcat në litarët 1 dhe 2 nese në ta është varurë pesha $G = 10\text{kN}$



$$\frac{G}{\sin 105^\circ} = \frac{S_1}{\sin 135^\circ} = \frac{S_2}{\sin 120^\circ}, \quad S_1 = 7.32\text{kN}, S_2 = 8.97\text{kN}$$

Shembull - Të caktohen ndikimet e gypave të betonit në mes veti dhe në përruner nese pesha e tyre është $G_A = G_B = 500\text{N}$.



Nga trekendeshi i forcave lexojmë

$$R_{AB} = G_B \times \sin 30 = 500 \times 0.5 = 250\text{N}$$

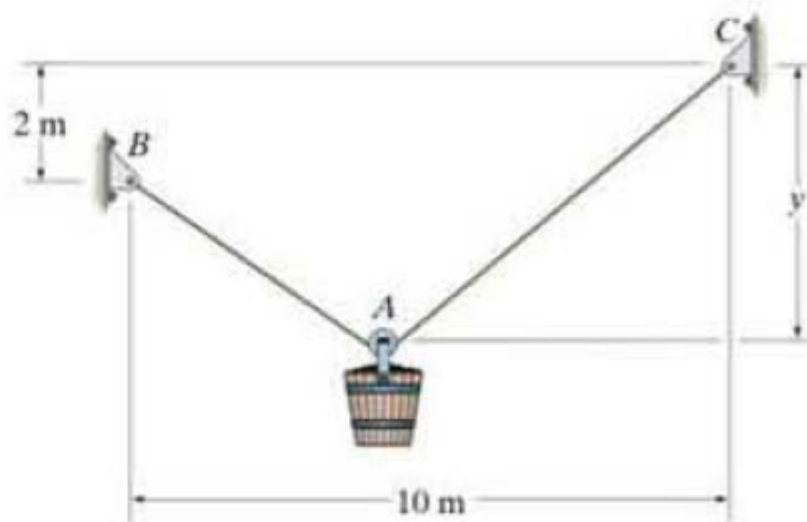
$$R_E = G_B \times \cos 30 = 500 \times 0.866 = 483.01\text{N}$$

Nga shumkendeshi i forcave lexojmë

$$R_D = R_E = 483.01\text{N}$$

$$R_C = 2R_{AB} = 500\text{N}$$

Shëmbull -Të caktohet distanca Y dhe forca në litar Nese gjatësia e litarit është 15m ndërsa kofa me uj ka masën 60kg.



Zgjidhje

$$\sum X=0 \rightarrow S \cos \alpha - S \cos \beta=0 \rightarrow \cos \alpha = \cos \beta \quad \alpha = \beta$$

$$L \cos \alpha + (15-L) S \cos \alpha =10 \rightarrow \cos \alpha = 10/15 \rightarrow \alpha = 48.19$$

$$\sum Y=0 \rightarrow S \sin \alpha + S \sin \alpha = 60 \times 9.81 \rightarrow S = 588.6/2\sin \alpha$$

$$\rightarrow S = 395 \text{ N}$$

$$L \sin \alpha + 2 = (15-L) \sin \alpha \rightarrow L = 6.158\text{m}$$

$$Y = L \sin \alpha + 2 = 6.6\text{m}$$

$$Y = 6.6 \text{ m}$$

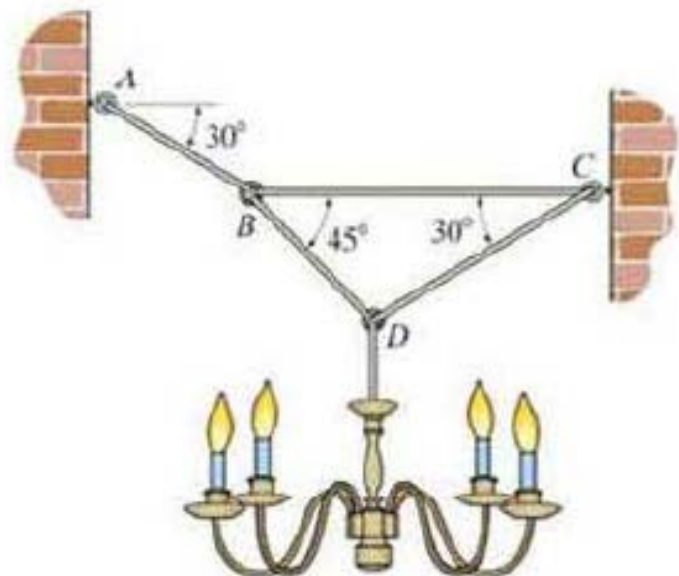
**Shëmbuj -Të caktohen
forcat në litar Nese**

a) Llusteri peshon $G=60\text{ N}$

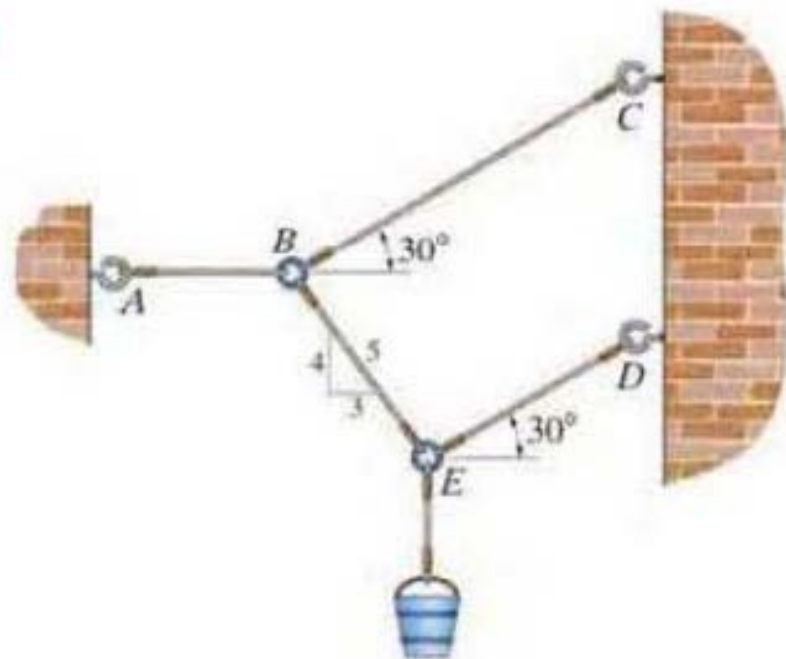
b) Cilindri $D=100\text{ N}$

c) Kofa ka peshen $G=100\text{N}$.

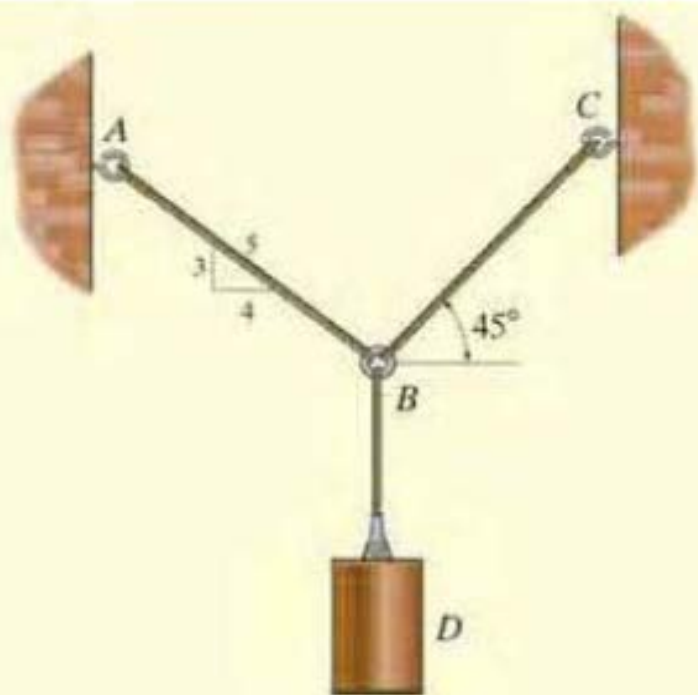
a)



b)



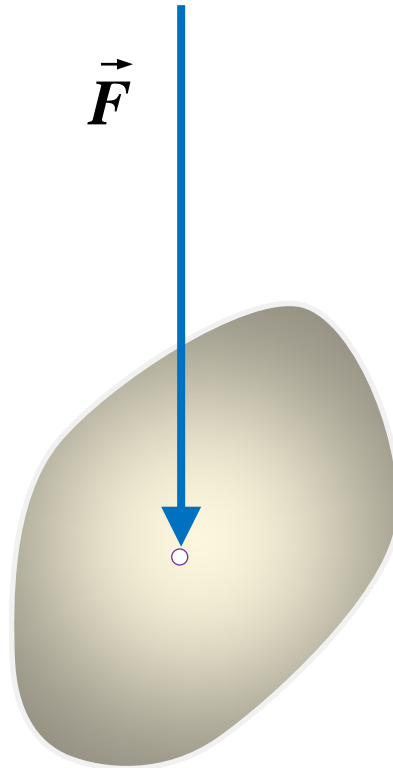
c)



(a)

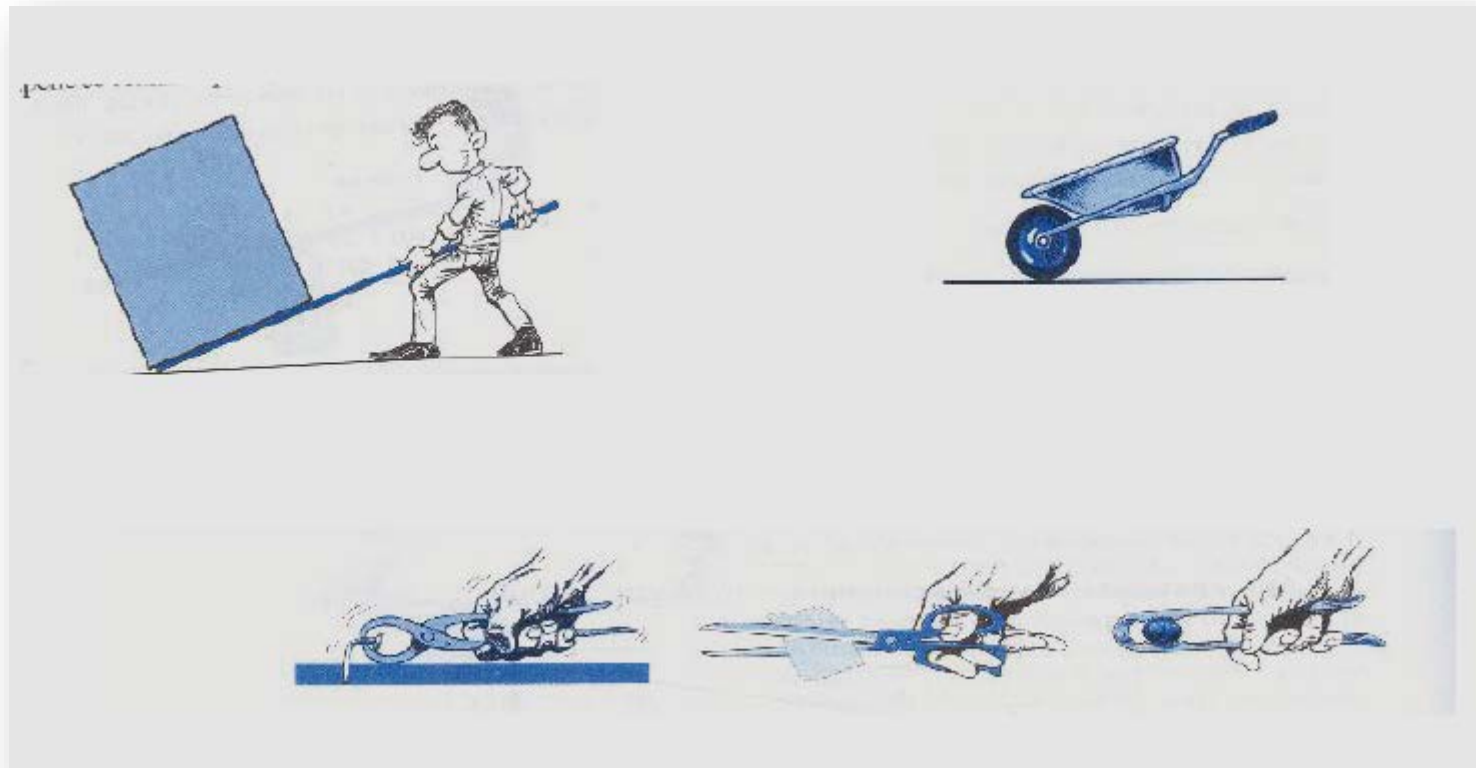
SISTEMET E PËRGJITHSHME TË FORCAVE DHE QIFTËVE TË FORCAVE

Forca shkaktton levizjen e trupit

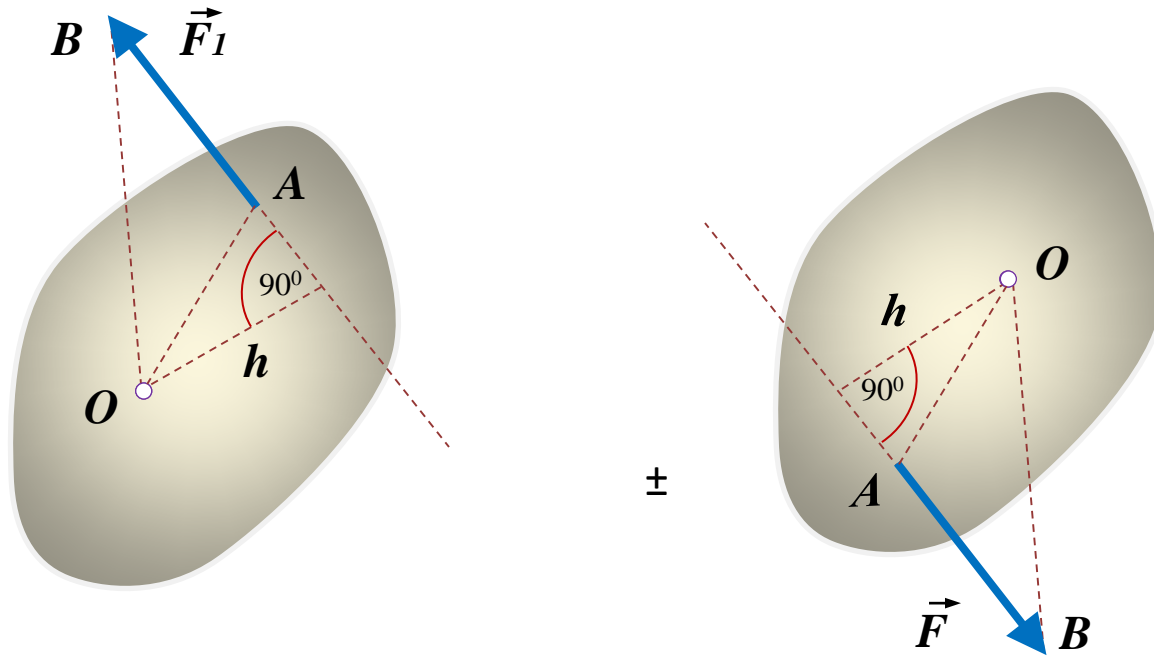


MOMENTI I FORCËS PËR PIKËN

Lëvizja e trupit shkakton momentin e forcës



Momenti i forcës për pikën është madhësia me të cilën forca shkakton rrotullimin e trupit rreth pikës apo aksit.



Normalja h e tërhequr nga pika O normal në vijëdrejtimin e forcës quhet krahu i forcës.

Momenti i forcës për pikën është i barabartë me prodhimin e forcës dhe krahut.

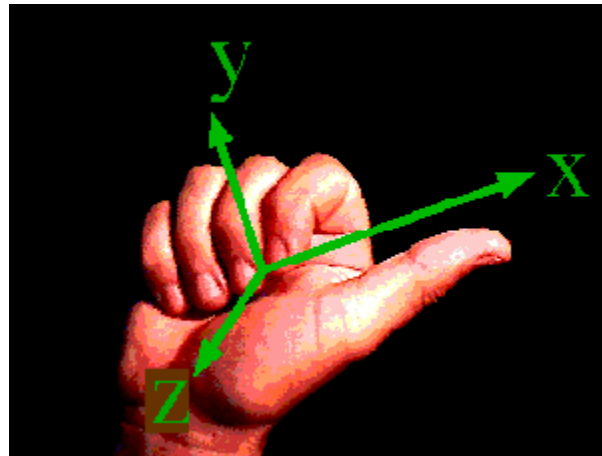
$$M_o(\vec{F}) = \pm \vec{F} \times h$$

Si caktohet Momenti i forcës për pikën?

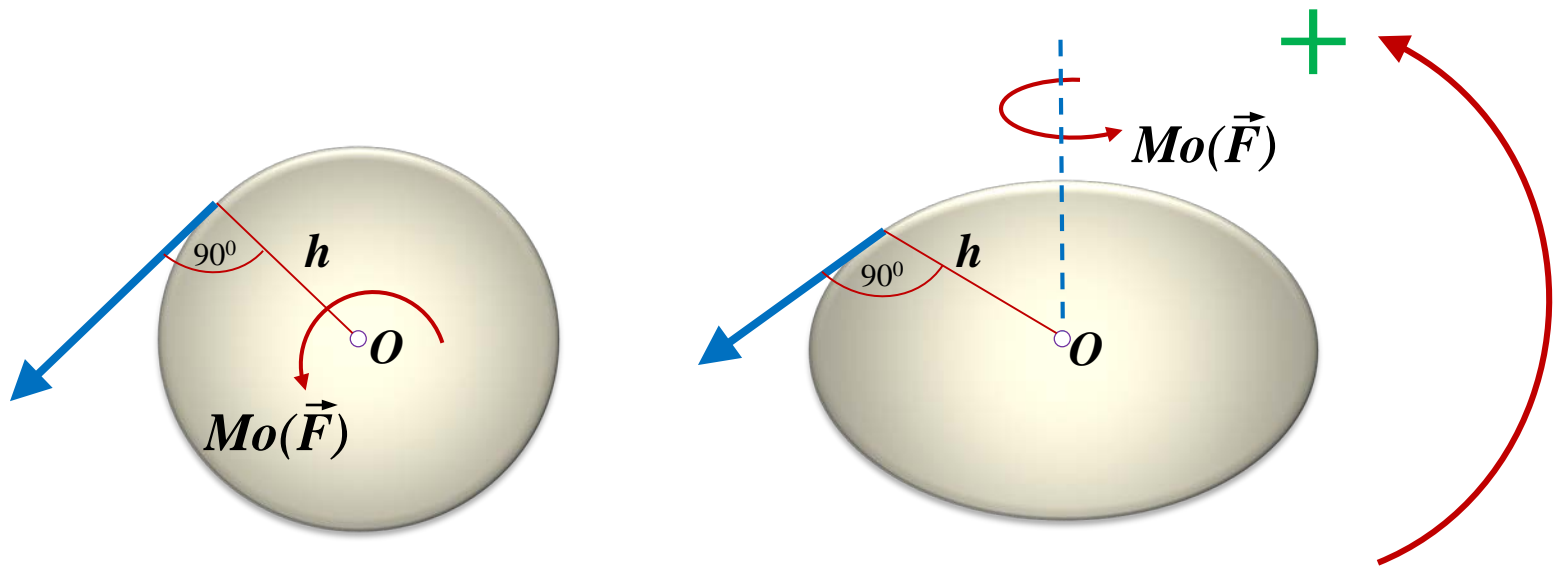
Momenti i forcës varët nga intensiteti i forcës dhe gjatësia e krahut të forcës.

Drejtimi momentit të forcës varët nga pozita e forcës.

Drejtimi mundë të caktohet me rregullën e gishtit të madh të dorës së djathtë.



Momenti ka shënjen *plus* nese shkakton rrotullimin e trupit në kahje të kundërt të akrepave të orës, ndërsa shënjen *minus* e merrë nese trupin e rrotullon në drejtim të akrepave të orës.



Karakteristikat e momentit janë:

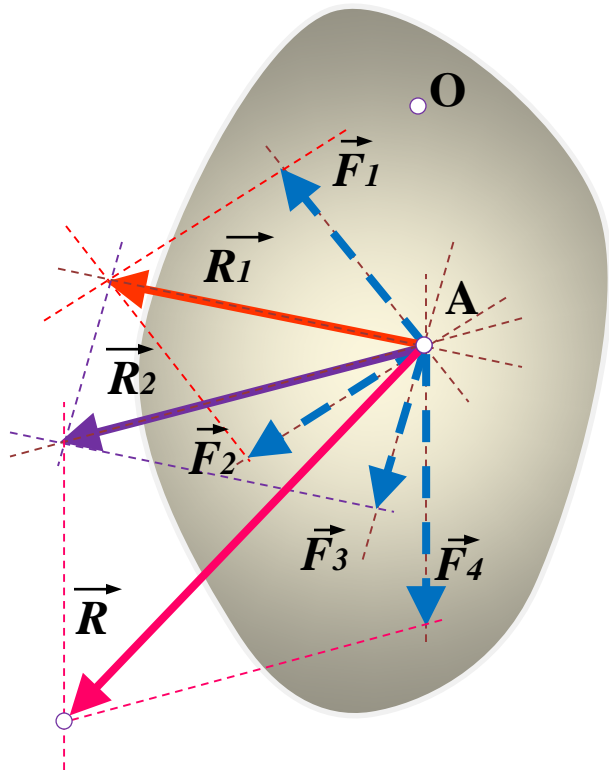
Momenti i forcës nuk ndërron nese forca levizë përgjatë vijëdrejtimit të sajë.

Momenti i forcës për pikën është i barabartë me zero vetëm nese forca është e barabartë me zero, ose nese vijëdrejtimi i sajë kalon nëpër pikë, gjegjësishtë nese krahu i forcës është i barabartë me zero.

Teorema e Varinjonit (Varignon)

Momenti i resultantës së forcave kongurente për çfarëdo pikë është i barabartë me shumën algjebrike të momenteve të komponenteve përë atë pikë.

Teoremen e varinjonit po e ilustrojm duke analizuar momentin e sistemit prej katër forcash kongurente.



$$\text{Mo}(\vec{R}_1) = \text{Mo}(\vec{F}_1) + \text{Mo}(\vec{F}_2) \quad (\text{a})$$

$$\text{Mo}(\vec{R}_2) = \text{Mo}(\vec{R}_1) + \text{Mo}(\vec{F}_3) \quad (\text{b})$$

$$\text{Mo}(\vec{R}) = \text{Mo}(\vec{R}_2) + \text{Mo}(\vec{F}_4) \quad (\text{c})$$

$$\text{Mo}(\vec{R}) = \text{Mo}(\vec{F}_1) + \text{Mo}(\vec{F}_2) + \text{Mo}(\vec{F}_3) + \text{Mo}(\vec{F}_4)$$

$$\text{Mo}(\vec{R}) = \sum \text{Mo}(\vec{F}_i)$$

Kur sistemi i forcave vijëveprimet e të cilave pritën në një pikë është në

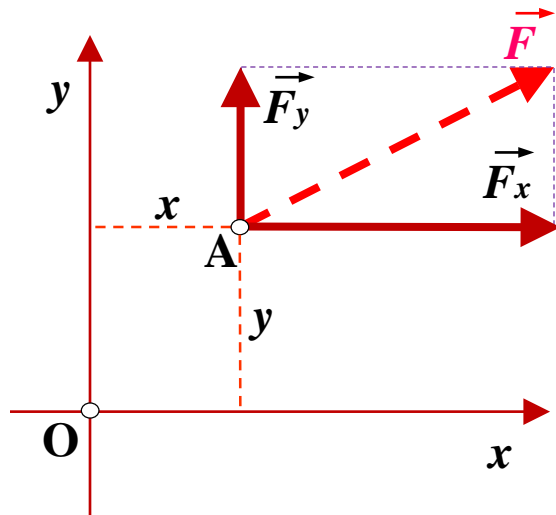
ekuilibër $(\vec{R} = \sum \vec{F}_i = 0)$

momenti i sistemit të forcave është i barabartë me zero për çfarëdo pikë.

Kur sistemi i forcave nuk është në ekuilibër momenti është i barabartë me zero për të gjitha pikat të cilat shtrihen në vijëdrejtimin e rezultatës.

$$(\vec{R} = \sum \vec{F}_i \neq 0)$$

Përcaktimi analitik i momentit të forcës për pikën



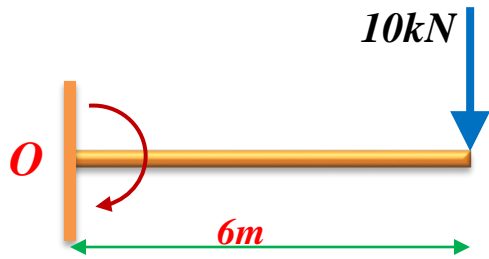
$$M_0(\vec{F}) = M_0(\vec{F}_x) + M_0(\vec{F}_y)$$

$$M_0(\vec{F}_x) = -X \cdot y,$$

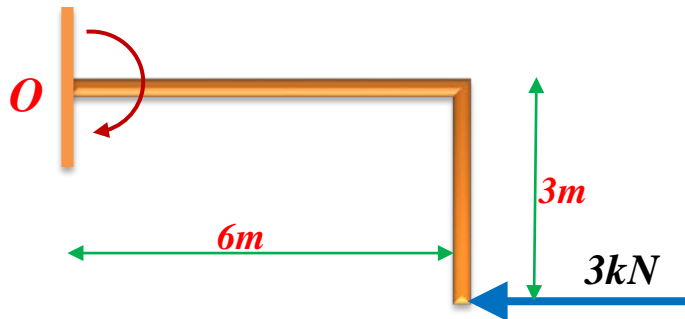
$$M_0(\vec{F}_y) = Y \cdot x.$$

$$M_0(\vec{F}) = Y \cdot x - X \cdot y$$

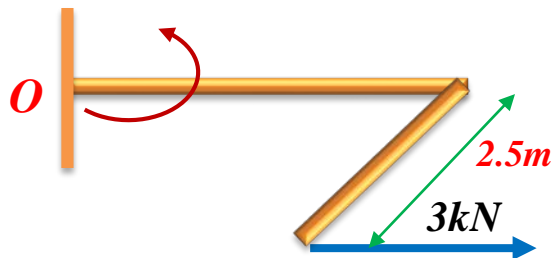
Shmbuj të momentit të forcës për pikën:



$$M_0(\vec{F}) = -10 \times 6 = -60 \text{ kNm}$$



$$M_0(\vec{F}) = -3 \times 3 = -9 \text{ kNm}$$



$$M_0(\vec{F}) = 3 \times 2.5 = 7.5 \text{ kNm}$$

**SISTEMI I FORCAVE PARALELE
DHE QIFTEVE NË RRAFESH**

Përbërja e dy forcave paralele me kahje të njëjta

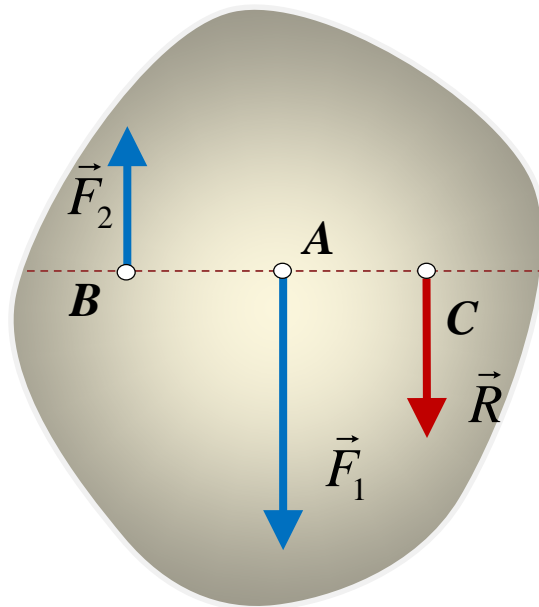
Rezultanta e dy forcave paralele me kahje të njëjta është paralele me ato forca, intenziteti i sajë është i barabartë me shumën e intenziteteve të forcave, ndërsa kahja është e njëjtë si kahja e atyre forcave.



$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$R = F_1 + F_2$$

Përbërja e dy forcave paralele me kahje të kundërta



$$R = F_1 - F_2$$

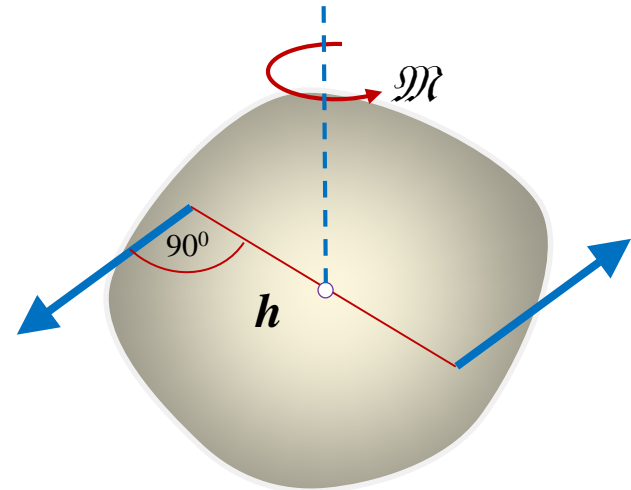
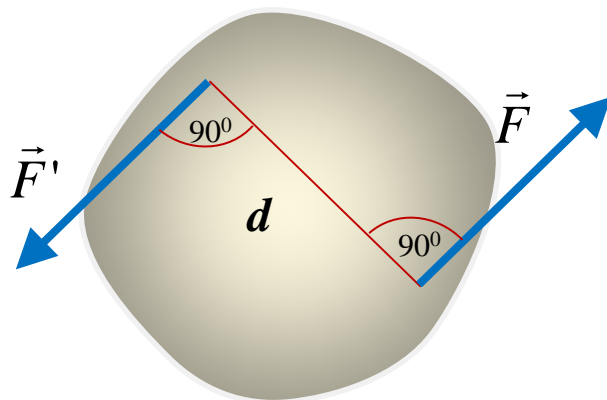
$$\frac{\overline{BC}}{F_1} = \frac{\overline{AC}}{F_2} = \frac{\overline{AB}}{R}$$

Rezultanta e dy forcave paralele me kahje të kundërta është e barabartë me ndryshimin e intenziteteve të tyre, është paralele me to dhe ka kahjën e njëjtë me kahjen e forcës me intenzitet më të madh.

Qifti i forcave

Qifti i forcave është një sistem prej dy forcave paralele me intenzitet të njëjtë, por me kahje të kundërt, të cilat veprojnë në trupin e ngurtë.

Sistemi forcave që formon qift, natyrisht se nuk gjëndët në ekuilibër. Qifti i forcave nuk ka rezultatë.



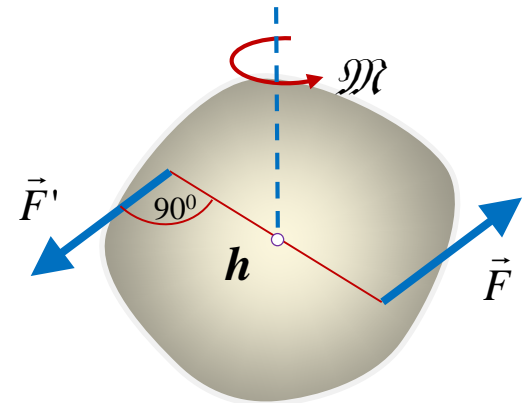
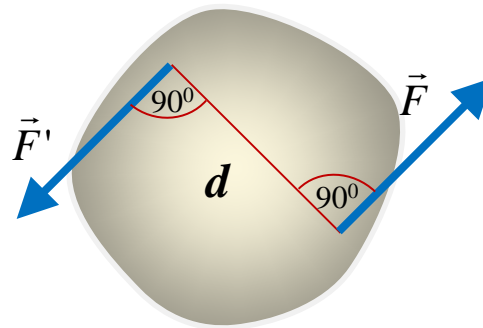
Momenti i qiftit të forcave

\mathcal{M} Momenti i qiftit të forcave

F Forca e qiftit

d Krahu i forcave të qiftit

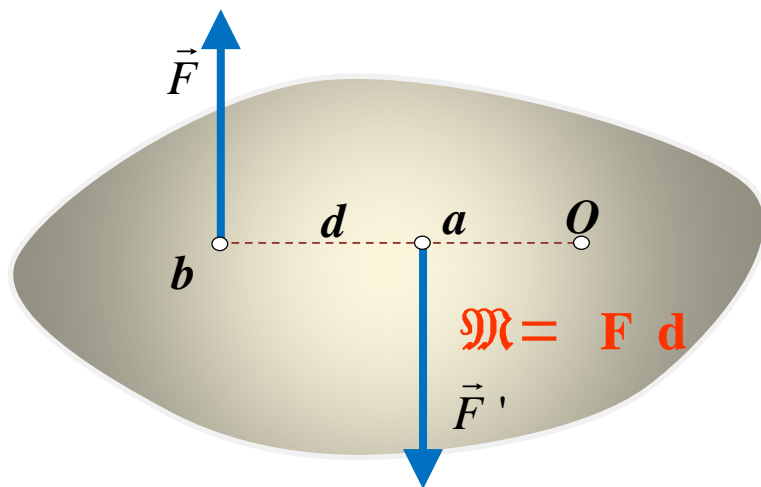
$$\mathcal{M} = \pm F d$$



Momenti i qiftit të forcave është i barabartë me prodhimin e njërës forcë F me krahun d .

Teorema e mbledhjes së momentëve të qiftit të forcave

Shuma algjebrike e momenteve të sëcilës nga forcat e qiftit, për qfarëdo pikë, nuk varët nga zgjedhja e asajë pike dhe është e barabartë me momentin e qiftit të atyre forcave.



$$Mo(\vec{F}) = -F \cdot \overline{oa},$$

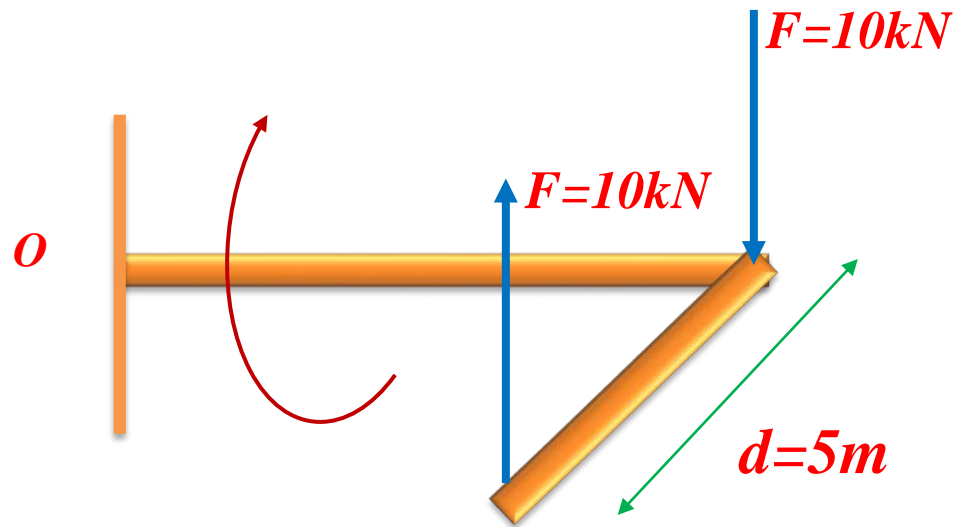
$$Mo(\vec{F}') = F \cdot \overline{ob},$$

$$\overline{ob} - \overline{oa} = d, F' = F.$$

$$Mo(\vec{F}) + Mo(\vec{F}') = -F \cdot \overline{oa} + F \cdot \overline{ob} = F(\overline{ob} - \overline{oa}) = F \cdot d,$$

$$\mathfrak{M} = F d \quad \mathfrak{M} = Mo(\vec{F}) + Mo(\vec{F}')$$

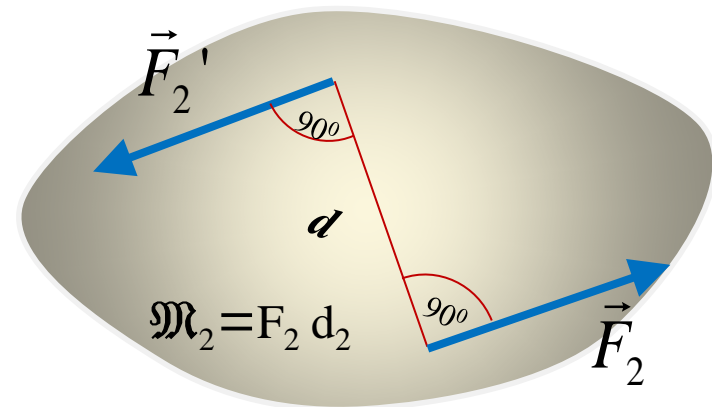
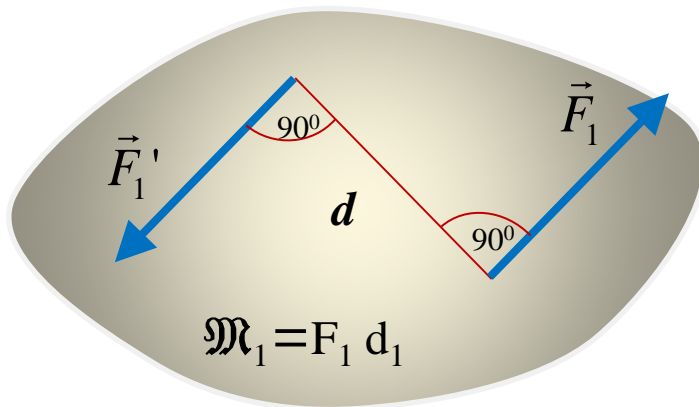
Shmbull i qiftit të forcave:



$$\mathbf{M} = F d = 10 \times 5 = 50 \text{ kNm}$$

Ekivalentiteti i qifteve të forcave

Ndikimi i qiftit në trup nuk ndryshon nëqoftë se e zëvendësojmë me qift tjetër, i cili shtrihët në rrafshin e njëjtë dhe ka moment të njëjtë.



$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2$$

Përbërja e qifteve të cilët veprojnë në një rrafsh

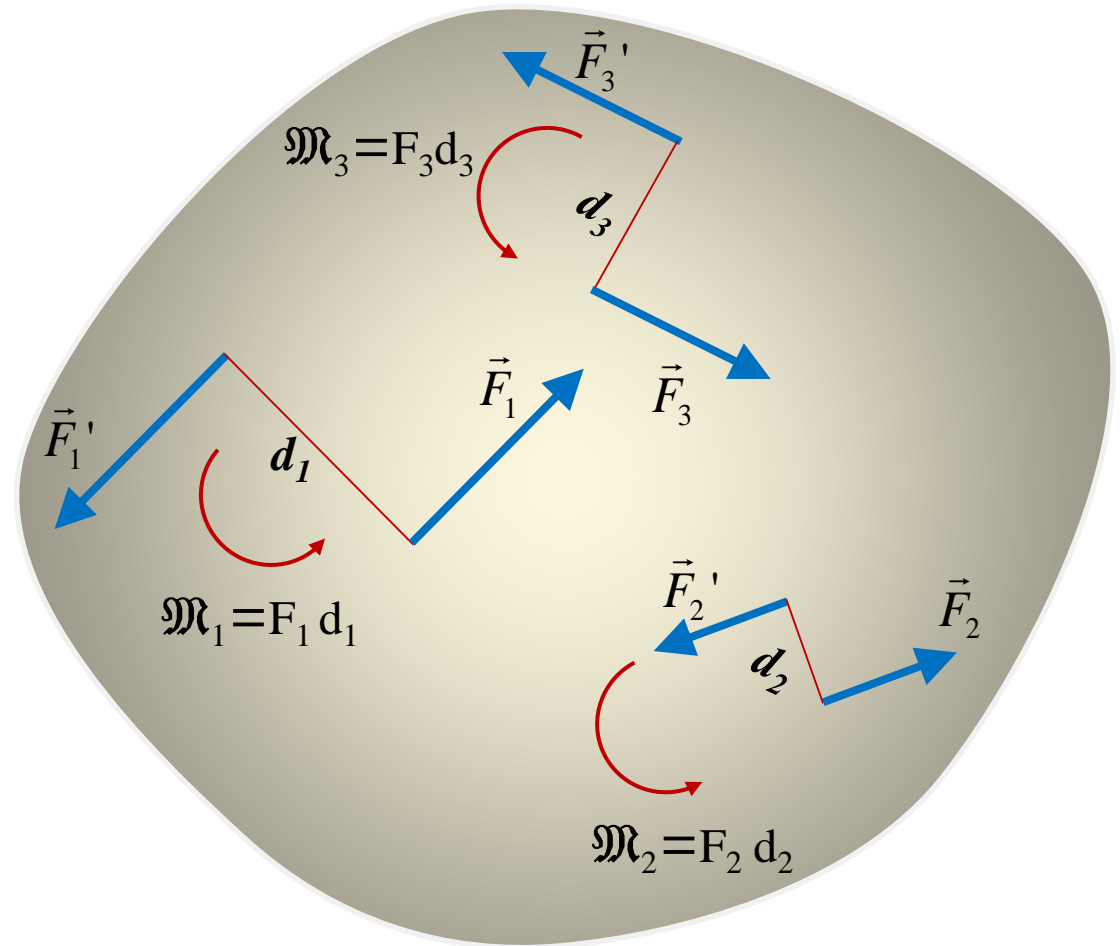
Sistemi i qifteve të cilët veprojnë në rrafshin e njëjtë, mundë të zëvendësohen me një qift, i cili vepron në atë rrafsh, momenti i të cilit është i barabartë me shumën algjebrike të komponentëve të qifteve.

$$\mathfrak{M} = \sum \mathfrak{M}_i$$

$$\mathfrak{M}_1 = F_1 d_1$$

$$\mathfrak{M}_2 = F_2 d_2$$

$$\mathfrak{M}_3 = F_3 d_3$$



$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_3 + \dots \quad \mathfrak{M}_n = \sum \mathfrak{M}_i$$

Ekilibri i qifteve

Që trupi të jetë në ekuilibër nga ndikimi sistemit të qifteve në rrafsh nevojitet që qifti rezultues të jetë i barabartë me zero, kjo do të thotë që shuma algjebrike e momenteve të qifteve të jetë i barabartë me zero:

$$\mathfrak{M} = \sum \mathfrak{M}_i = 0$$

SISTEMI I FORCAVE NË RRAFSH

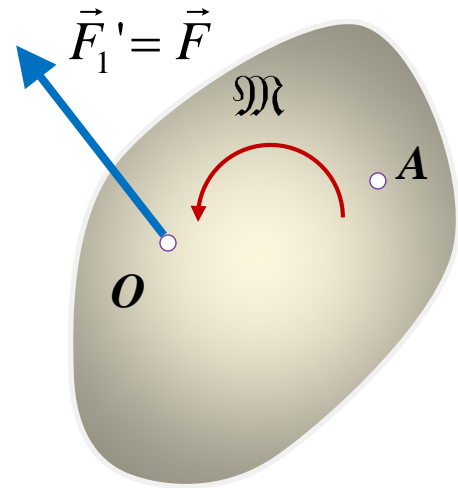
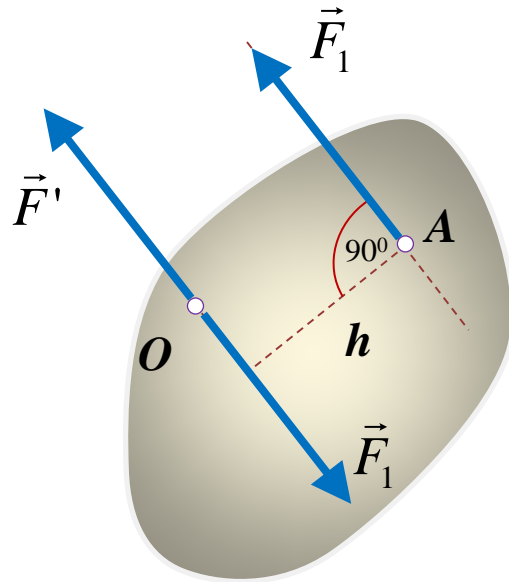
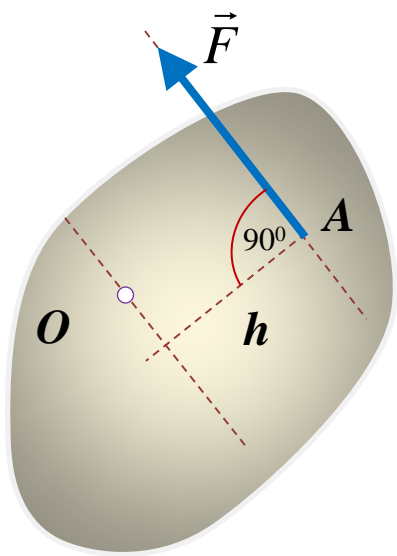
REDUKIMI I SISTEMIT TË FORCAVE NË RRAFSH NË NJË PIKË

**SJELLJA E SISTEMIT TË FORCAVE REDUKIMI I
SISTEMIT TË FORCAVE NË RRAFSH NË NJË PIKË
NË FORMË TË THJESTË**

Redukimi i forcës në pikë

Teoremë:

Forca mundë të ç'vëndoset (redukohet) paralel me të në qfaredo pikë jashtë vijëdrejtimit të sajë, nese forcës i shtohët qifti, momenti i të cilit është i barabartë me momentin e asajë force ndaj pikës në të cilën ç'vëndoset (redukohet) forca.



$$(\vec{F}_1, \vec{F}') = 0$$

$$\vec{F}' = \vec{F}, \vec{F}_1 = -\vec{F}$$

$$\mathcal{M} = F h$$

$$M_0(\vec{F}) = F h$$

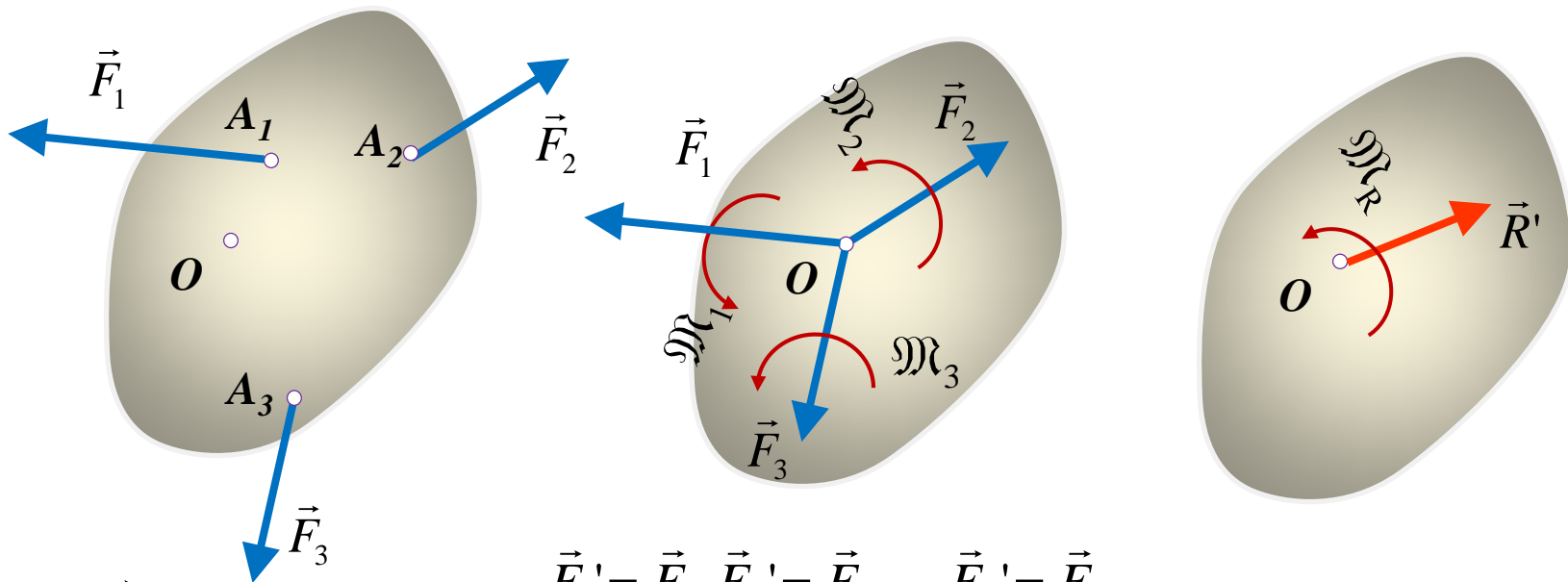


$$\mathcal{M} = M_0(\vec{F})$$

Redukimi i sistemit të forcave (që shtrihen në rrafsh) në pikë

Teoremë:

Qdo sistem i forcave në rrafsh mundë të zavëndësohet me një forcë (rezultanta e redukuar), e cila është e barabartë me vektorin kryesor të sistemit të forcave në pikën e redukimit dhe qiftine forcave momenti i të cilit është e barabartë me momentin kryesor të sistemit të forcave për pikën O .



$$\vec{F}'_1 = \vec{F}_1, \vec{F}'_2 = \vec{F}_2, \dots, \vec{F}'_n = \vec{F}_n,$$

$$\mathcal{M}_1 = M_0(\vec{F}_1) \quad \mathcal{M}_2 = M_0(\vec{F}_2) \quad \mathcal{M}_n = M_0(\vec{F}_n)$$

$$R^* = \vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 + \dots + \vec{F}'_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad R^* = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i,$$

$$\mathcal{M}_R = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \dots + \mathcal{M}_n = \sum_{i=1}^n \mathcal{M}_i$$

$$\mathcal{M}_R = M_o(\vec{F}_1) + M_o(\vec{F}_2) + \dots + M_o(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^n M_o(\vec{F}_i)$$

$$\vec{R}' = \vec{R}^* = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i,$$

$$\mathcal{M}_R = \sum_{i=1}^n M_o(\vec{F}_i) = M_o$$

Shuma vektoriale e të gjitha forcave të sistemit është Vektori kryesor:

$$\vec{R}' = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i,$$

$$\mathcal{M}_R = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \dots + \mathcal{M}_n = \sum_{i=1}^n \mathcal{M}_i$$

$$\vec{R}' = \vec{R}^* = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i,$$

$$\mathcal{M}_R = M_o(\vec{F}_1) + M_o(\vec{F}_2) + \dots + M_o(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^n M_o(\vec{F}_i)$$

Shuma vektoriale e të gjitha momenteve të forcave të sistemit për pikën O quhet momenti kryesor i sistemit të forcave për pikën O.

$$M_o = M_o(\vec{F}_1) + M_o(\vec{F}_2) + \dots + M_o(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^n M_o(\vec{F}_i)$$

$$\mathcal{M}_R = \sum_{i=1}^n M_o(\vec{F}_i) = M_o$$

Sistemi i forcave në rrafsh është zavëndësuar me një forcë (rezultanta e redukuar), e cila është e barabartë me vektorin kryesor të sistemit të forcave në pikën e redukimit dhe qiftine forcave momenti i të cilit është i barabartë me momentin kryesor të sistemit të forcave për pikën O.

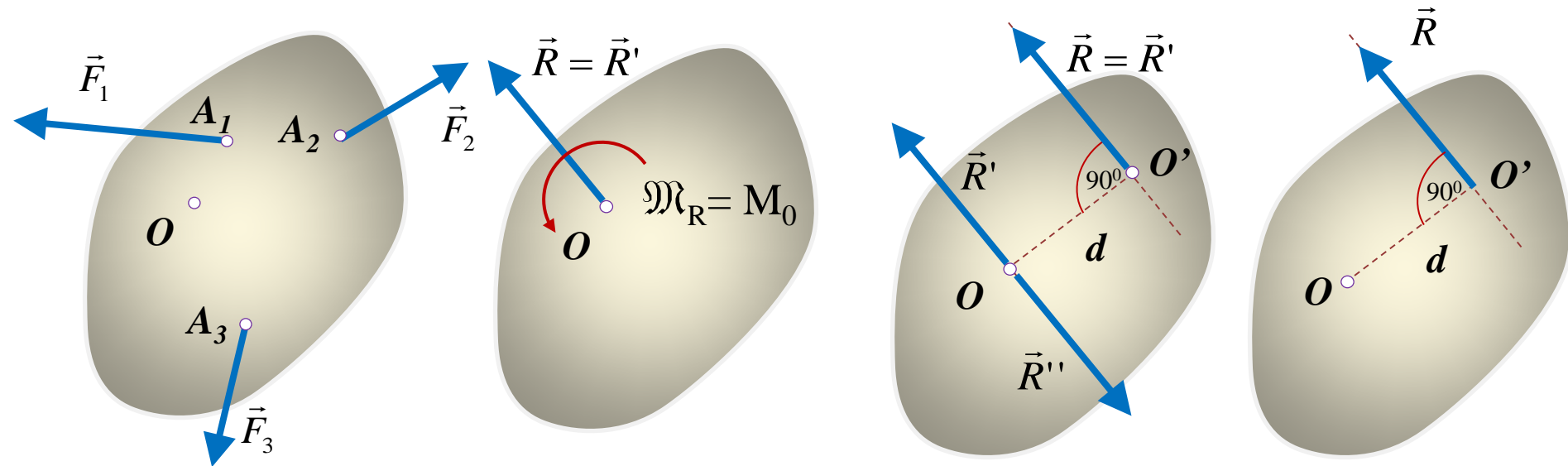
$$R^* = R' = R = \sqrt{X_R^2 + Y_R^2},$$

$$X_R = \sum_{i=1}^n X_i, Y_R = \sum_{i=1}^n Y_i,$$

$$\cos \alpha_R = \frac{X_R}{R}, \cos \beta_R = \frac{Y_R}{R},$$

$$\mathcal{M}_R = \sum_{i=1}^n M_o(\vec{F}_i) = M_o$$

Rezultanta e sistemit të forcave në rrafsh



Qifti i redukuar mundë të zavendësohet me qiftin ekuivalent forcat e të cilit zgjidhën ashtu që me intenzitet të jenë të njëjta me vektorin kryesor. Në këtë rast, krahun e qiftit d mund ta caktojmë me shprehjen:

$$\mathcal{M}_R = \sum_{i=1}^n M_o(\vec{F}_i) = M_o = M_o(\vec{R}) = R \cdot d \quad d = \frac{M_o}{R}$$

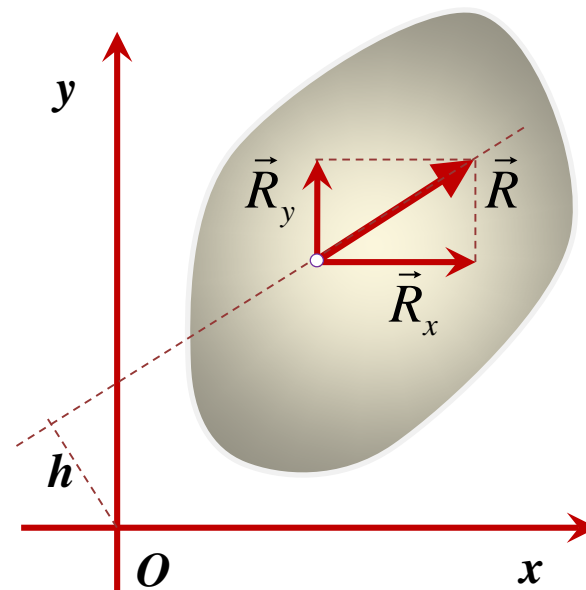
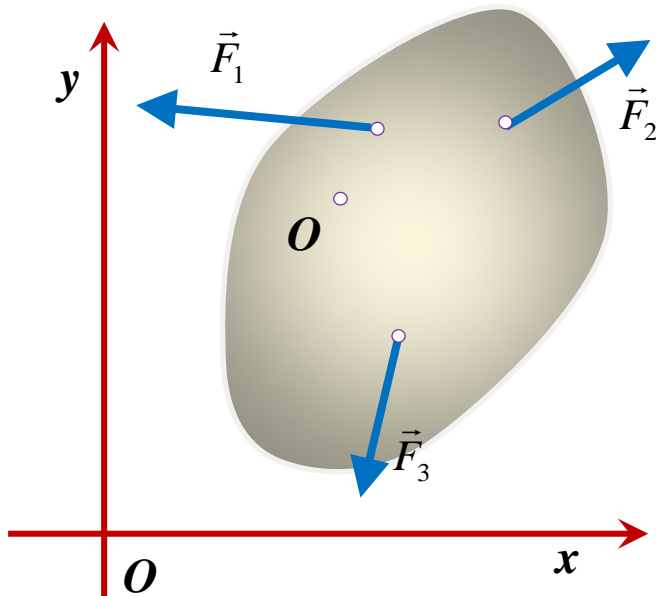
Rezultanta e sistemit të forcave në rrafsh

Ekuacionin e vijëdrejtimit të resultantës e caktojmë me aplikimin e teoremës së Varinjonit:

$$M_o(\vec{R}) = \sum_{i=1}^n M_o(\vec{F}_i)$$

$$M_o(\vec{R}) = M_o(\vec{R}_x) + M_o(\vec{R}_y) = x \cdot Y_R - y \cdot X_R \quad X_R = \sum_{i=1}^n X_i, Y_R = \sum_{i=1}^n Y_i,$$

$$x \cdot Y_R - y \cdot X_R = \sum_{i=1}^n M_o(\vec{F}_i) = M_o$$
 Ekuacioni i vijëdrejtimit të resultantës R



Kushtet e ekuilibrit të sistemit të forcave në rrafsh

Që sistemi i forcave që shtrihën në rrafsh të jetë në ekuilibër është e nevojshme që vektori kryesor dhe momenti kryesor njëkohësisht të jenë të barabartë me zero. $\vec{R}' = 0, M_o = 0$

$\vec{R}' = 0$ kushti i ekuilibrit të forcave kongruente

$M_R = M_o$ kushti i ekuilibrit të qifteve në rrafsh



Sistemi i dhënë i forcave, i cili është ekuivalent sistemit të forcave dhe qifteve të redukuara gjëndët në ekuilibër.

Këto janë kushtet e ekuilibrit në formën vektoriale. Nga ato rrjedhin edhe kushtet në formën analitike.

Egzistojnë tri forma të kushteve të ekuilibrit në formën analitike.

Forma themelore e kushteve të ekuilibrit të sistemit të forcave në rrafsh

$$R^* = R' = R = \sqrt{X_R^2 + Y_R^2},$$

$$X_R = \sum_{i=1}^n X_i, Y_R = \sum_{i=1}^n Y_i,$$

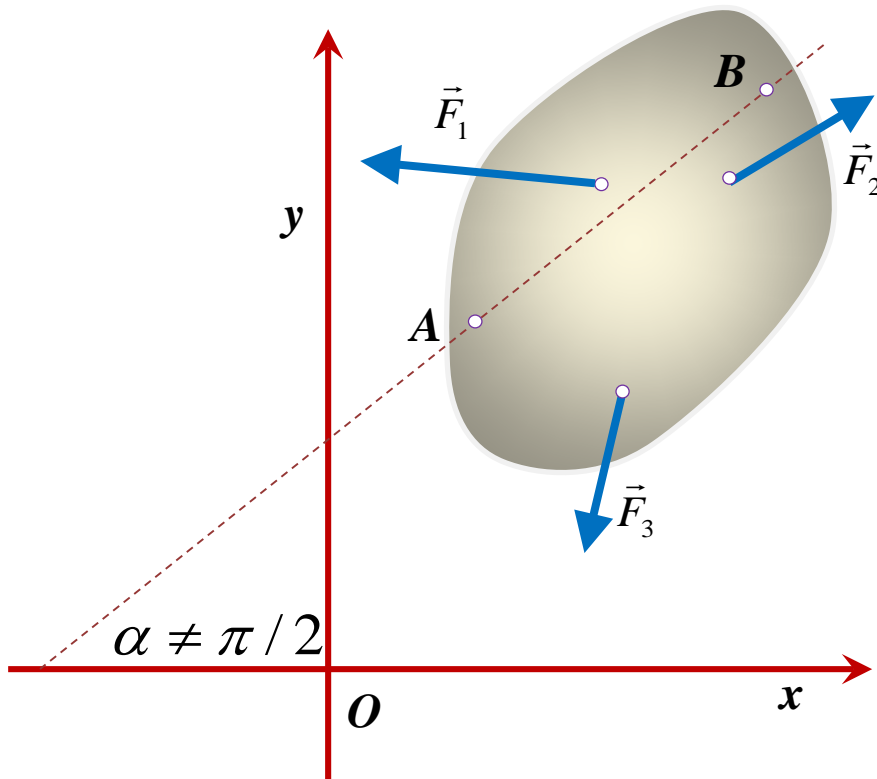
$$\mathcal{M}_R = \sum_{i=1}^n M_o(\vec{F}_i) = M_o$$

$$X_R = 0, Y_R = 0, M_o = 0$$

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0, \sum_{i=1}^n Y_i = 0, \sum_{i=1}^n M_o(\vec{F}_i) = 0,$$

Forma dytë e kushteve të ekuilibrit të sistemit të forcave në rrafsh

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0, \sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0, \sum_{i=1}^n M_B(\vec{F}_i) = 0$$



Vërejtje: Aksi X nuk është normal në drejtëzën AB

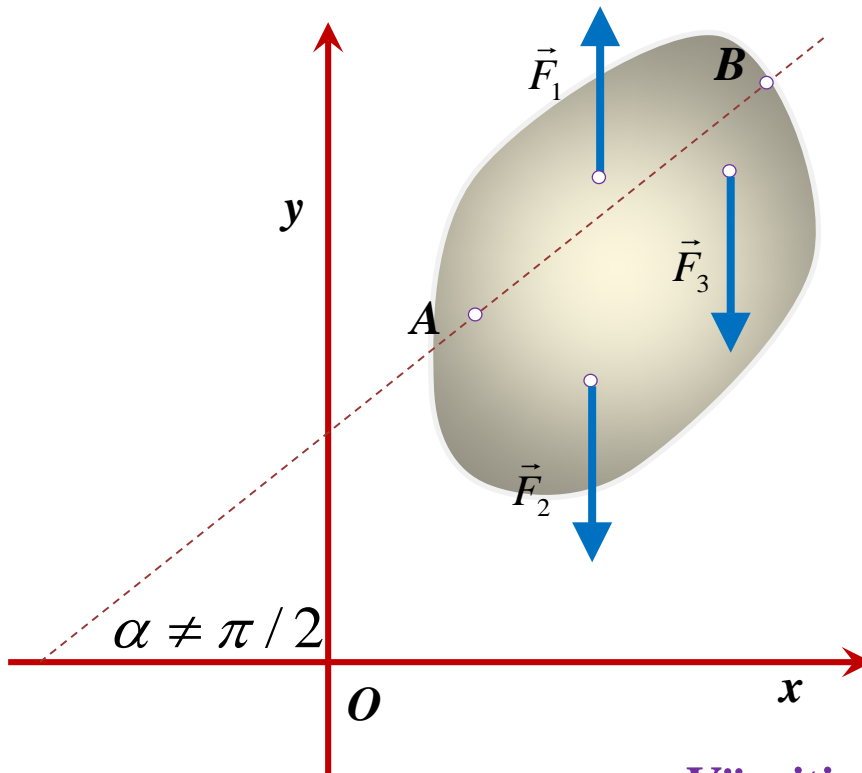
Forma tretë e kushteve të ekuilibrit të sistemit të forcave në rrafsh

$$\sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0, \sum_{i=1}^n M_B(\vec{F}_i) = 0, \sum_{i=1}^n M_C(\vec{F}_i) = 0$$

Vërejtje: pikat A, B, C nuk duhet të shtrihen në një drejtë

Ekulibri i sistemit të forcave paralele në rrafsh

Vërejtje: Sistemi koordinativ zgjedhet në atë mënyrë që njëri nga akset të jetë paralel me forcat.



$$\sum_{i=1}^n Y_i = 0, \sum_{i=1}^n M_0(\vec{F}_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0, \sum_{i=1}^n M_B(\vec{F}_i) = 0$$

Vërejtje: pikat A dhe B nuk duhet të shtrihen në drejtëzën e cila është paralel me forcat.

MBAJTËSIT STATIK

Me konstruktion nënkuptojmë terësinë e cila është e aftë që të pranojë dhe në mënyrë stabile ti përcjellë ngarkesat në bazën referente.

Pra konstruktionin e përbëjnë gjeometria dhe ngarkesat e tijë.

Mbajtësit janë trupa në përbërje të konstruksionit të cilët pranojnë ngarkesa dhe i percjellin ato në trupa tjerë, gjegjësisht mbeshtetësa.

Analiza e ngarkesave të kostrukcioneve mbajtëse (mbajtësve) i takon fushës së inxhinjerisë e cila është e njohur me emrin analiza e strukturave.

Konstruksionet mbajtëse janë: Trarët, shtyllat, ramat, kapriatat, ...









NDARJA E MBAJTËSVE

Sipas pozitës së ngarkesës mbajtësit ndahën në:

- Mbjtësit në rrafsh
- Mbjtësit hapsinor

Sipas formës mbajtësit ndahën në:

- Mbjtësit e plotë
- Mbjtësit kapriat

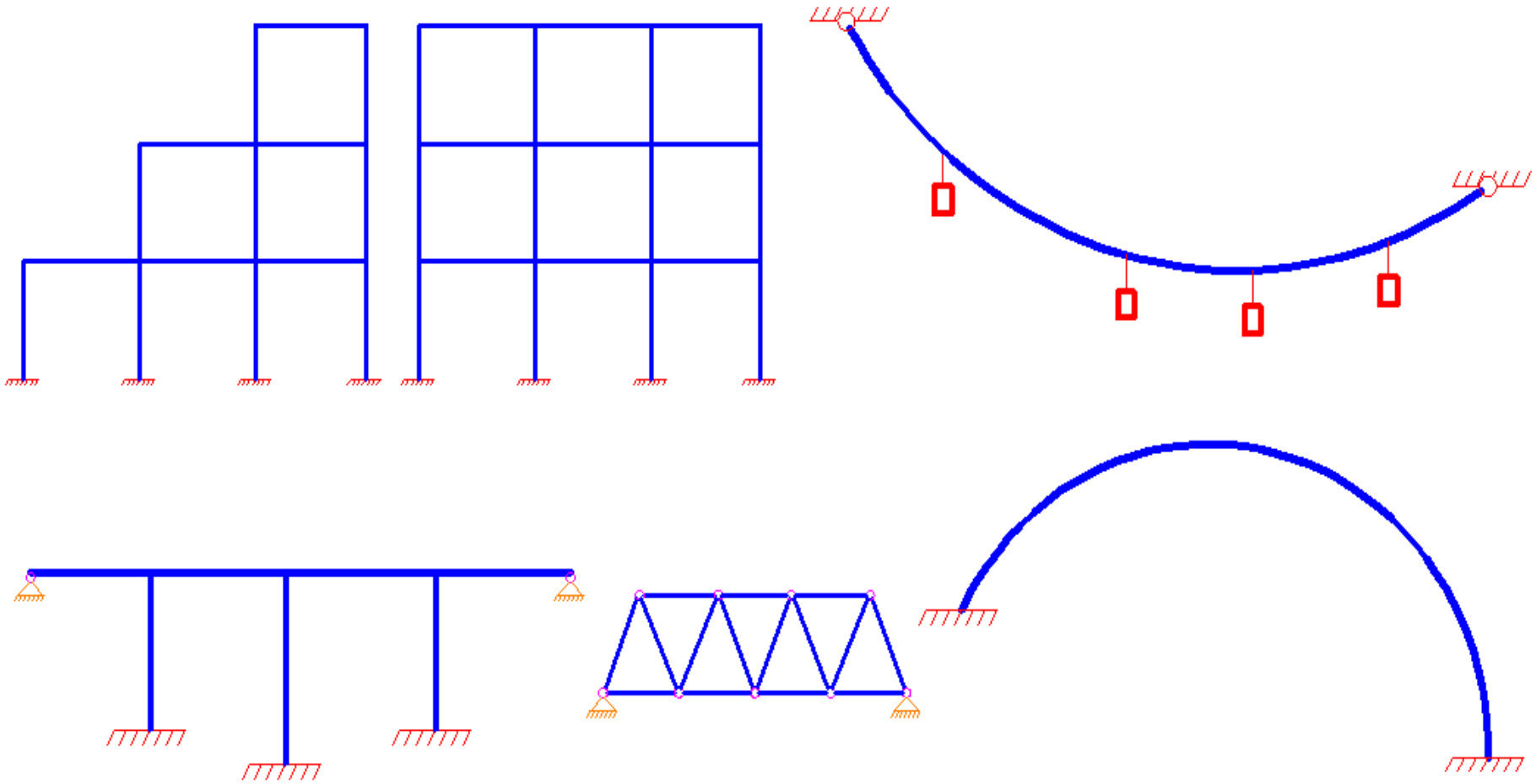
Kuptimi i mbajtësit linearë

Nese dmensionet e prerjes tërthore të mbajtësit janë shumë më të vogla në raport me gjatësinë atëher ai mbajtës quhet mbajtës linearë.

Në këto konstruksione hyjnë:

Vargoret, Poligonet zingjirorë, Kapriatat, trarët, shtyllat, kutiat, harqet dhe kombinimet e tyre.

Konstruktionet lineare

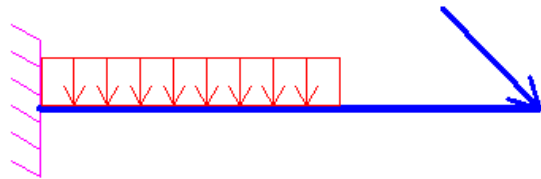


Sipas formës mbajtësit ndahën në:

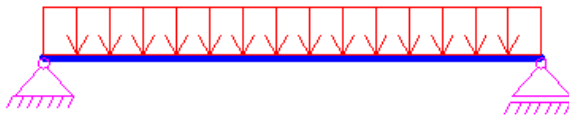
-Mbajtësit e thjeshtë

-Mbajtësit përbërë – konstruktionet (sistemi i trupave)

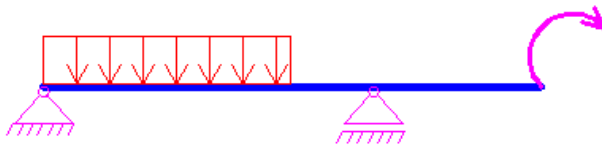
Mbajtësit e thjeshtë



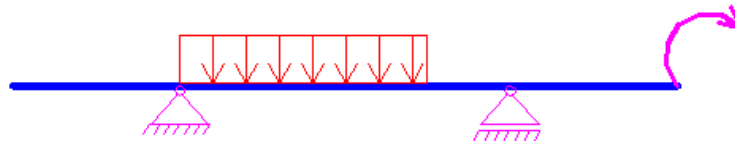
Konzola



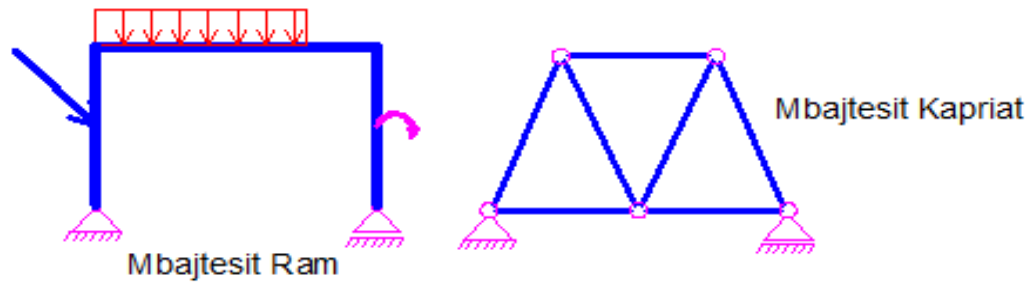
Trau i thjeshtë



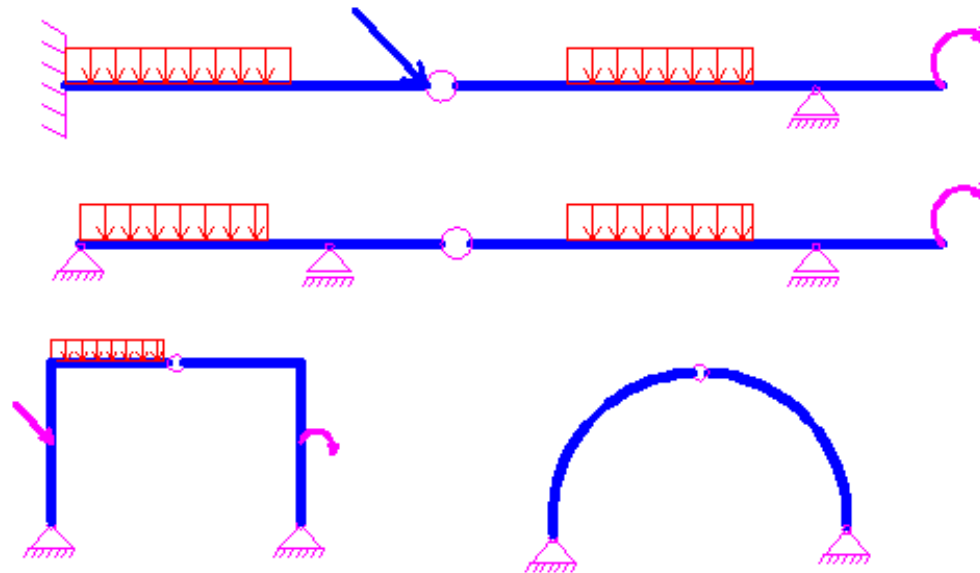
Trau i thjeshtë me lëshim



Trau i thjeshtë me dy lëshime



Mbajtësit e Përbër



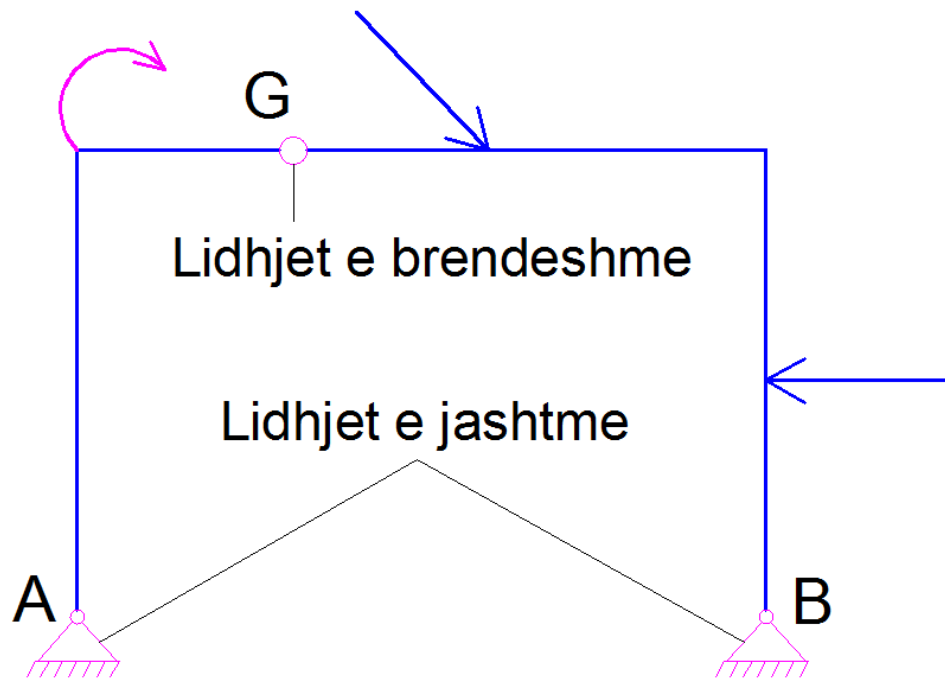
Mbajtësit e përbërë- përbëhen nga dy e ma shumë mbajtës të thjeshtë të lidhur në mesvete me sharnier.

Këta mbajtës janë: Trarët e gerberit, harku apo rami me tri sharniera, mbajtësit kapriat, etj.

EKUILIBRI I SISTEMIT TË TRUPAVE TË NGURTË

Trupi do të jetë në ekuilibër nese i largojm lidhjet dhe në vend të tyre vendosim reaksionet e lidhjeve.

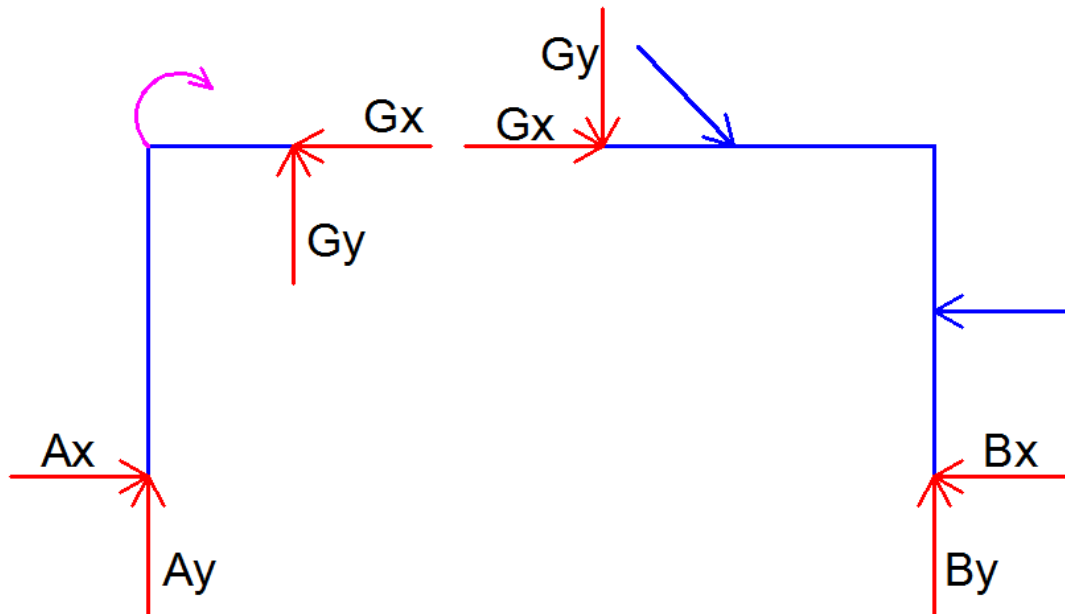
Reaksionet e lidhjeve mundin me qenë të jashtme dhe të brendeshme. Me largimin e lidhjeve të jashtme jo gjithmonë trupi është i ngurtë, psh harku me tri sharniera pas largimit të mbështetësve deformohet (nuk është më i ngurtë).



Caktimi i reaksioneve të lidhjeve të trupave të ngurtë statikisht të caktuarë

Forma e parë- Sistemi i trupave të veqantë

Ndahët sistemi në trupa të veqantë dhe pastaj shkruhen kushtet e ekuilibrit për secilin trup



t - numri i trupave
 $r = 3t$ - numri i ekuacioneve te ekuilibrit
 n - numri i reaksioneve

$n = r$ – sistemi është statikisht i caktuar
 $n > r$ – sistemi është statikisht i pa caktuar
 $n < r$ – sistemi është labil

$$t=2$$

$$r = 3t = 3 \times 2 = 6$$

$$n = 6 (A_x, A_y, B_x, B_y, G_x, G_y)$$

**$n = r$, Sistemi është statikisht
i caktuar**

$$\sum X = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_A = 0 \quad (3)$$

$$\sum X = 0 \quad (4)$$

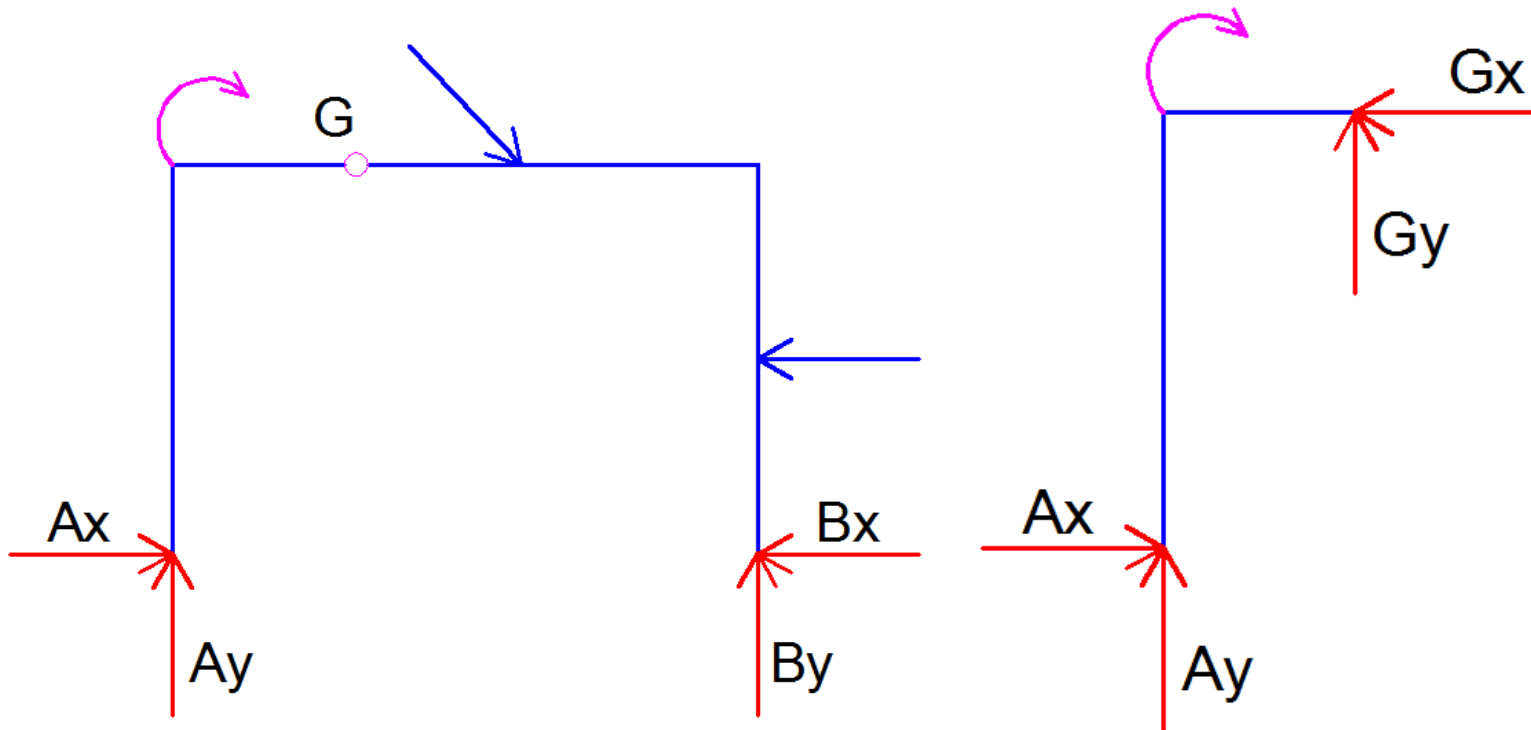
$$\sum Y = 0 \quad (5)$$

$$\sum M_B = 0 \quad (6)$$

$A_x, A_y, B_x, B_y, G_x, G_y$

Forma e dytë- Sistemi i trupave dhe trupat e veçantë

Shkruhen kushtet e ekuilibrit për trupin si tërësi dhe pastaj edhe për njërin trup (cilin do), kështu perseri kemi gjashtë kushte të ekuilibrit.



$$t=2$$

$$r = 3t = 3 \times 2 = 6$$

$$n = 6 (A_x, A_y, B_x, B_y, G_x, G_y)$$

**$n = r$, Sistemi është statikisht
i caktuar**

$$\sum X = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_B = 0 \quad (3)$$

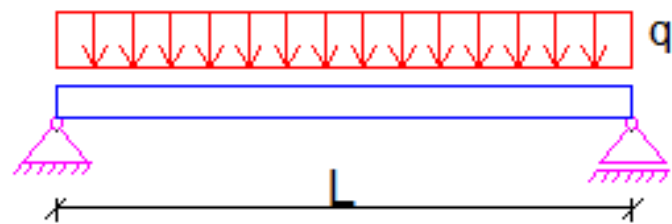
$$\sum X = 0 \quad (4)$$

$$\sum Y = 0 \quad (5)$$

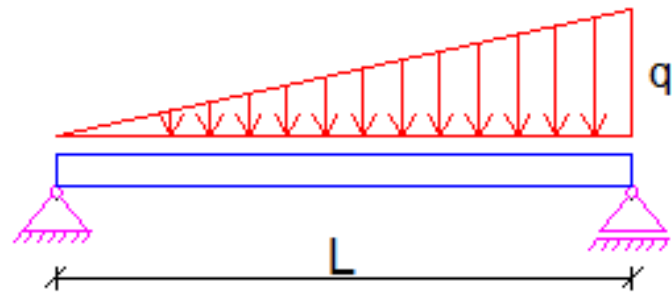
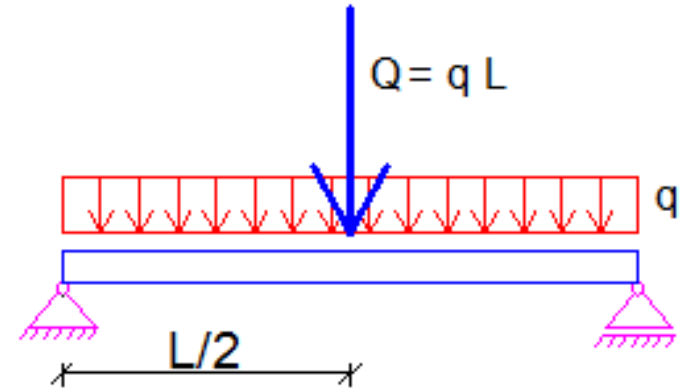
$$\sum M_G = 0 \quad (6)$$

$A_x, A_y, B_x, B_y, G_x, G_y$

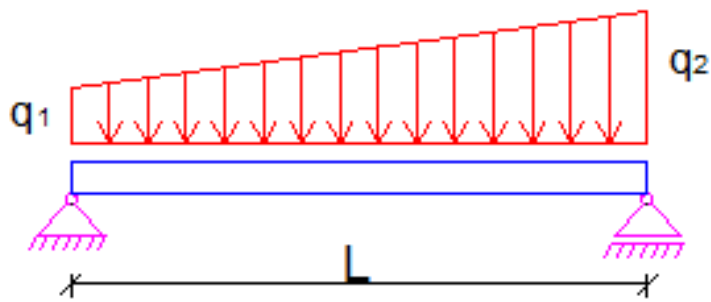
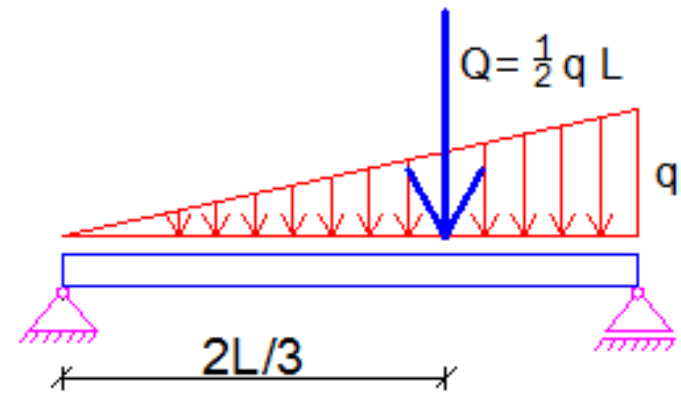
NGARKESA KONTINUALE



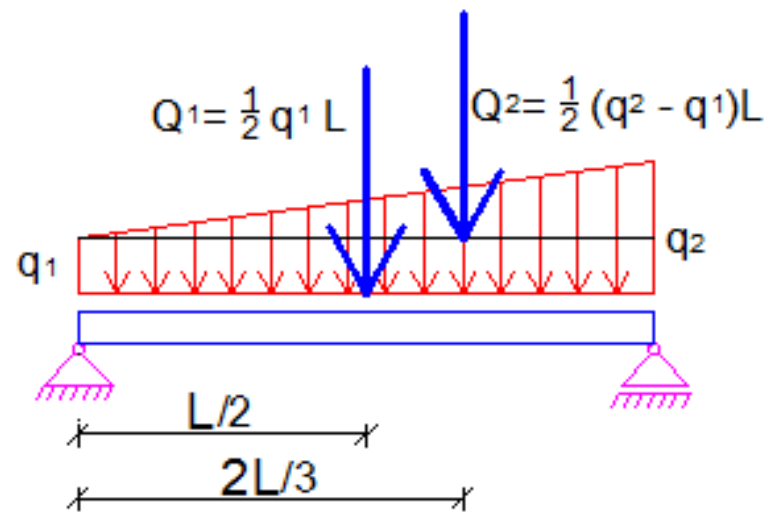
$$Q = qL$$



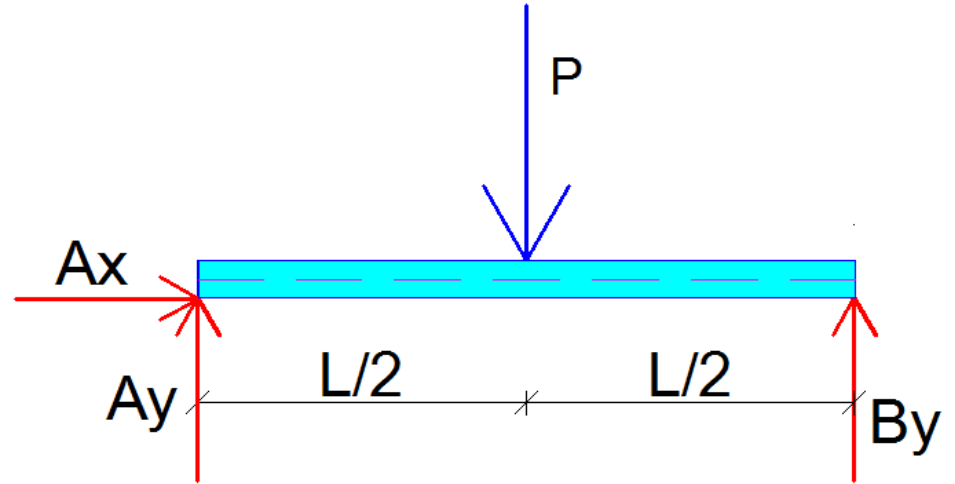
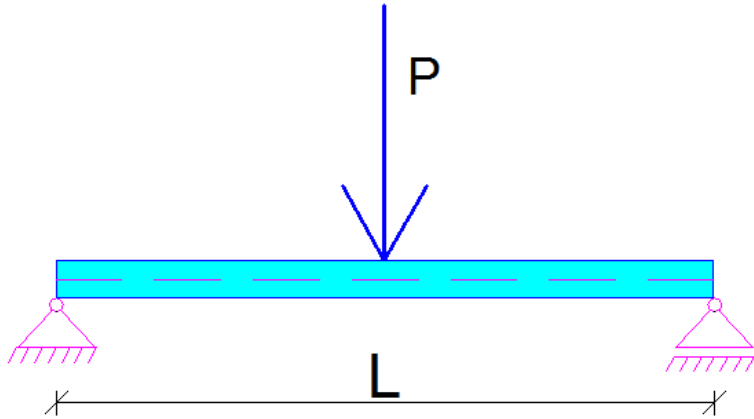
$$Q = \frac{1}{2} qL$$



$$Q_1 = \frac{1}{2} q_1 L \quad Q_2 = \frac{1}{2} (q_2 - q_1) L$$



Shembulli 1



$$1) \sum X = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$2) \sum Y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - P = 0$$

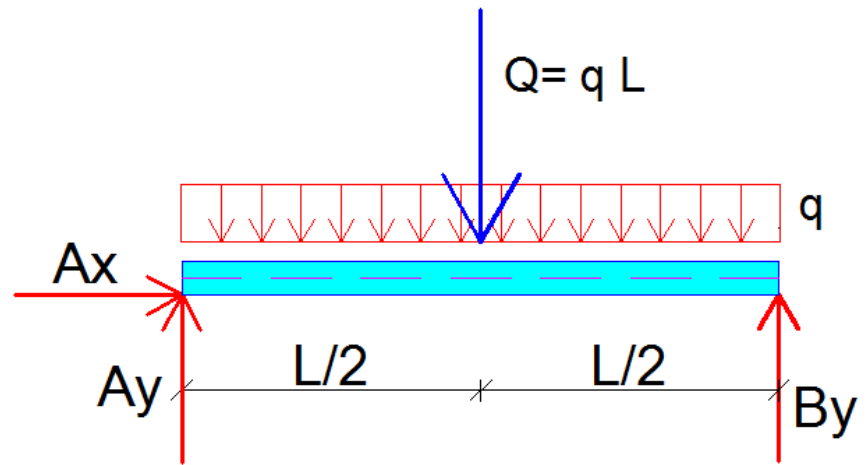
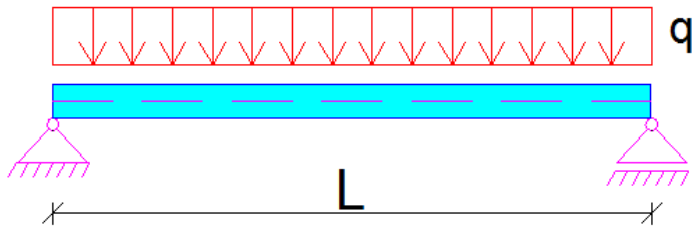
$$3) \sum M_B = 0 \Rightarrow A_y \times L - P \times L/2 = 0$$

$$(1) \Rightarrow A_x = 0$$

$$(3) \Rightarrow A_y = P/2$$

$$(2) \Rightarrow B_y = P/2$$

Shembulli 2



$$1) \sum X = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$2) \sum Y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - Q = 0$$

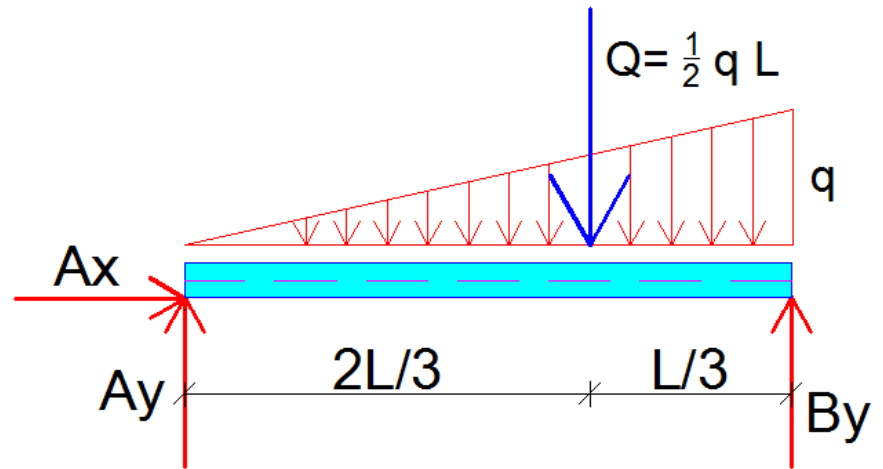
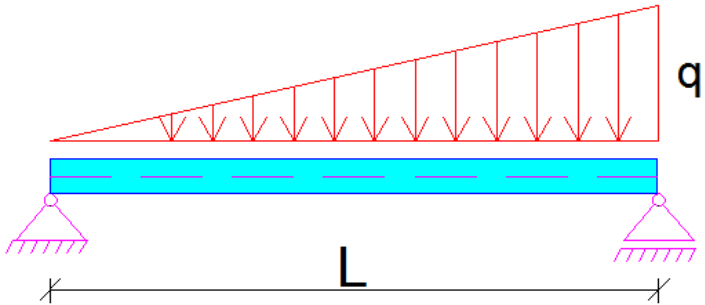
$$3) \sum M_B = 0 \Rightarrow A_y \times L - q \times L \times L/2 = 0$$

$$(1) \Rightarrow A_x = 0$$

$$(3) \Rightarrow A_y = q \times L/2$$

$$(2) \Rightarrow B_y = q \times L/2$$

Shembulli 3



$$1) \sum X = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$2) \sum Y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - Q = 0$$

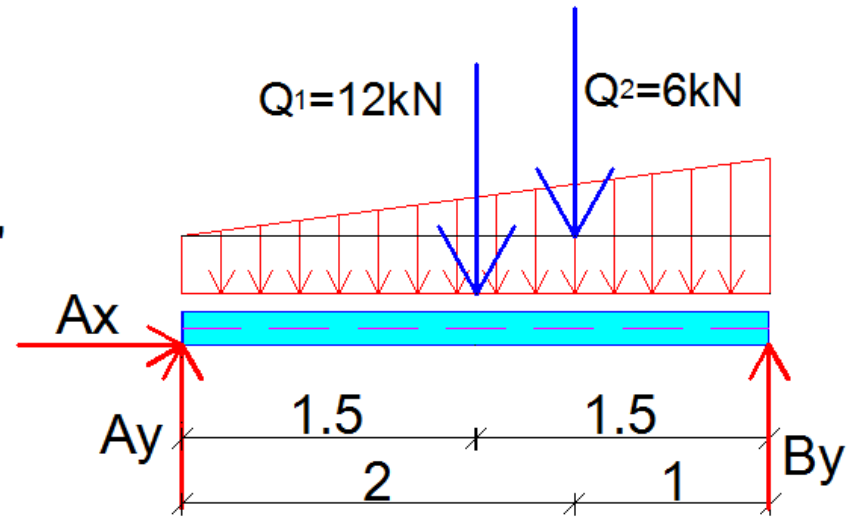
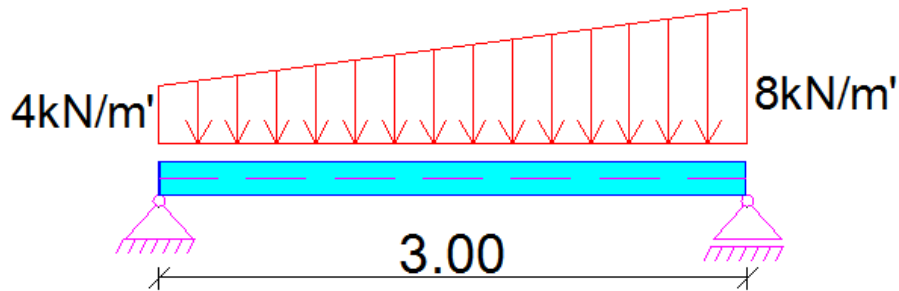
$$3) \sum M_B = 0 \Rightarrow A_y \times L - \frac{1}{2} \times q \times L \times \frac{L}{3} = 0$$

$$(1) \Rightarrow A_x = 0$$

$$(3) \Rightarrow A_y = q \times L/6$$

$$(2) \Rightarrow B_y = q \times L/3$$

Shembulli 4



$$1) \sum X = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$(1) \Rightarrow A_x = 0$$

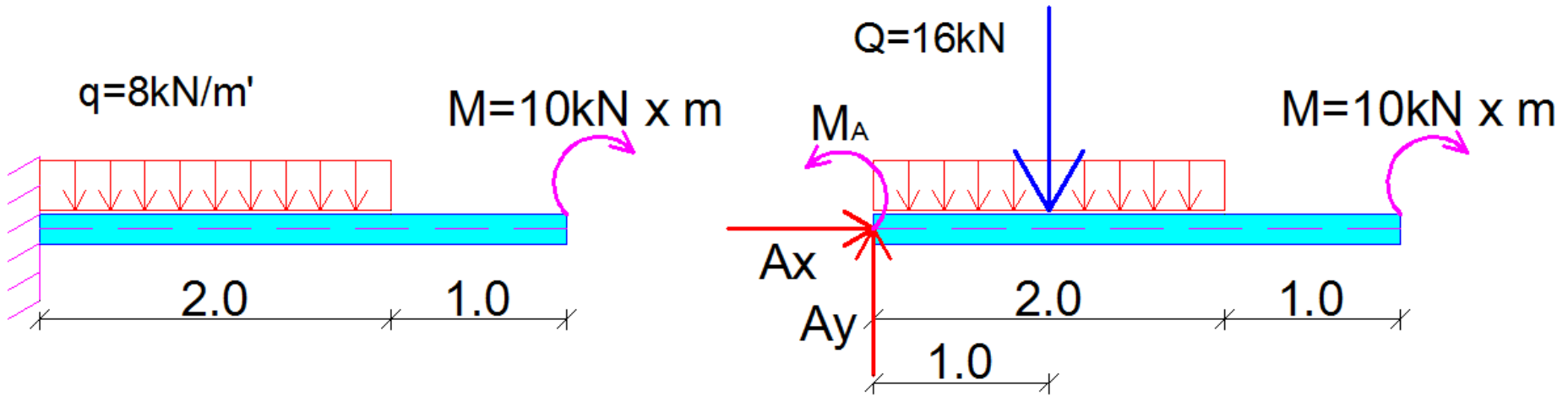
$$2) \sum Y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - Q_1 - Q_2 = 0$$

$$(3) \Rightarrow A_y = 8 \text{ kN}$$

$$3) \sum M_B = 0 \Rightarrow A_y \times 3 - Q_1 \times 1.5 - Q_2 \times 1 = 0$$

$$(2) \Rightarrow B_y = 10 \text{ kN}$$

Shembulli 5



$$1) \sum X = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$(1) \Rightarrow A_x = 0$$

$$2) \sum Y = 0 \Rightarrow A_y - Q = 0$$

$$(2) \Rightarrow A_y = 16 \text{ kN}$$

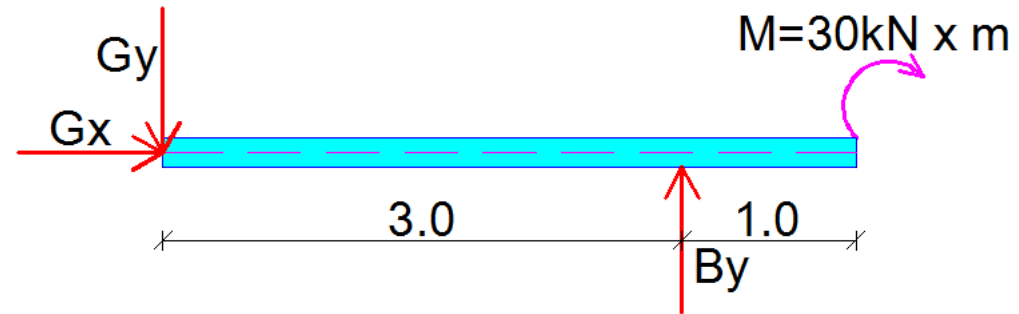
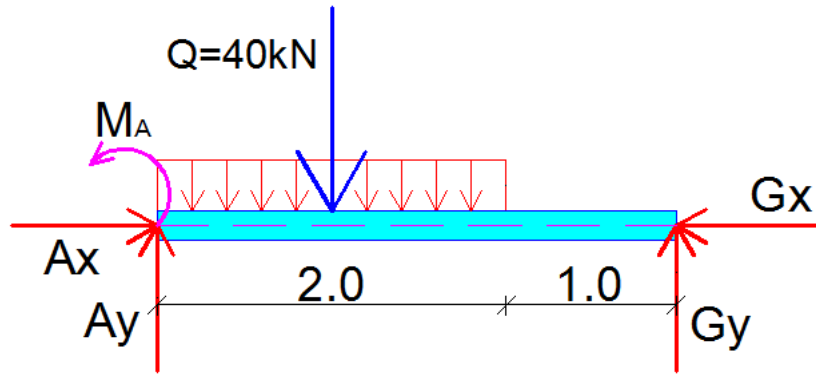
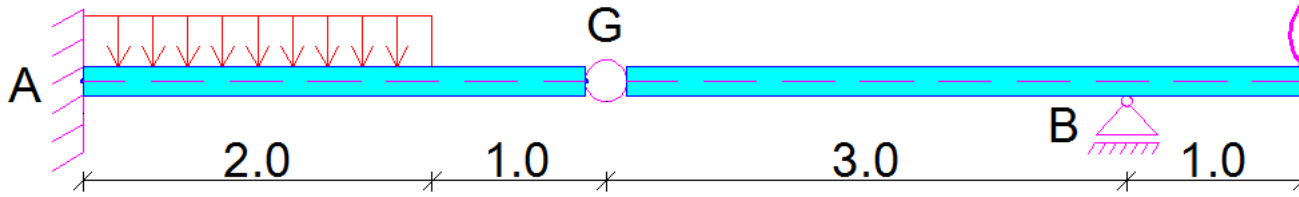
$$3) \sum M_B = 0 \Rightarrow M_A - Q \times 1 - M = 0$$

$$(3) \Rightarrow M_A = 26 \text{ kN} \times \text{m}$$

Shembulli 6

$q=20\text{kN/m'}$

$M=30\text{kN} \times \text{m}$



B-G 1) $\sum X = 0 \Rightarrow G_x = 0$

(1) $\Rightarrow G_x = 0$

2) $\sum Y = 0 \Rightarrow B_y - G_y = 0$

(3) $\Rightarrow B_y = 10 \text{ kN}$

3) $\sum M_G = 0 \Rightarrow B_y \times 3 - M = 0$

(2) $\Rightarrow G_y = 10 \text{ kN}$

G-A 4) $\sum X = 0 \Rightarrow A_x - G_x = 0$

(4) $\Rightarrow A_x = 0$

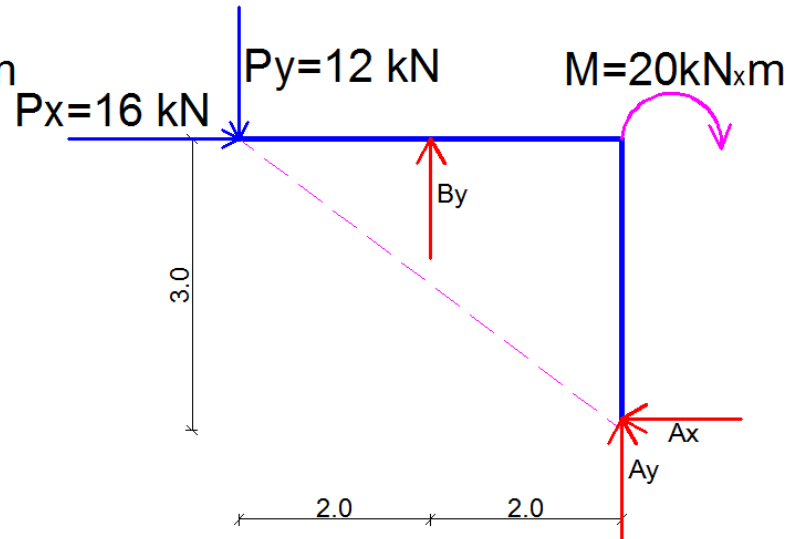
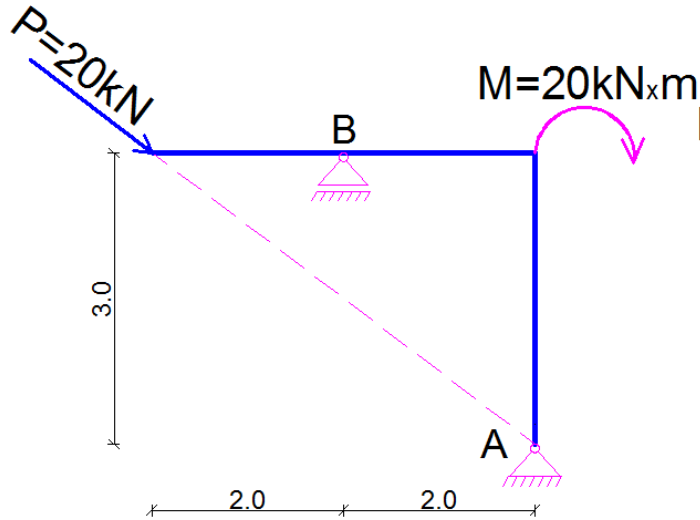
5) $\sum Y = 0 \Rightarrow A_y + G_y - Q = 0$

(5) $\Rightarrow A_y = 30 \text{ kN}$

6) $\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A + G_y \times 3 - Q \times 1 = 0$

(6) $\Rightarrow M_A = 10 \text{ kN} \times \text{m}$

Shembulli 8



$$1) \sum X = 0 \Rightarrow Ax - Px = 0$$

$$(1) \Rightarrow Ax = 16 \text{ kN}$$

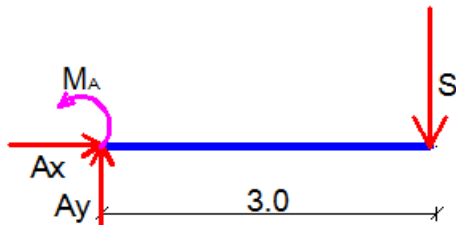
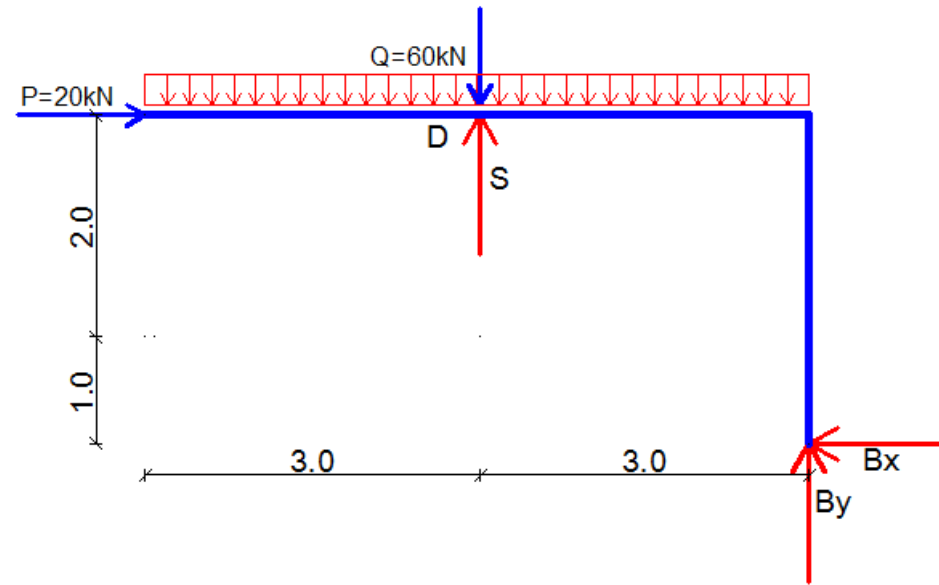
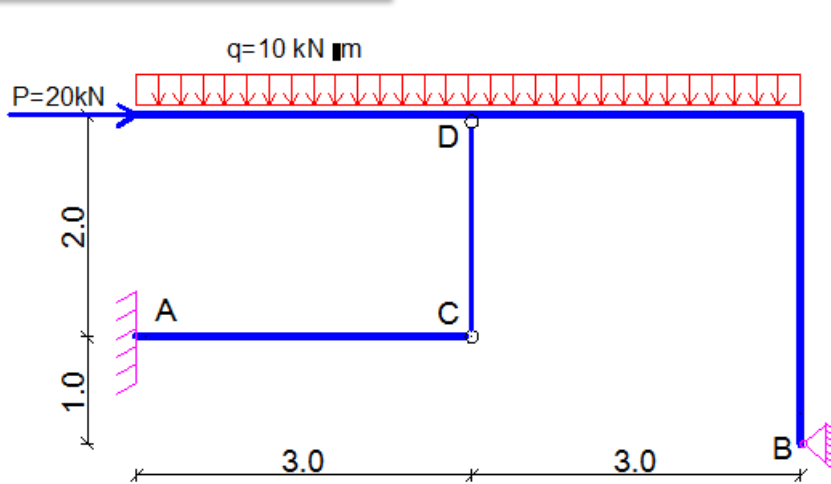
$$2) \sum Y = 0 \Rightarrow Ay + By - Py = 0$$

$$(3) \Rightarrow By = -10 \text{ kN}$$

$$3) \sum M_B = 0 \Rightarrow By \times 2 + M = 0$$

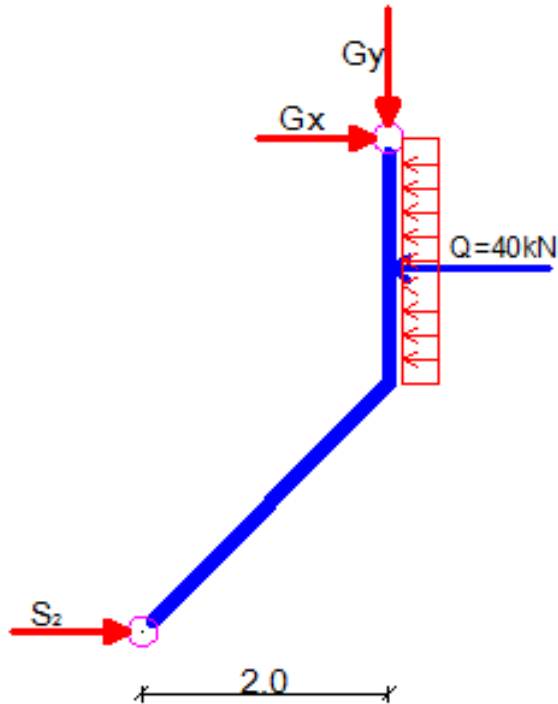
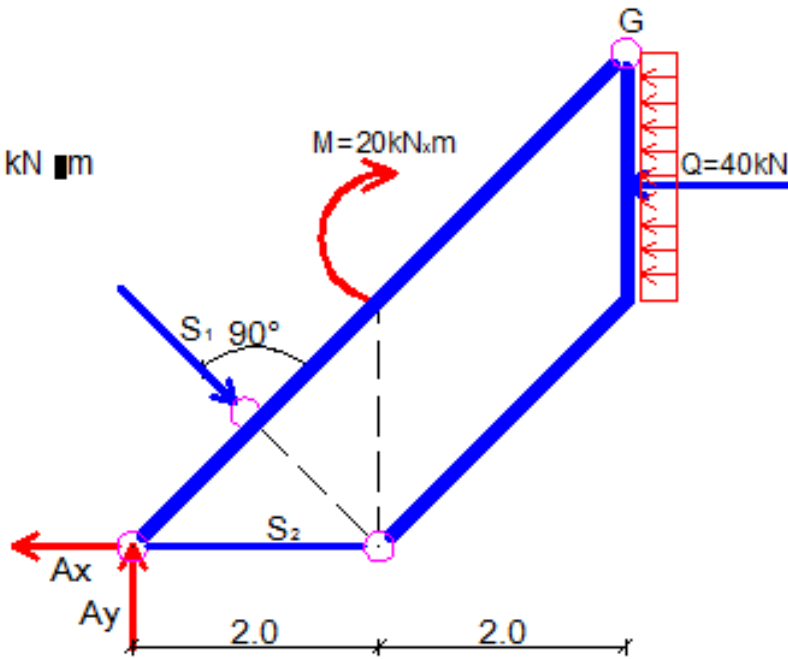
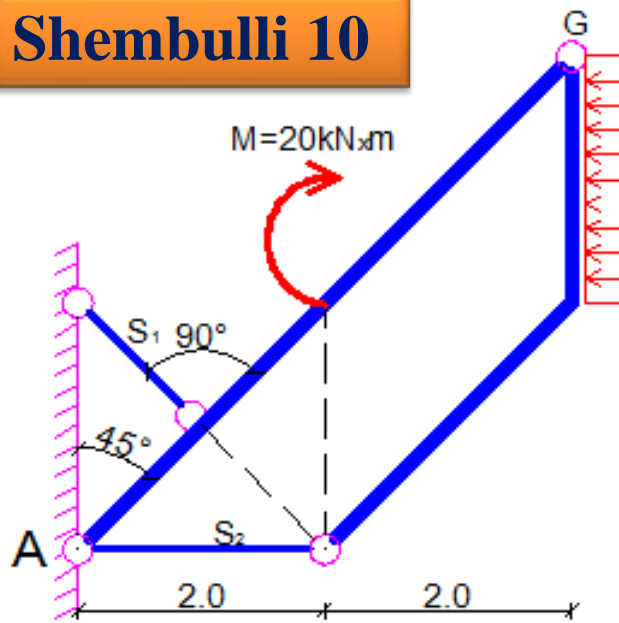
$$(2) \Rightarrow Ay = 22 \text{ kN}$$

Shembulli 9



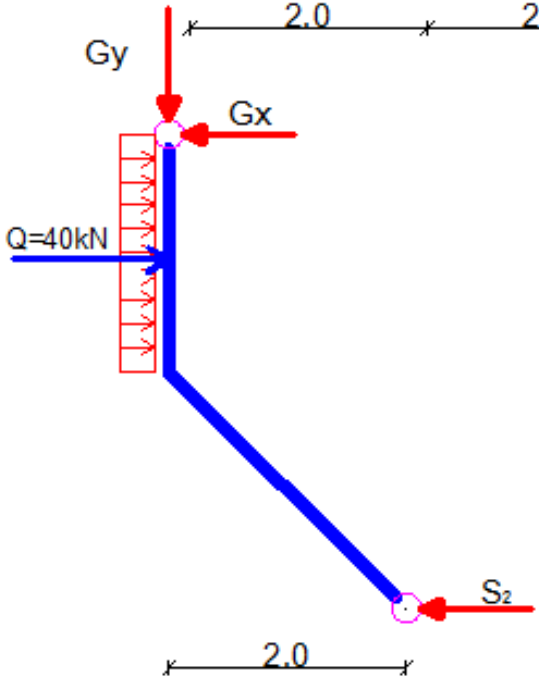
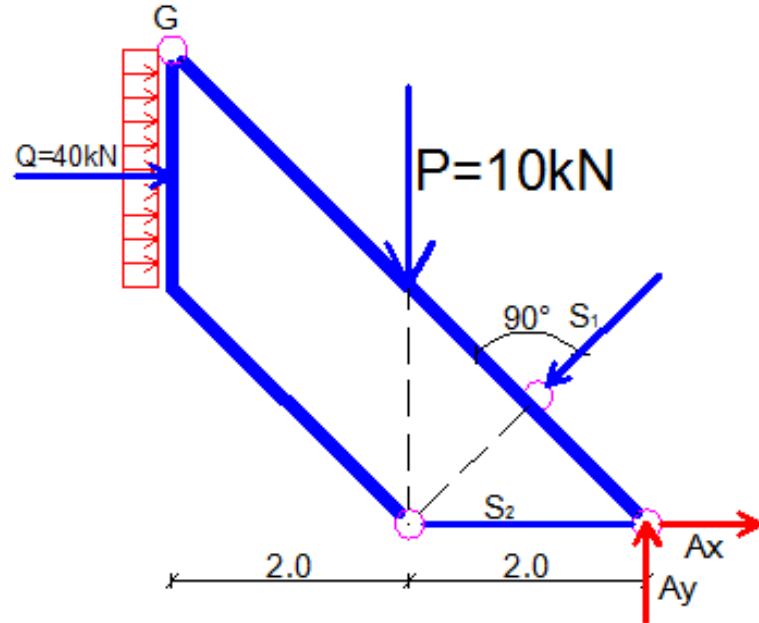
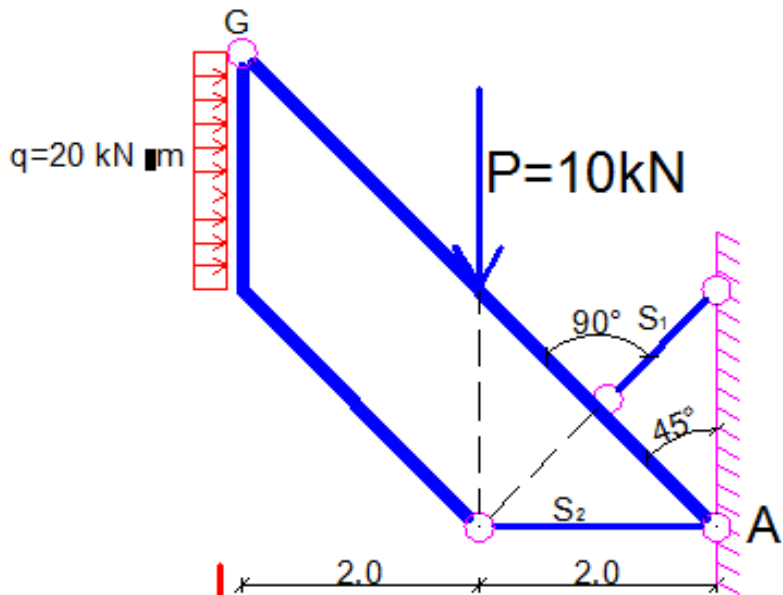
- 1) $\sum X = 0 \Rightarrow B_x - P = 0 \quad \Rightarrow B_x = 20 \text{ kN}$
- 2) $\sum Y = 0 \Rightarrow S + B_y - Q = 0 \quad \Rightarrow B_y = 20 \text{ kN}$
- 3) $\sum M_B = 0 \Rightarrow S \times 3 + P \times 3 - Q \times 3 = 0 \quad \Rightarrow S = 40 \text{ kN}$
- 4) $\sum X = 0 \Rightarrow A_x = 0$
- 5) $\sum Y = 0 \Rightarrow A_y - S = 0 \Rightarrow A_y = 40 \text{ kN}$
- 6) $\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A - S \times 3 = 0 \Rightarrow M_A = 120 \text{ kNxm}$

Shembulli 10

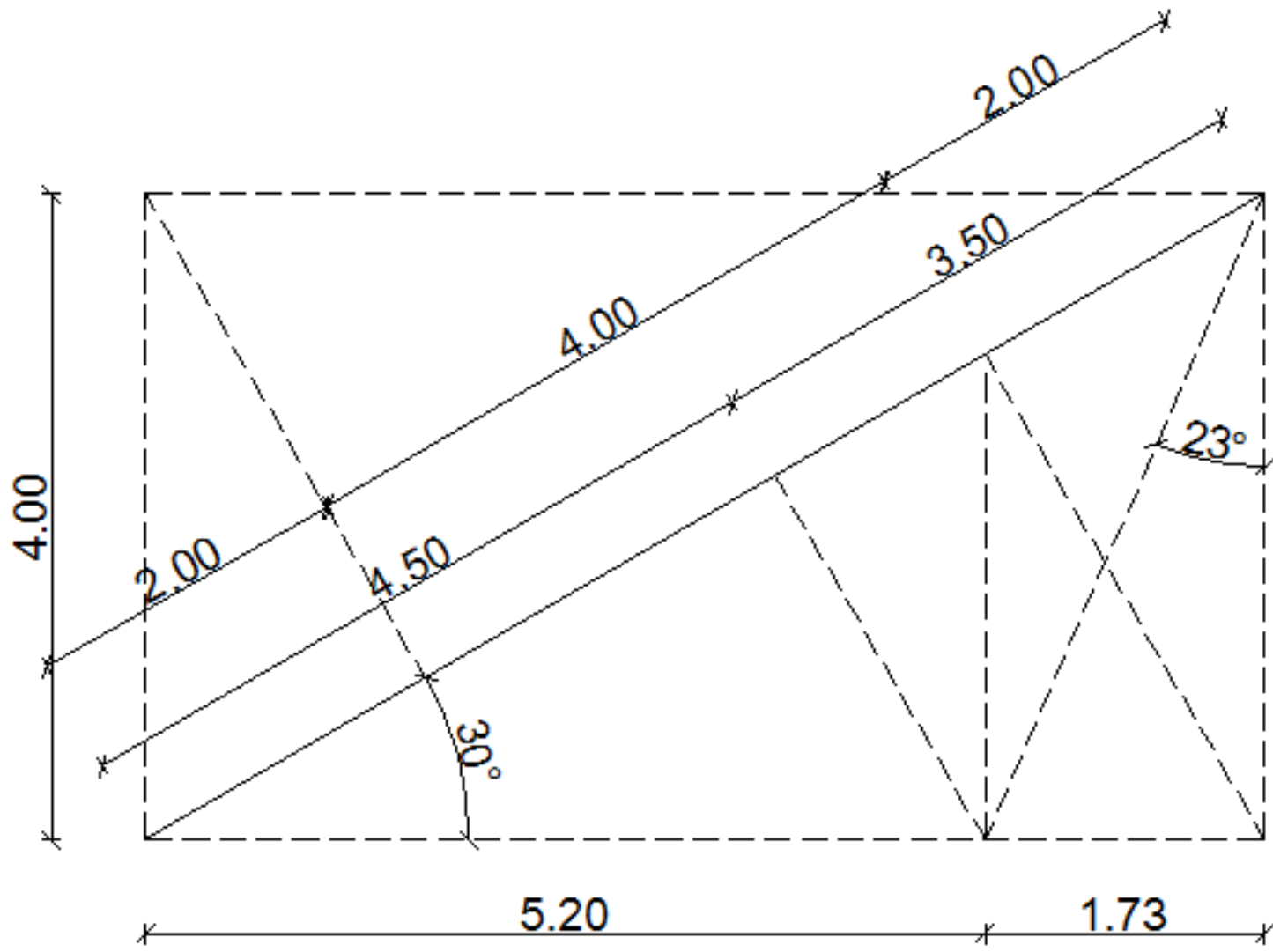


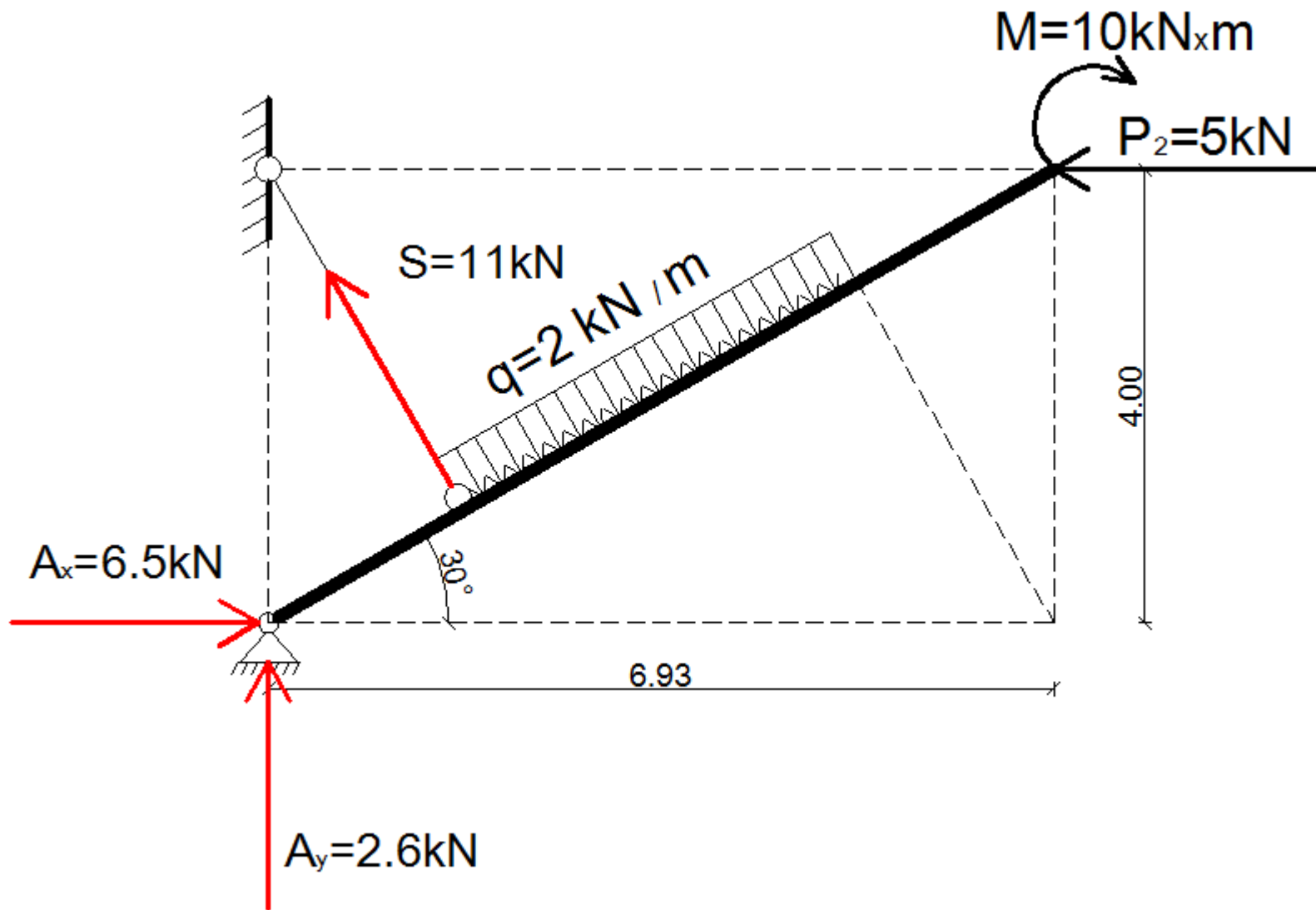
- 1) $\sum X = 0 \Rightarrow Ax - S_{1x} + Q = 0 \quad \Rightarrow Ax = 10 \text{ kN}$
- 2) $\sum Y = 0 \Rightarrow Ay - S_{1y} = 0 \quad \Rightarrow Ay = 50 \text{ kN}$
- 3) $\sum M_A = 0 \Rightarrow S \times 1.414 + M - Q \times 3 = 0 \Rightarrow S = 70.7 \text{ kN}$
- 4) $\sum X = 0 \Rightarrow G_x + S_2 - Q = 0 \quad \Rightarrow G_x = 30 \text{ kN}$
- 5) $\sum Y = 0 \Rightarrow G_y = 0 \quad \Rightarrow G_y = 0$
- 6) $\sum M_G = 0 \Rightarrow S_2 \times 4 - Q \times 1 = 0 \quad \Rightarrow S_2 = 10 \text{ kN}$

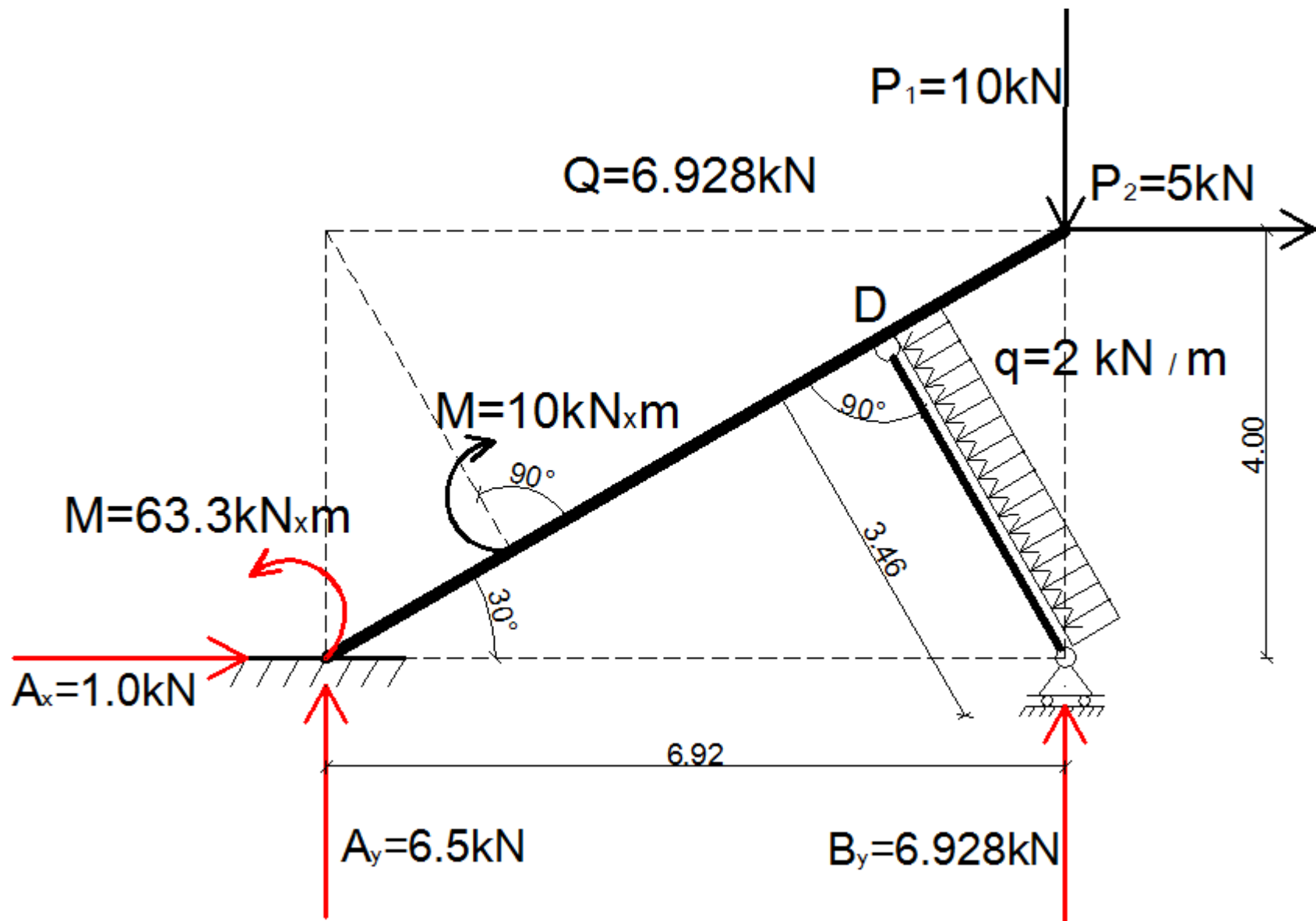
Shembulli 11

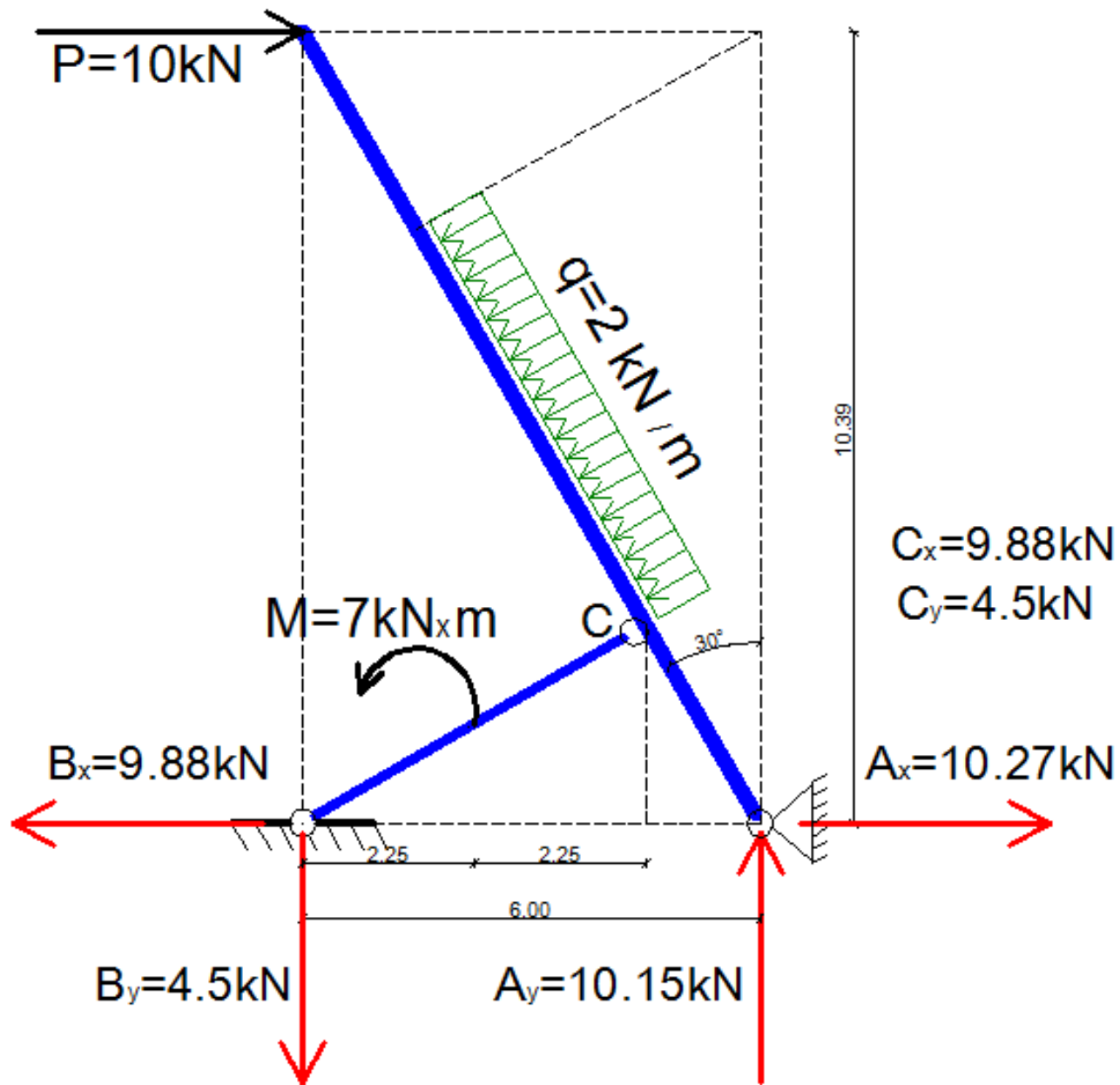


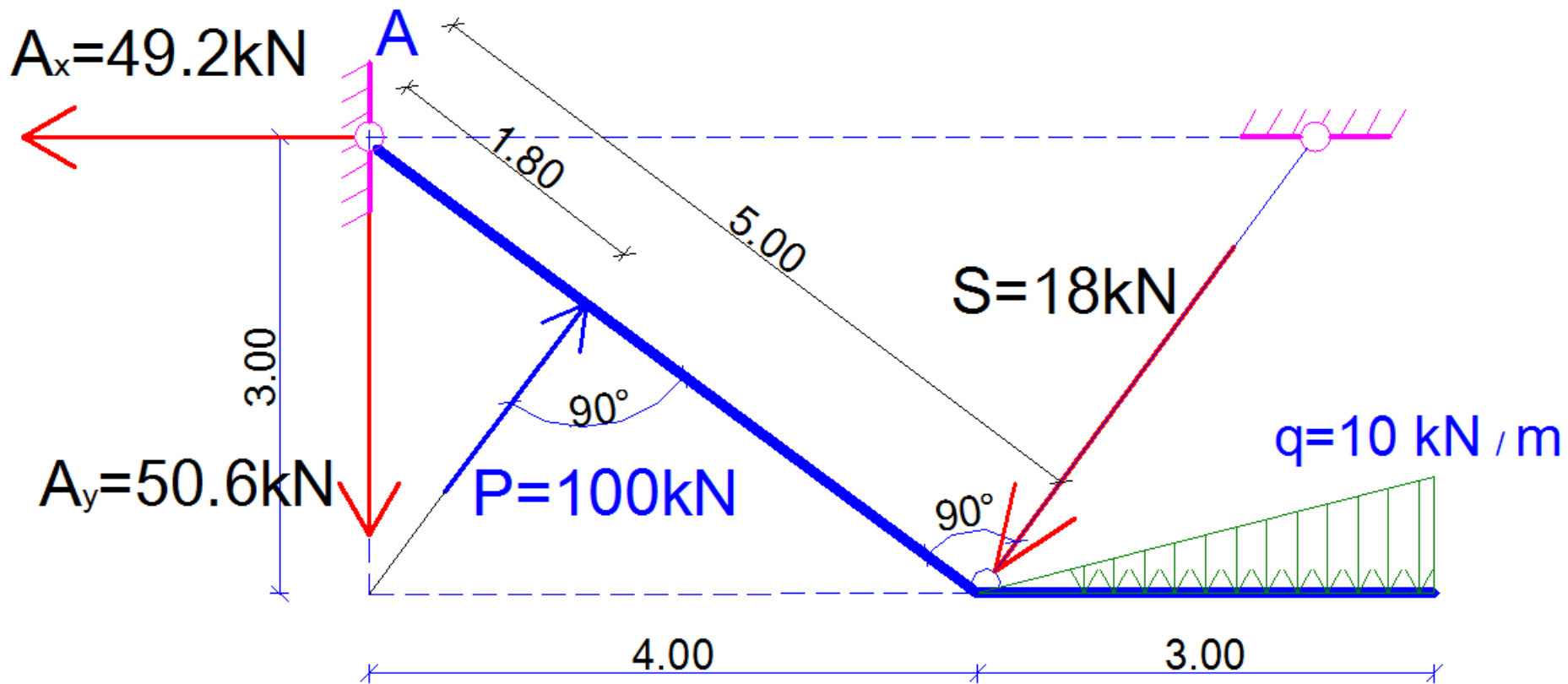
- 1) $\sum X = 0 \Rightarrow Ax - S_{1x} + Q = 0 \Rightarrow Ax = 10 \text{ kN}$
- 2) $\sum Y = 0 \Rightarrow Ay - S_{1y} = 0 \Rightarrow Ay = 60 \text{ kN}$
- 3) $\sum M_A = 0 \Rightarrow S \times 1.414 + P \times 2 - Q \times 3 = 0 \Rightarrow S = 70.7 \text{ kN}$
- 4) $\sum X = 0 \Rightarrow G_x + S_2 - Q = 0 \Rightarrow G_x = 30 \text{ kN}$
- 5) $\sum Y = 0 \Rightarrow G_y = 0 \Rightarrow G_y = 0$
- 6) $\sum M_G = 0 \Rightarrow S_2 \times 4 - Q \times 1 = 0 \Rightarrow S_2 = 10 \text{ kN}$

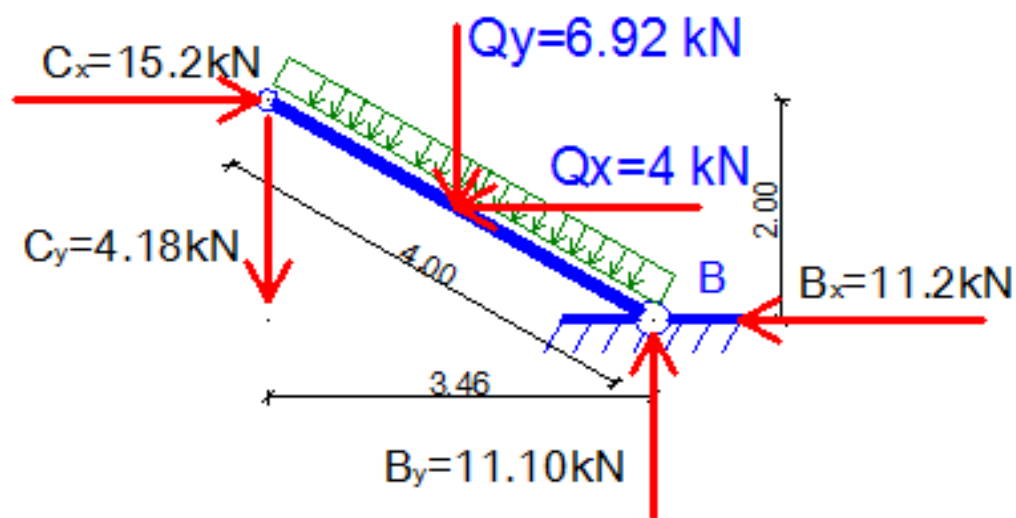
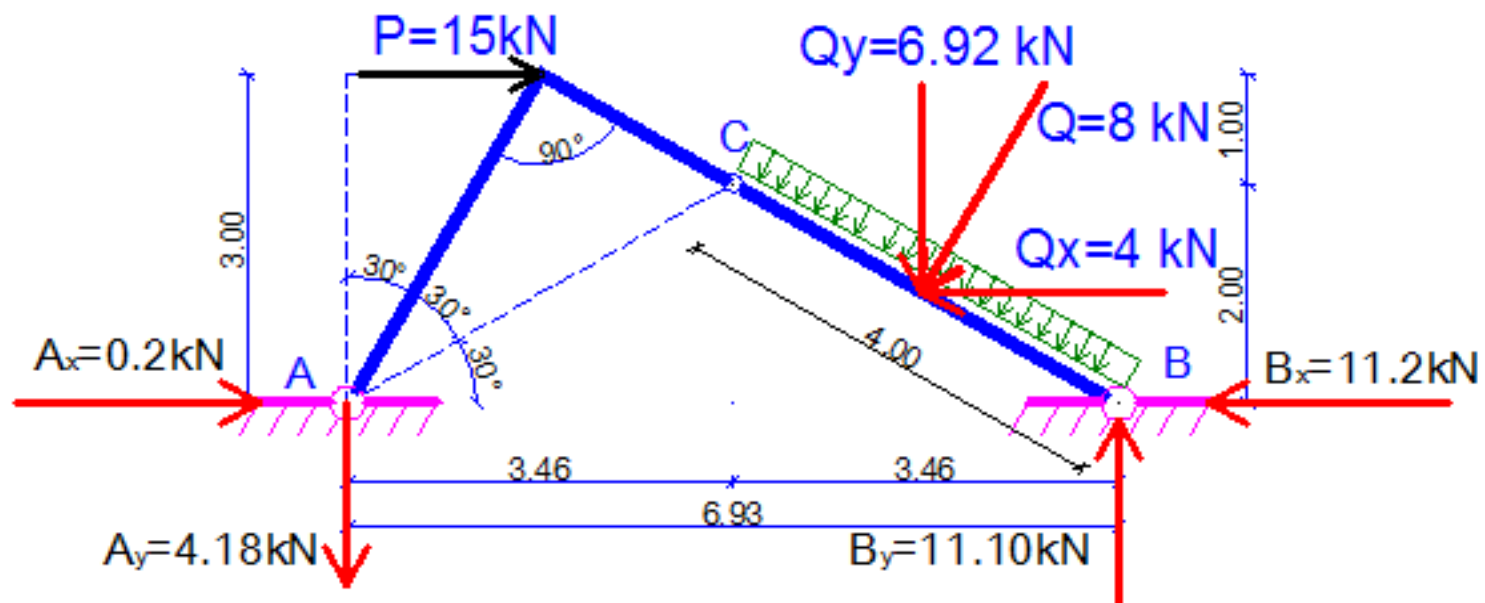












BAZAT E STATIKËS GRAFIKE

Përbërja grafike e forcave në rrafsh me ndihmen e shumkëndëshit dhe shumkëndëshit terkuzorë

Përcaktimi i rezultatës së dy forcave me metodë grafike

Përcaktimi i rezultatës së sistemit të forcave me metodë grafike

Zbërthimi i sistemit të forcave në qift forcash

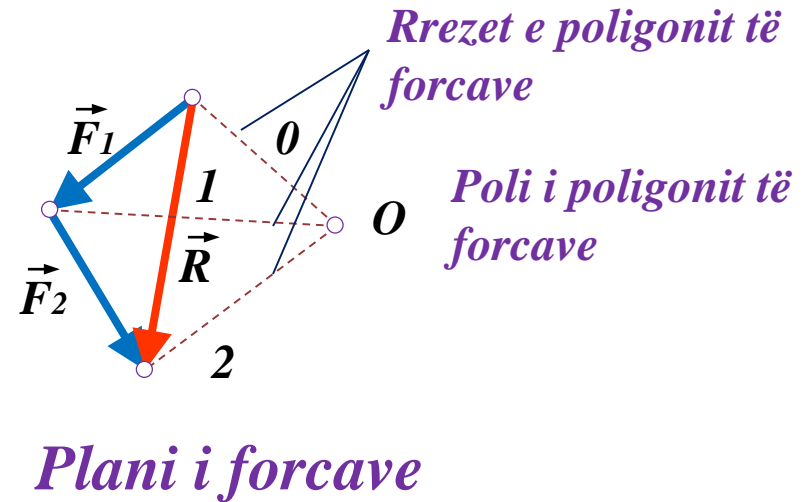
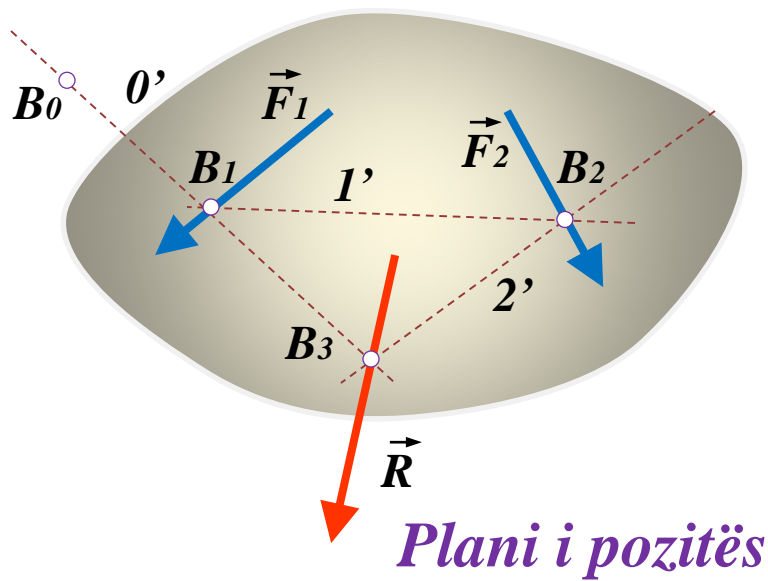
Përcaktimi i reaksioneve të mbështetësve

Zbërthimi i forcave me ndihmen e shumkëndëshit dhe shumkëndëshit terkuzorë

Përcaktimi i rezultatës së dy forcave me metodë grafike

Përcaktimi i rezultatës së dy forcave me metodë grafike Madhësia dhe drejtimi i rezultatës me metodë grafike caktohet përmes shumkëndëshit të forcave.

Pozita e rezultatës me metodë grafike caktohet përmes shumkëndëshit tërkuzor.



Konstruktohet poligoni i forcave a,b,c,

Pervetësohet përpjesa,

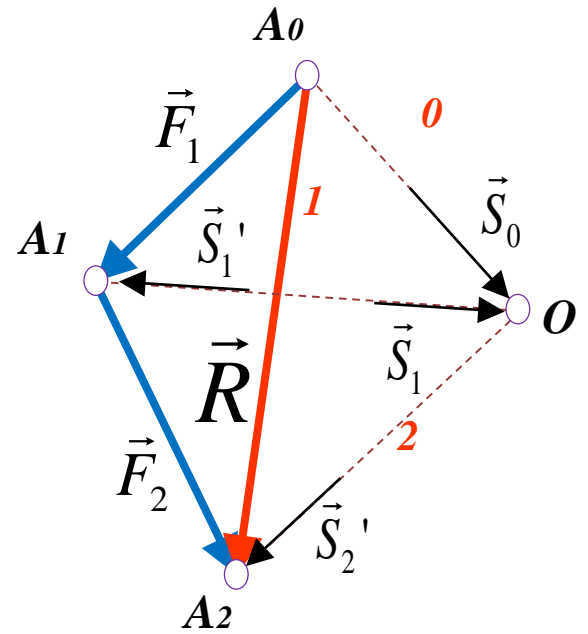
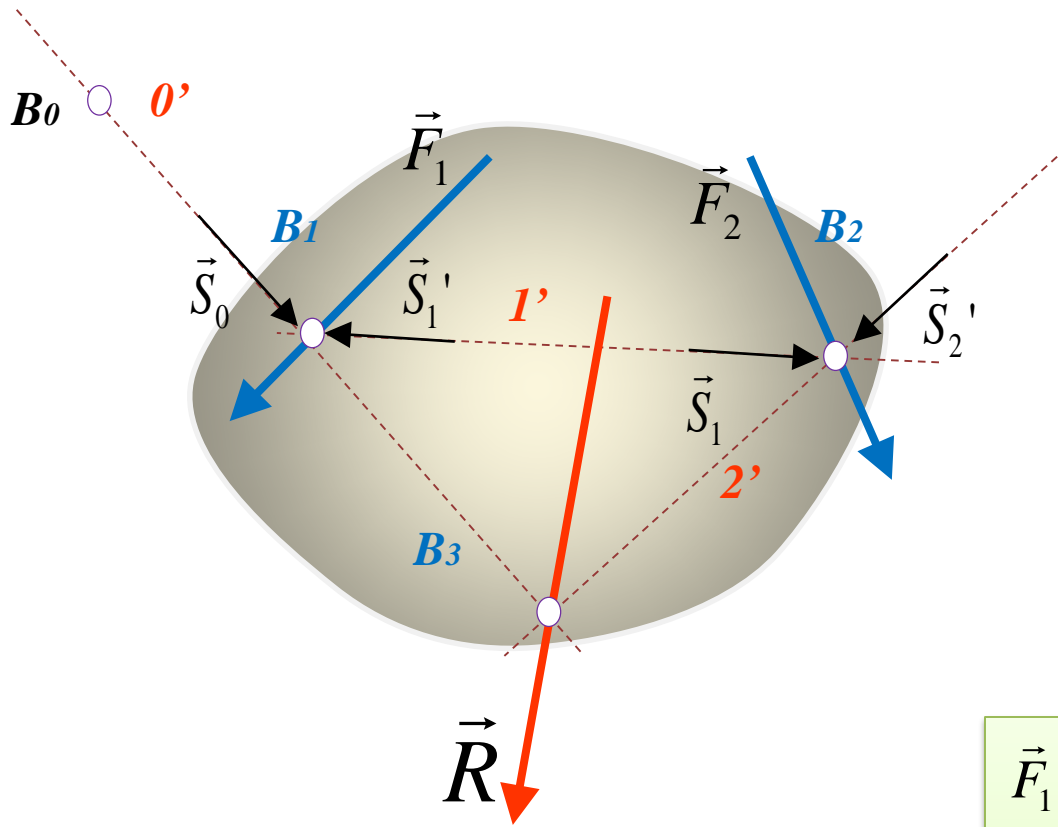
Zgjedhet poli O dhe formohen rrezet e poligonit të forcave,

Ana përfundimtare e poligonit të forcave është rezultanta,

Konstruktohet shumkëndëshi tërkuzor $B_0, B_1, B_2,$

Në prerjen e drejtëzës së parë dhe të fundit të shumkëndëshit tërkuzor është pika $B_3,$

Rezultanta e forcave të dhëna kalon nëpër pikën $B_3.$



$$\vec{F}_1 = \vec{S}_0 + \vec{S}_1',$$

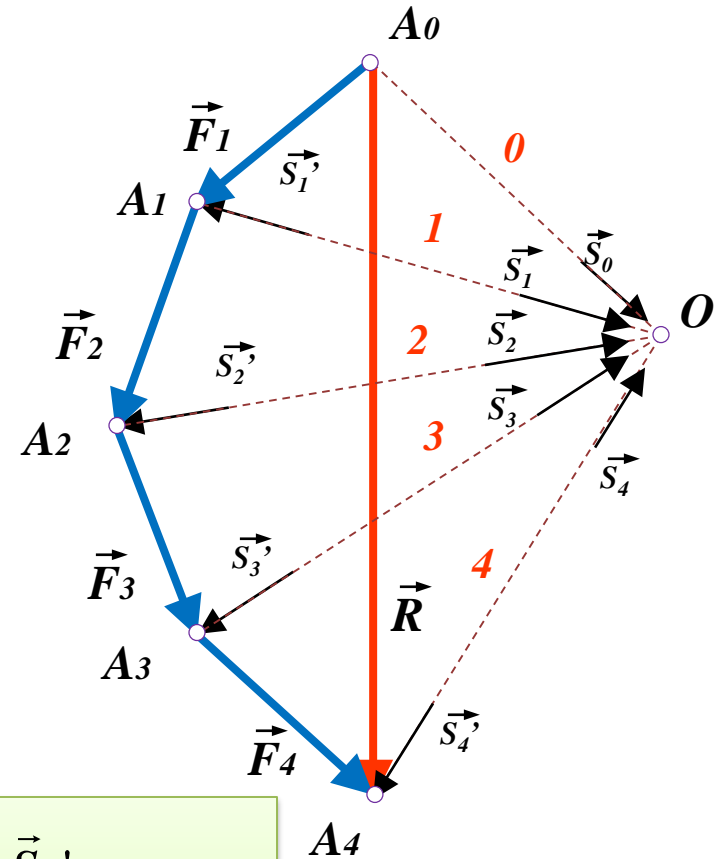
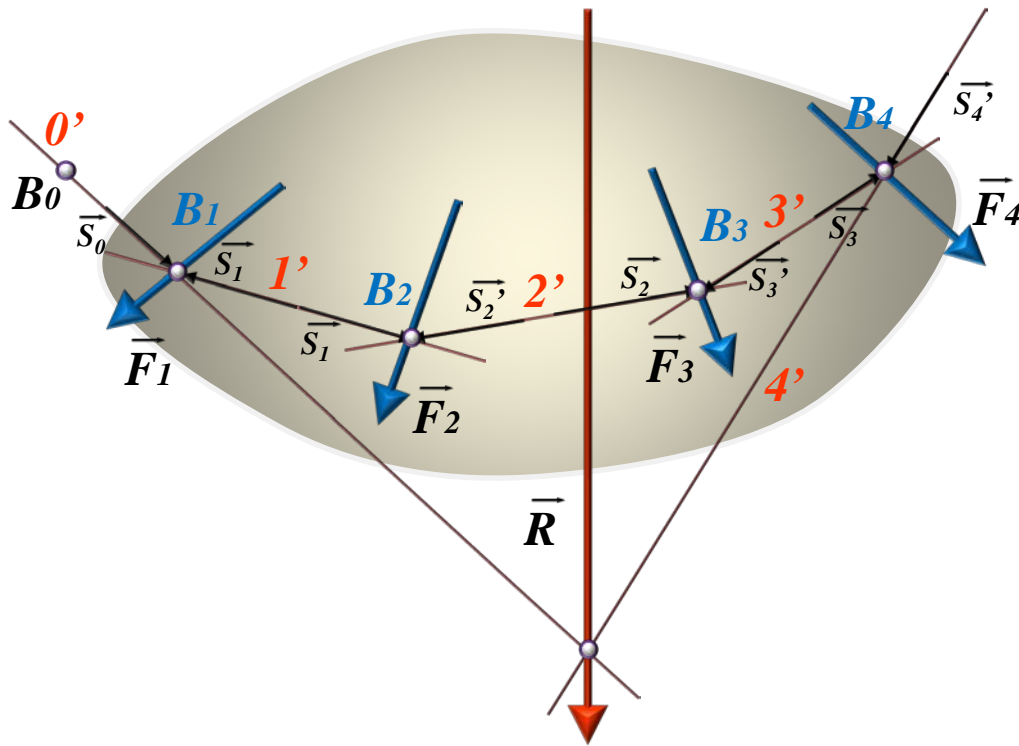
$$\vec{F}_2 = \vec{S}_1 + \vec{S}_2',$$

$$(\vec{S}_1 + \vec{S}_1') = 0,$$

$$\vec{R} = (\vec{F}_1, \vec{F}_2)$$

$$\vec{R} = (\vec{S}_0, \vec{S}_1', \vec{S}_1, \vec{S}_2') = (\vec{S}_0, \vec{S}_2')$$

Përcaktimi i rezultatës së sistemit të forcave me metodë grafike



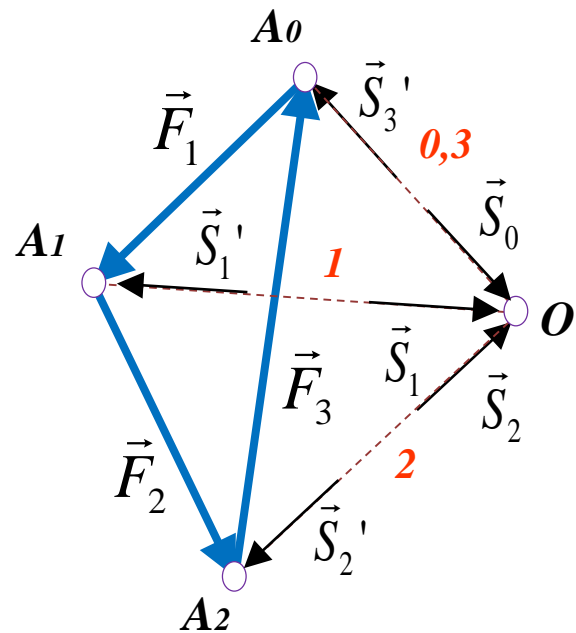
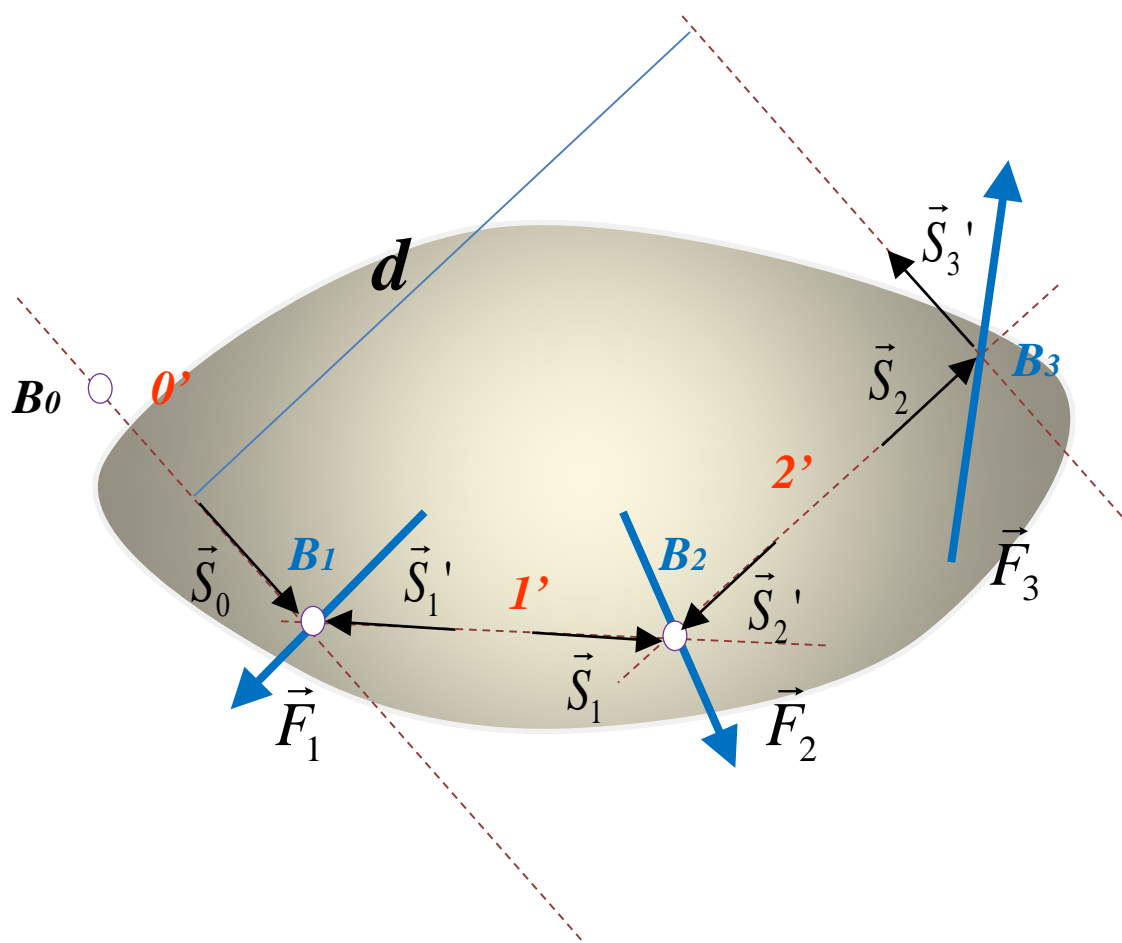
$$\vec{F}_1 = \vec{S}_0 + \vec{S}_1', \vec{F}_2 = \vec{S}_1 + \vec{S}_2', \vec{F}_3 = \vec{S}_2 + \vec{S}_3', \vec{F}_4 = \vec{S}_3 + \vec{S}_4'$$

$$(\vec{S}_1 + \vec{S}_1') = 0, (\vec{S}_2 + \vec{S}_2') = 0, (\vec{S}_3 + \vec{S}_3') = 0,$$

$$\vec{R} = (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4) = (\vec{S}_0, \vec{S}_1', \vec{S}_1, \vec{S}_2', \vec{S}_2, \vec{S}_3', \vec{S}_3, \vec{S}_4') = (\vec{S}_0, \vec{S}_4')$$

Zberthimi i sistemit të forcave në rrafsh në qift forcash

Sistemi i forcave në rrafsh zbërthehet në qift forcash nese shumkendeshi i forcave është i mbyllur, ndërsa shumkëndëshi tërkuzor i hapur.



$$\vec{F}_1 = \vec{S}_0 + \vec{S}_1',$$

$$\vec{F}_2 = \vec{S}_1 + \vec{S}_2',$$

$$\vec{F}_3 = \vec{S}_2 + \vec{S}_3',$$

$$(\vec{S}_1, \vec{S}_1') = 0,$$

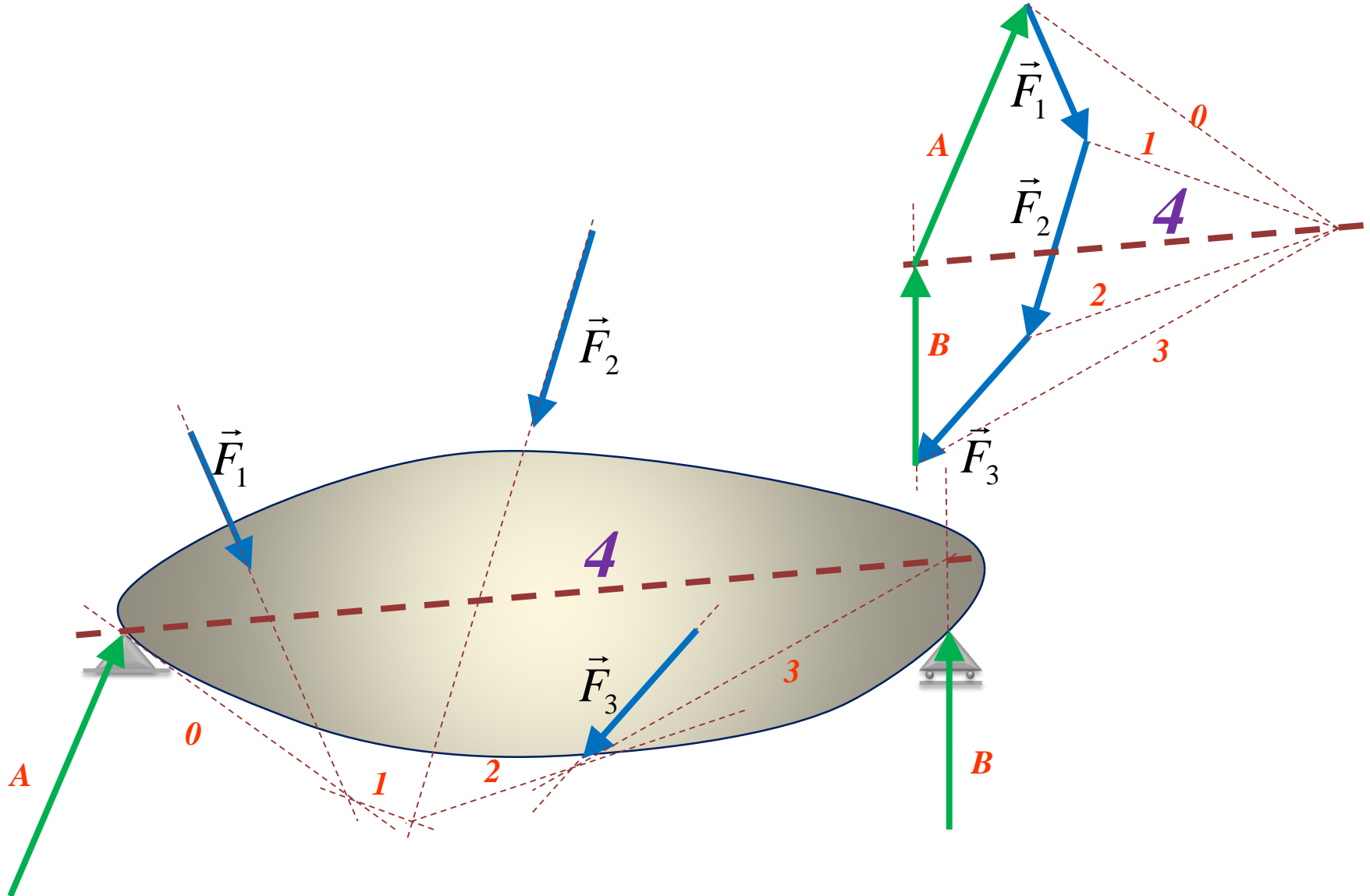
$$(\vec{S}_2, \vec{S}_2') = 0,$$

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3) = (\vec{S}_0, \vec{S}_1', \vec{S}_1, \vec{S}_2', \vec{S}_2, \vec{S}_3') = (\vec{S}_0, \vec{S}_3')$$

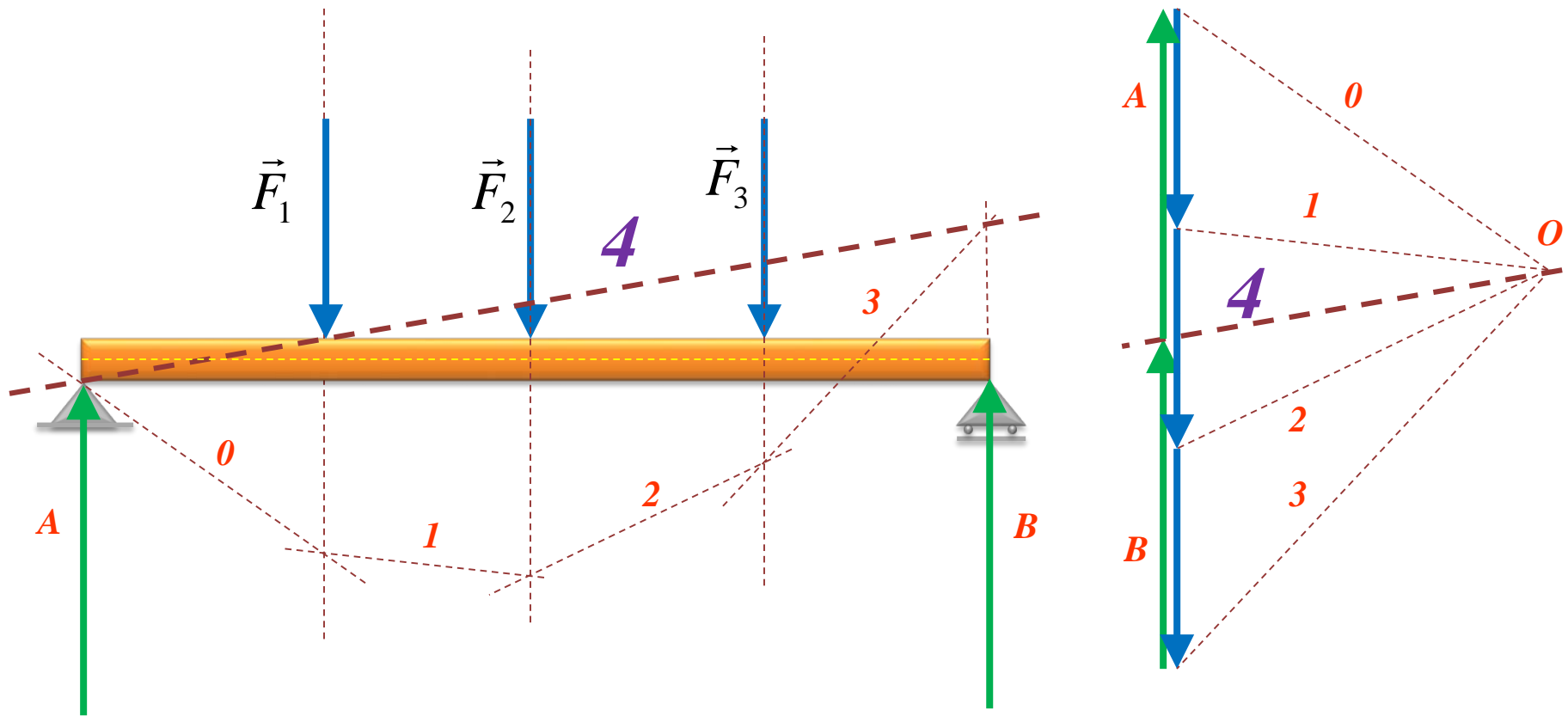
Kushtet grafike të ekuilibrit të sistemit të forcave në rrafsh

Që sistemi i forcave në rrafsh të jetë në ekuilibër është e nevojshme dhe e mjaftueshme që shumkëndëshi i forcave dhe shumkëndëshi tërkuzor të jenë të mbyllur.

Caktimi i reaksioneve të mbështetësve me metodën grafike



- **Pervetësohet përpjesa për gjatësi dhe për forcë,**
- **Zgjedhet poli O dhe formohen rrezet e poligonit të forcave,**
- **Drejtimi i reaksionit A nuk dihet paraprakisht, deri sa drejtimi i reaksionit B dihet**
- **Duke filluar nga pika A barten rrezet e shumkëndëshit 0, 1, 2, 3, dhe fitohet drejtëza 4**
- **Drejtëza 4 bartët në shumkëndëshin e forcave e cila kalon nëpër pikën O**
- **Reaksioni B caktohet nga forca e fundit deri në pikëprerjen me drejtëtën 4(pika e), prej pikës e deri tek pika a përcaktohet reaksioni A dhe drejtimi i tijë.**



Në rastin e veprimit të forcave paralele konstruktimi i shumkëndëshit të forcave në trup mundë të filloj nga cila do pikë, pasi që dy reaksioneve u dihen drejtimet paraprakishtë.

Zbërthimi i forcës përmes shumkëndëshit dhe shumkëndëshit tërkuzor

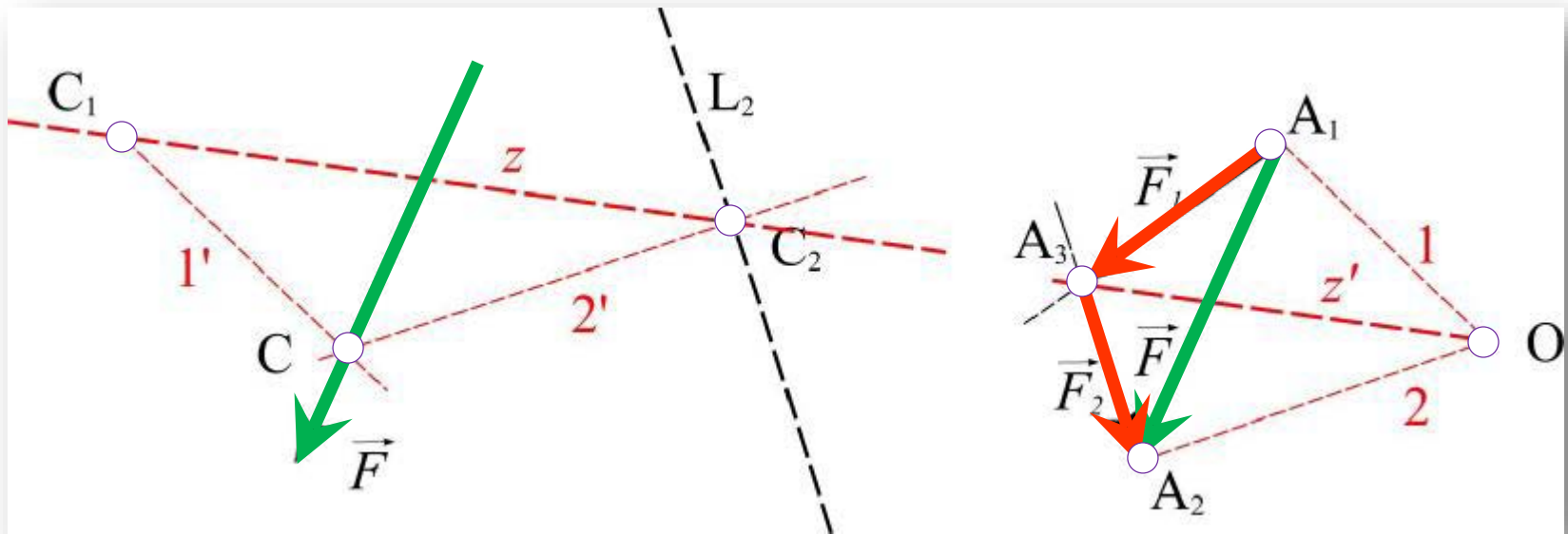
Forcën mundë ta zbërthejmë në dy komponente nese e dimë: pikëveprimin e njërës komponentë dhe drejtimin e komponentës tjetër.
Drejtimet e dy komponentëve.

Forcën F duhet zbërthyer në komponentet F_1 dhe F_2

Të njohura :

Pikëveprimi i komponentës së parë C_1

Drejtimi komponentës së dytë L_2



Zgjedhët poli O

Përcaktohen rrezet e shukëndëshit, 1 dhe 2

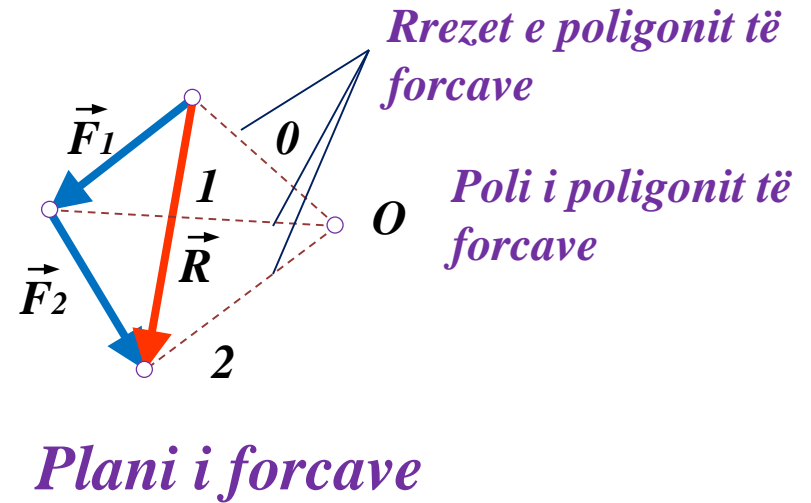
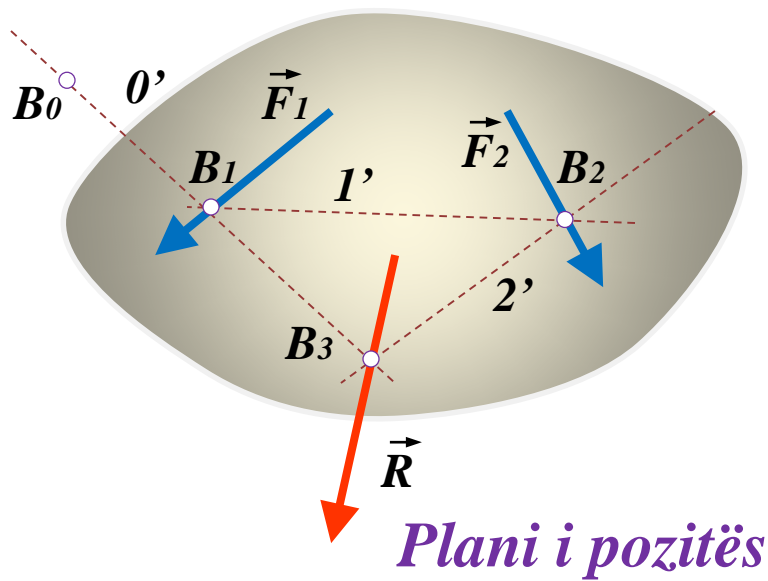
Nga pika C tërhiqet rrezja 2 deri te pika C₂ (pikëprerja me drejtimin e komponentës së dytë)

Drejtëza e fituar z paraqet pjesën përfundimtare të shumkëndëshit tërkuzor

Nëpër pikën O tërhiqet rrezja z, ndërsa nga pika A₂ drjtimi i komponentës paralel me L₂

Prreerja e këtyre dy drejtëzave jep pikën A₃ që përcakton komponentën tjetër (F₁)

$$\overline{A_3A_2} = \vec{F}_2 \quad \overline{A_1A_3} = \vec{F}_1$$



Konstruktohet poligoni i forcave a,b,c,

Pervetësohet përpjesa,

Zgjedhet poli O dhe formohen rrezet e poligonit të forcave,

Ana përfundimtare e polignit të forcave është rezultanta,

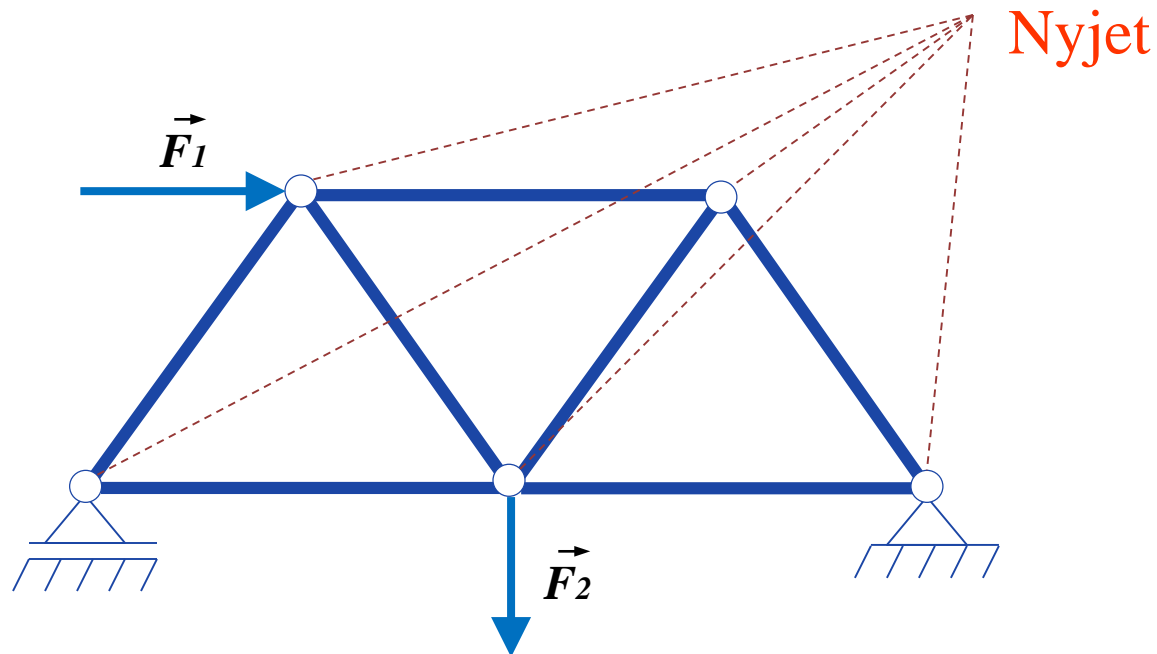
Konstruktohet shumkëndëshi tërkuzor $B_0, B_1, B_2,$

Në prerjen e drejtëzës së parë dhe të fundit të shumkëndëshit tërkuzor është pika $B_3,$

Rezultanta e e forcave të dhëna kalon nëpër pikën $B_3.$

MBAJTËSIT KAPRIAT

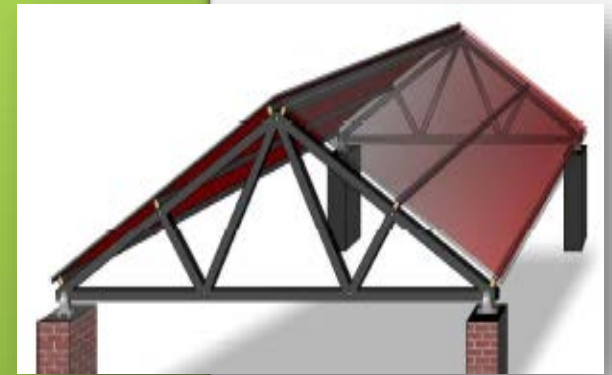
Mbajtës kapriat quhet struktura e ngurtë e cila përbëhet nga shufrat e drejta të cilat në skajet e tyre janë të lidhura me nyje.



Të gjitha forcat e jashtme veprojnë në nyje.

Supozimet që merren gjatë zgjidhjes së mbajtësit kapriat:

Pesha e shufrave nuk merret parasysh,
forcat veprojnë në nyje,
shufrat mes veti janë të lidhura me sharnierë,
shufrat janë vijëdrejta.
Shufrat mundë të punojnë në shtypje dhe terheqje.



JONDRYSHUESHMERIA STRUKTURORE E MBAJTESIT KAPRIAT

Figura bazë e jo-ndryshueshmërisë është **trekëndëshi**.

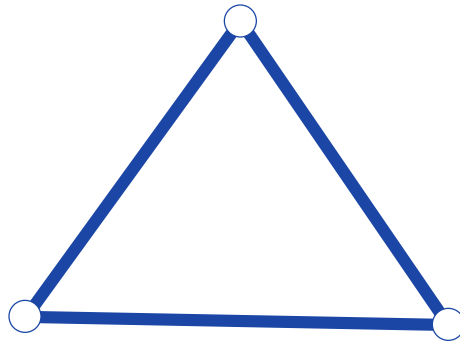


Figura bazë e jondryshueshmerisë

Nyja e mbajtësit kapriat hapsinorë



PERCAKTUESHMERIA STATIKE E MBAJTËSIT KAPRIAT

Le të jenë:

s -numri i shufrave

r -numri i reaksioneve

n -numri i nyjave

Për mbajtësin kapriat vlenë:

$$\mathbf{L = (s + r) - 2n}$$

$L = 0$ Mbajtësi kapriat është statikisht i caktuarë.

$L > 0$ Mbajtësi kapriat ka shufra të tepërta

$L < 0$ Mbajtësi kapriat është i ndryshueshëm(mekanizëm)

MËNYRAT E ZGJIDHJES SË MBAJTËSIT KAPRIAT

Reaksionet dhe forcat në shufrat e mbajtësit kapriat mundë të caktohen në dy mënyra:

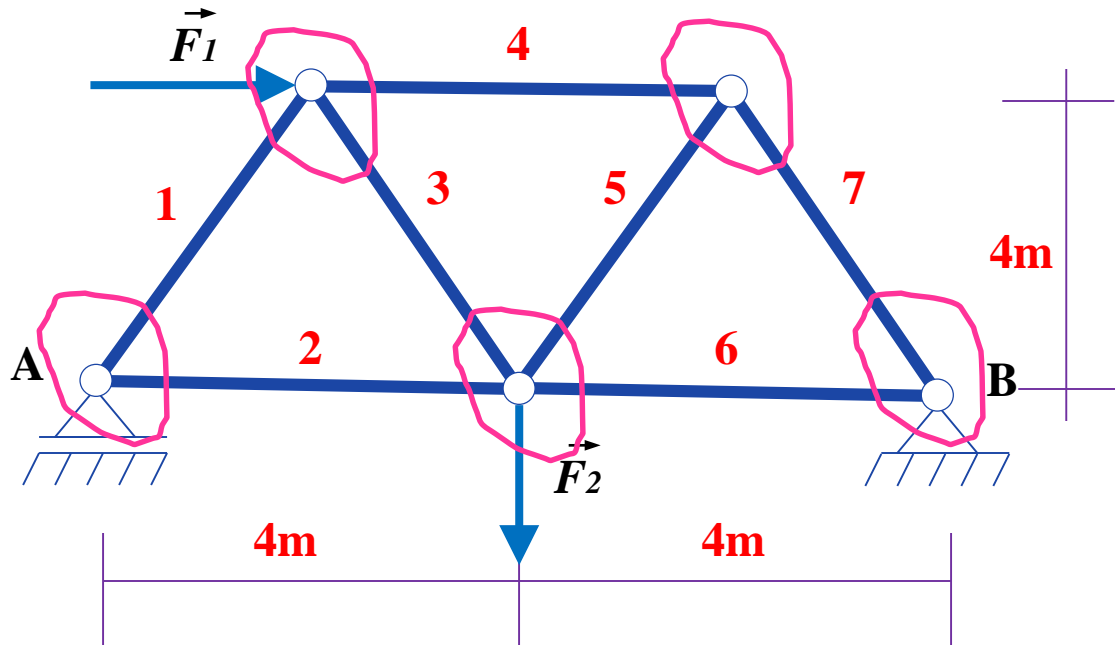
Metodat analitike

Metodat grafike

Metodat analitike

Metoda e ekuilibrit të nyjeve - Analiza e ekuilibrit të sëcilës nyjeve bazohet në ekuilibrin e forcave kongurente në rrafsh.

Pas caktimit të reaksioneve zgjidhja fillon duke u nisur nga nyja më e thjeshtë (nyja që ka vetëm dy të pa njohura)



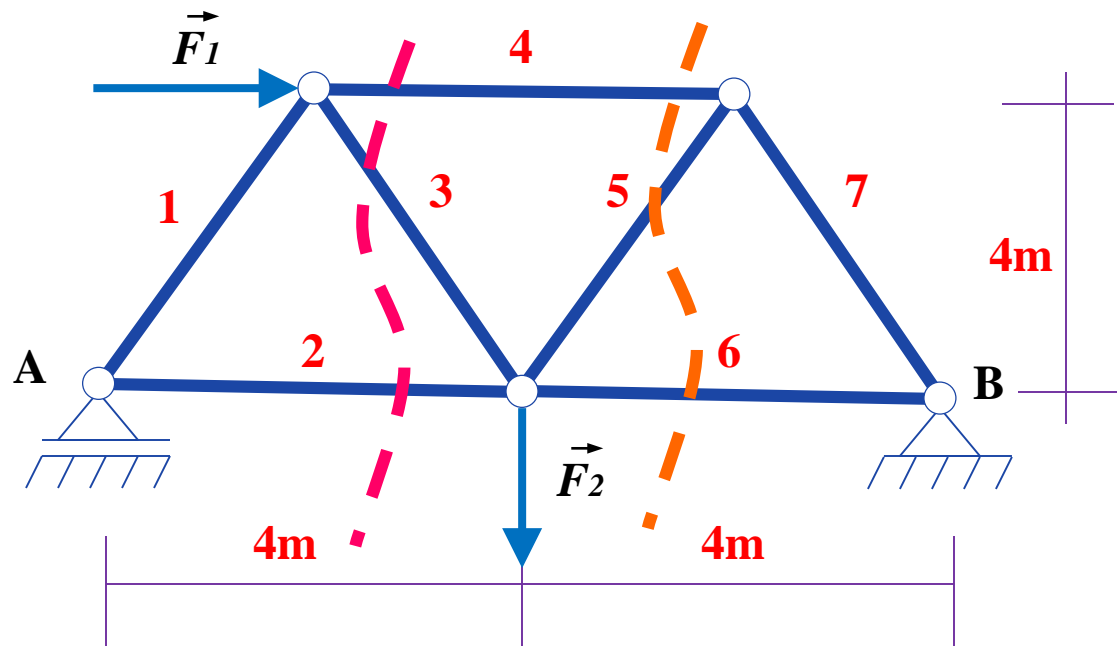
Kushtet e ekuilibrit për qfarëdo nyje janë:

$$\Sigma X=0$$

$$\Sigma Y=0$$

Metoda e Ritterit - Sëpari caktohen reaksionet. Pastaj kapriata ndahët në dy pjesë, Nëpër tri shufra të cilat deshirojmë ti caktojmë e të cilat nuk pritën në të njëjtën nyje.

Veshtrohët vetëm njëra pjesë e mbajtësit derisa ndikimi i pjesës tjetër nuk merret parasyshë.



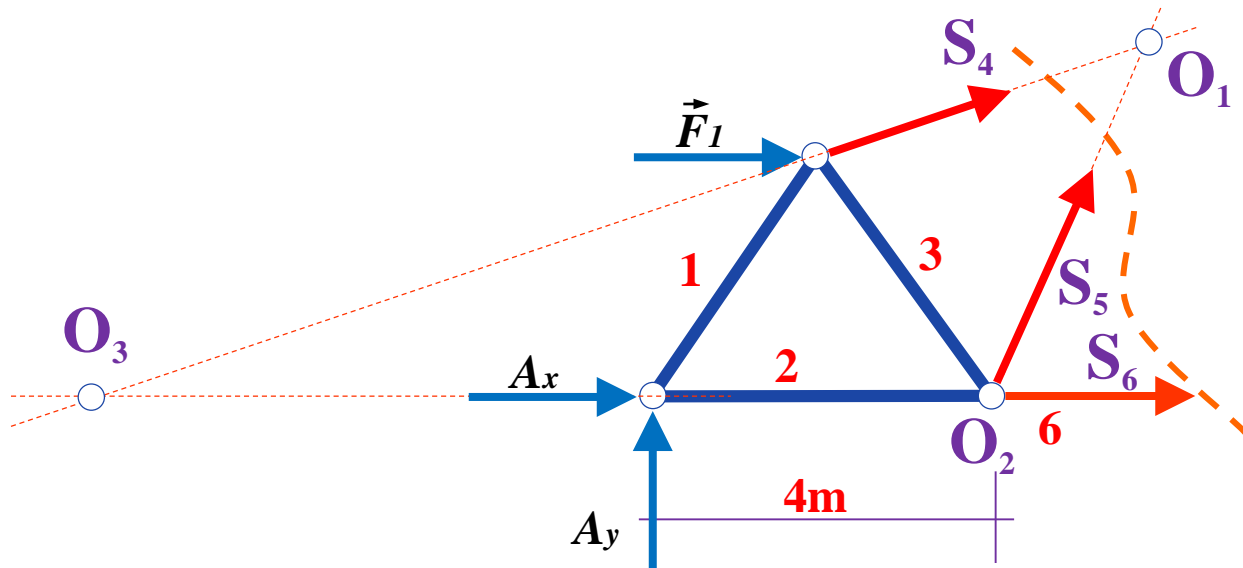
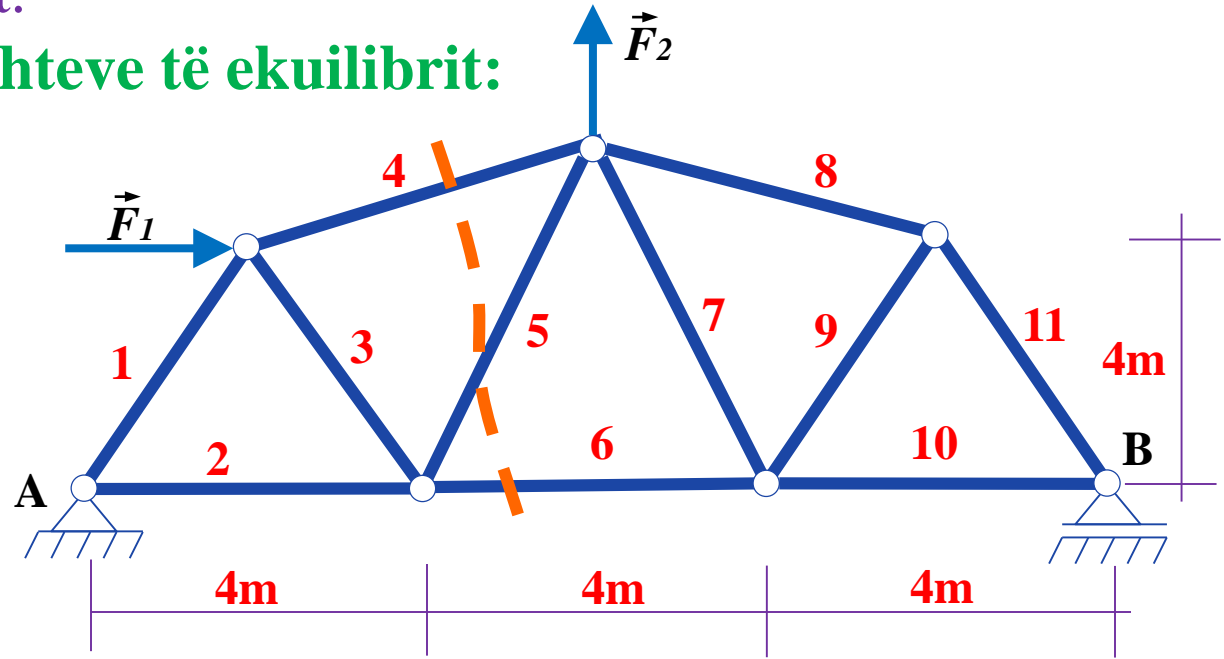
Në pjesën e kapriatës që shqyrtohet shtrohën njëra nga format e kushteve të ekuilibrit.

Forma e tretë e kushteve të ekuilibrit:

$$\Sigma M_{O_1} = 0,$$

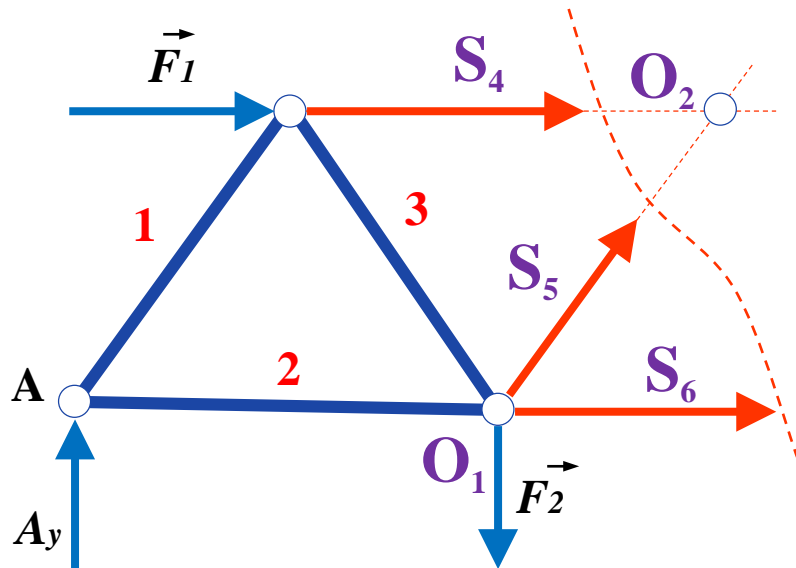
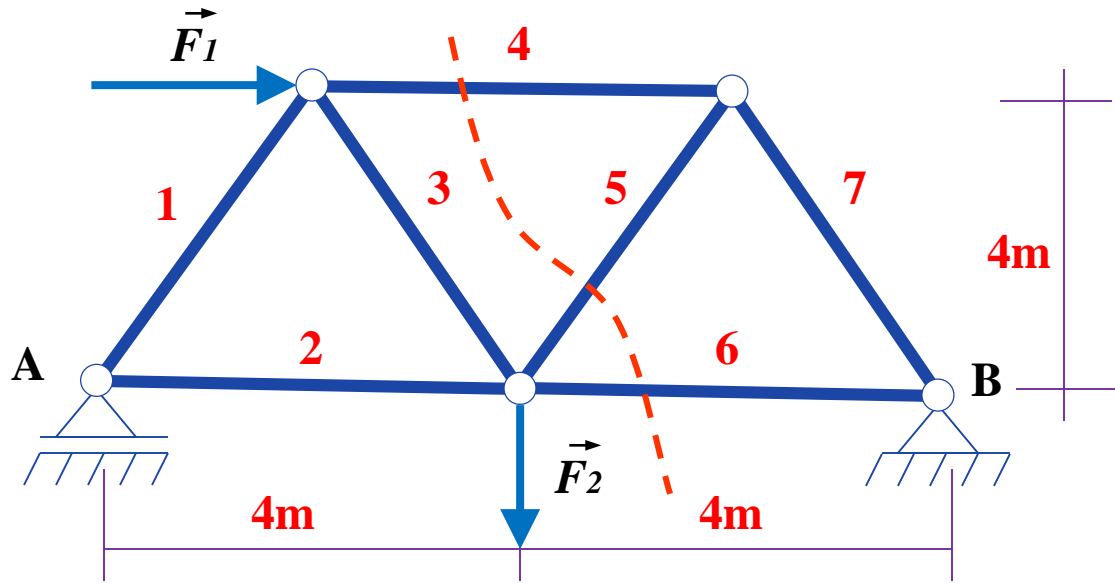
$$\Sigma M_{O_2} = 0,$$

$$\Sigma M_{O_3} = 0.$$



Në rastin kur dy shufra janë paralele aplikohet forma e dytë e kushteve.

Forma e dytë e kushteve të ekuilibrit:



$$\Sigma M_{O_1} = 0,$$

$$\Sigma M_{O_2} = 0,$$

$$\Sigma Y = 0.$$

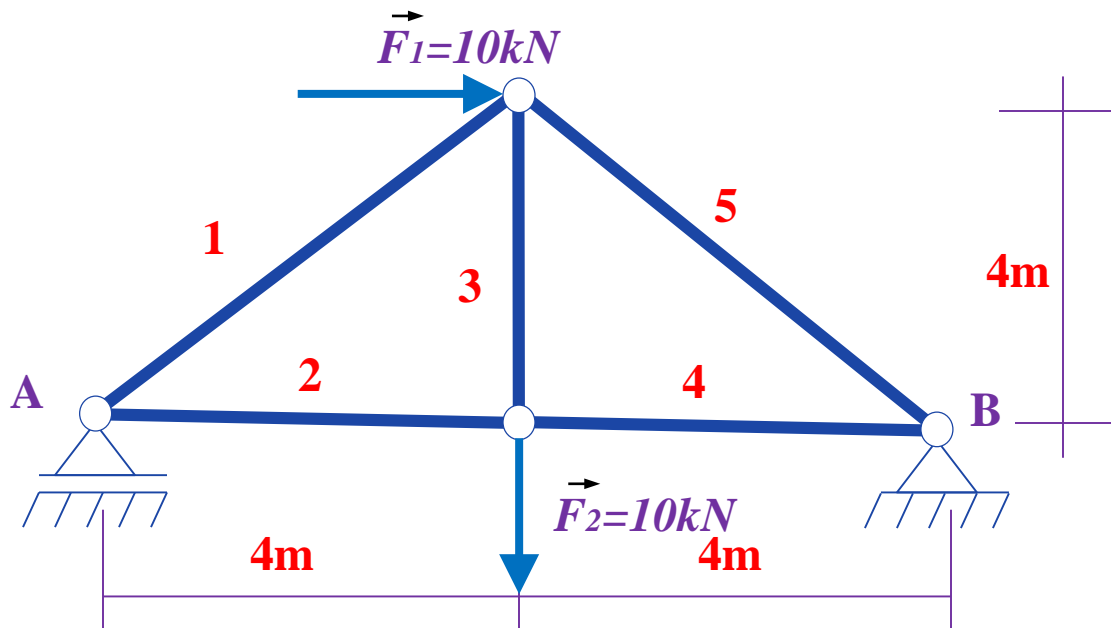
Metodat grafike

Metoda e ekuilibrit të nyjeve - Në secilën nyje vepron sistem i forcave Kongurente, kushti i nevojshëm dhe i mjaftueshëm që nyja e kapriatës të jetë në ekuilibër është që shumkëndëshi i forcave të jetë i mbyllur. Do të thotë që duhet të vizatohen aq poligone sa është edhe numri i nyjeve.

Plani i Maksvel Kremon-it - Kjo metodë është e bazuarë në konstruktimin e poligonit të forcave i cili i bashkonë të gjitha poligonet e nyjeve të veqanta.

Metoda e Kulmanit - Është metoda grafike e cila mundëson përcaktimin e forcave në tri shufra. Edhe te kjo metodë vështrohet vetëm njëra pjesë e prerë e kapriatës.

Shembull: Të caktohen forcat në shufrat e kapriatës me metodën Analitike dhe grafike të ekuilibrit të nyjeve.

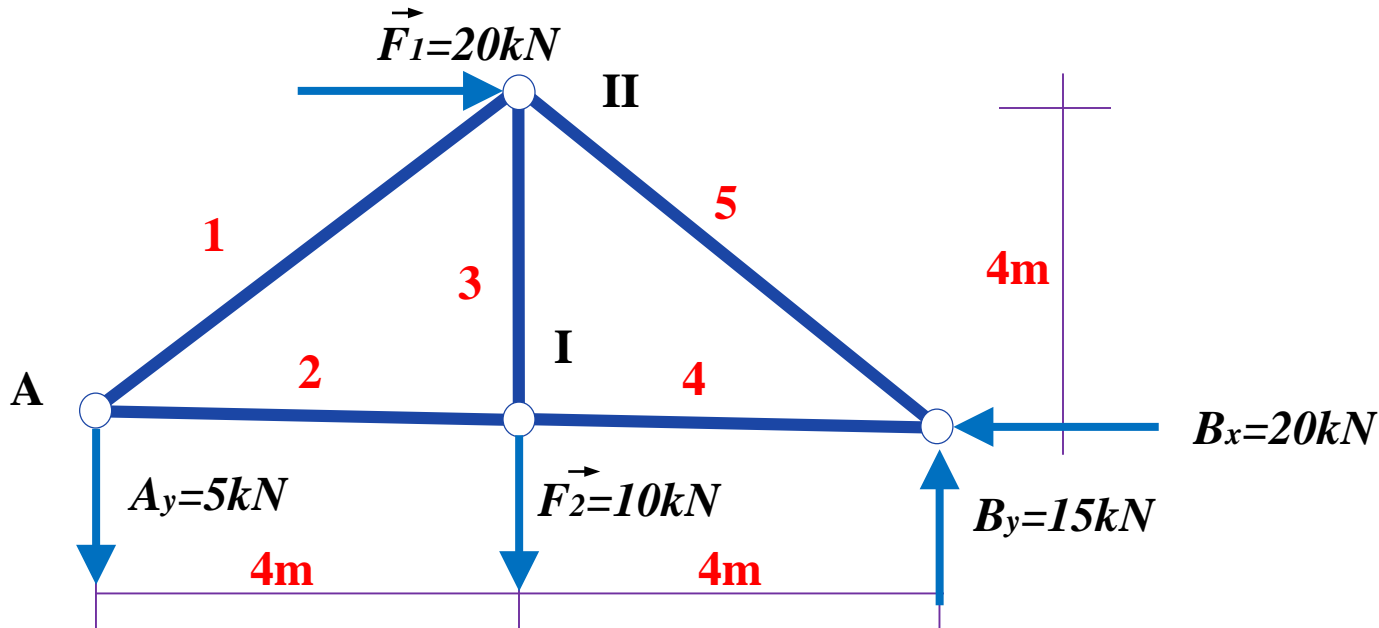


Kapriata ka $s = 5$ shufra, $r = 3$ reaksione dhe $n = 4$ nyje.

Kushti i përcaktueshmërisë statike $L = (s + r) - 2n$, $L = (5 + 3) - 2 \times 4$,

$L = 0$ Mbajtësi është statikisht i caktuarë

Reaksionet e lidhjeve



Kushtet e ekuilibrit:

$$\Sigma X = 0 \Rightarrow F_1 - B_x = 0,$$

$$\Sigma Y = 0 \Rightarrow F_2 - A_y - B_y = 0,$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -F_2 \times 4 - F_1 \times 4 - B_y \times 8 = 0,$$

Reaksionet e lidhjeve janë:

$$A_y = 5 \text{ kN}, B_x = 20 \text{ kN}, B_y = 15 \text{ kN}.$$

Ekulibri i nyjës A

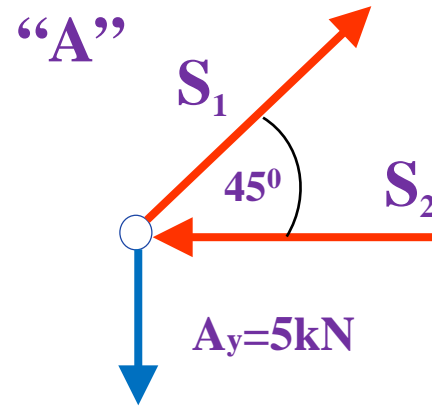
Përcaktimi i forcave në shufrat A_y , S_1 , S_2

$$\Sigma X = 0 \Rightarrow S_1 \cdot \cos 45^\circ - S_2 = 0,$$

$$\Sigma Y = 0 \Rightarrow S_1 \cdot \sin 45^\circ - A_y = 0,$$

$$S_1 = 7.07 \text{ kN},$$

$$S_2 = 5 \text{ kN},$$



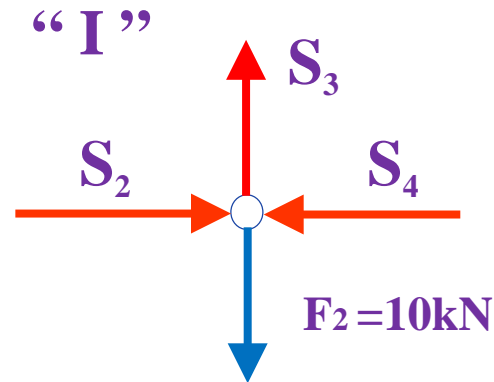
Ekulibri i nyjës I

$$\Sigma X = 0 \Rightarrow -S_2 + S_4 = 0,$$

$$\Sigma Y = 0 \Rightarrow S_3 - F_2 = 0,$$

$$S_3 = 10 \text{ kN},$$

$$S_4 = 5 \text{ kN},$$



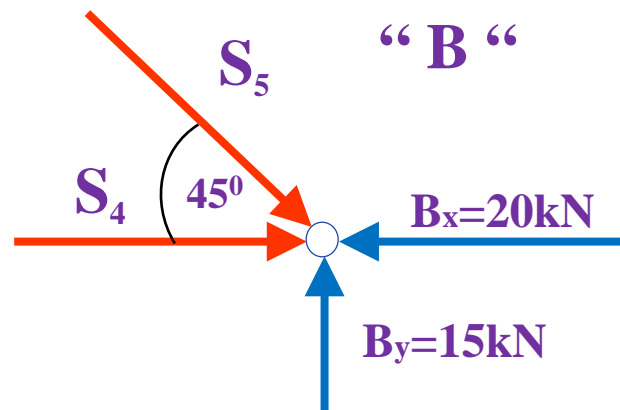
Ekuilibri i nyjës B

$$\Sigma X = 0 \Rightarrow S_4 + S_5 \cdot \cos 45^\circ - B_x = 0,$$

$$\Sigma Y = 0 \Rightarrow B_y - S_5 \cdot \sin 45^\circ = 0,$$

$$S_5 = 21.21 \text{ kN},$$

$$S_4 = 5 \text{ kN},$$



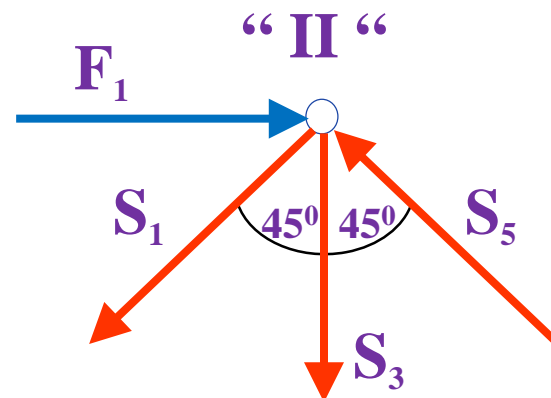
Ekuilibri i nyjës II (Sherben si kontrol)

$$\Sigma X = 0 \Rightarrow -S_1 \cdot \sin 45^\circ - S_5 \cdot \sin 45^\circ + F_1 = 0,$$

$$\Sigma Y = 0 \Rightarrow -S_1 \cdot \cos 45^\circ - S_3 + S_5 \cdot \cos 45^\circ = 0,$$

$$-5 - 15 + 20 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

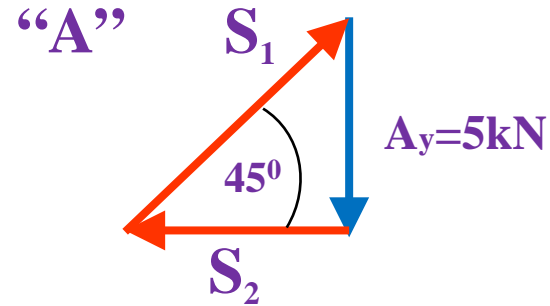
$$-5 - 10 + 15 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$



Ekulibri i nyjës A (Metoda Grafike)

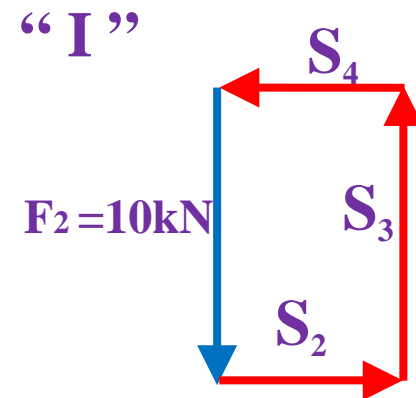
Përcaktimi i forcave në shufrat A_y , S_1 , S_2

$$S_1 = 7.07 \text{ kN},$$
$$S_2 = 5 \text{ kN},$$



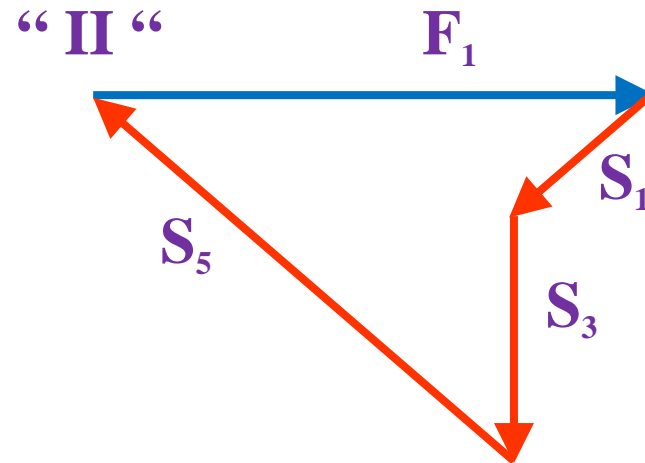
Ekulibri i nyjës I (Metoda Grafike)

$$S_2 = 5 \text{ kN},$$
$$S_3 = 10 \text{ kN},$$
$$S_4 = 5 \text{ kN},$$



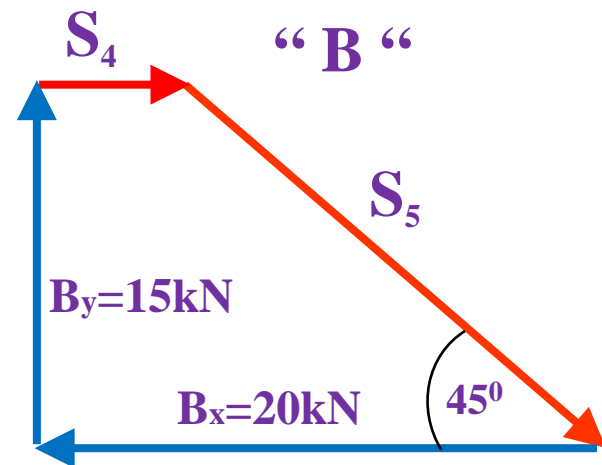
Ekuilibri i nyjës II (Metoda Grafike)

$$\begin{aligned} S_1 &= 7.07 \text{ kN}, \\ S_3 &= 10 \text{ kN}, \\ S_5 &= 21.21 \text{ kN}, \end{aligned}$$



Ekuilibri i nyjës B (Metoda Grafike - Kontrollë)

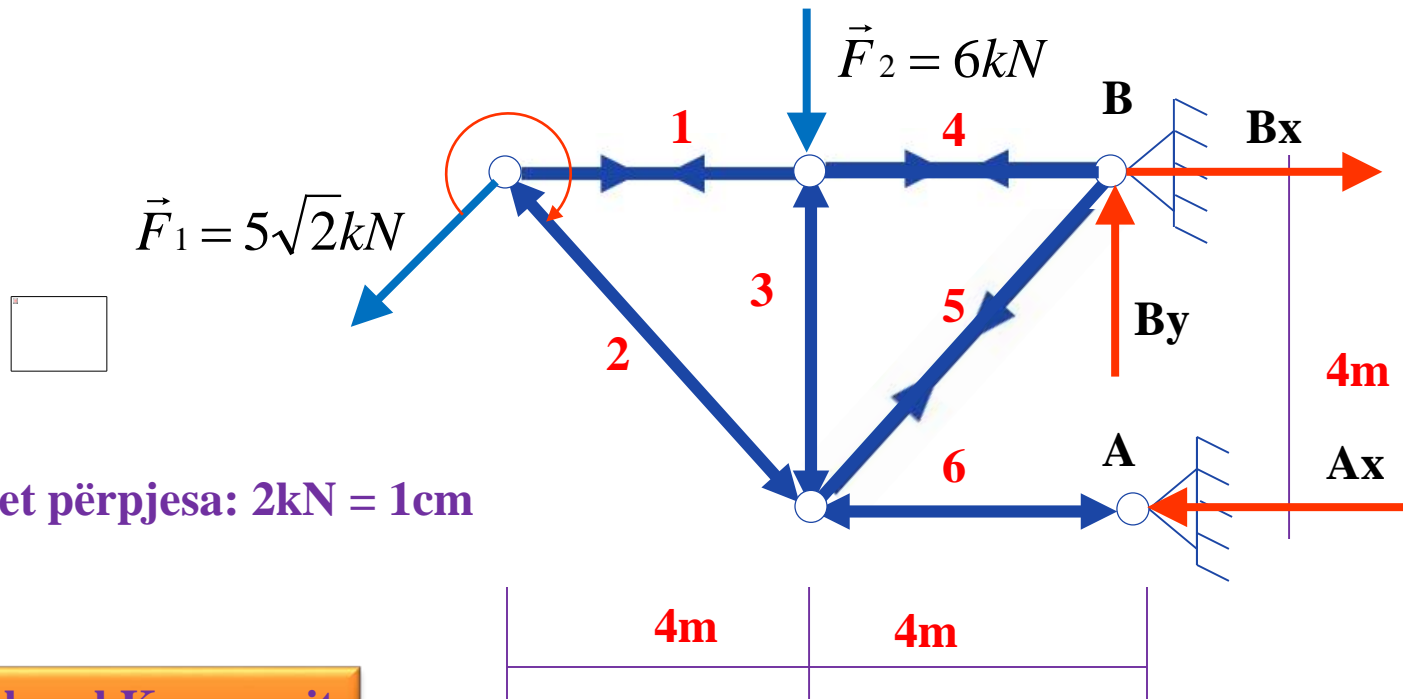
$$\begin{aligned} S_4 &= 5 \text{ kN}, \\ S_5 &= 21.21 \text{ kN}, \end{aligned}$$



Plani i Maksvel Kremon-int

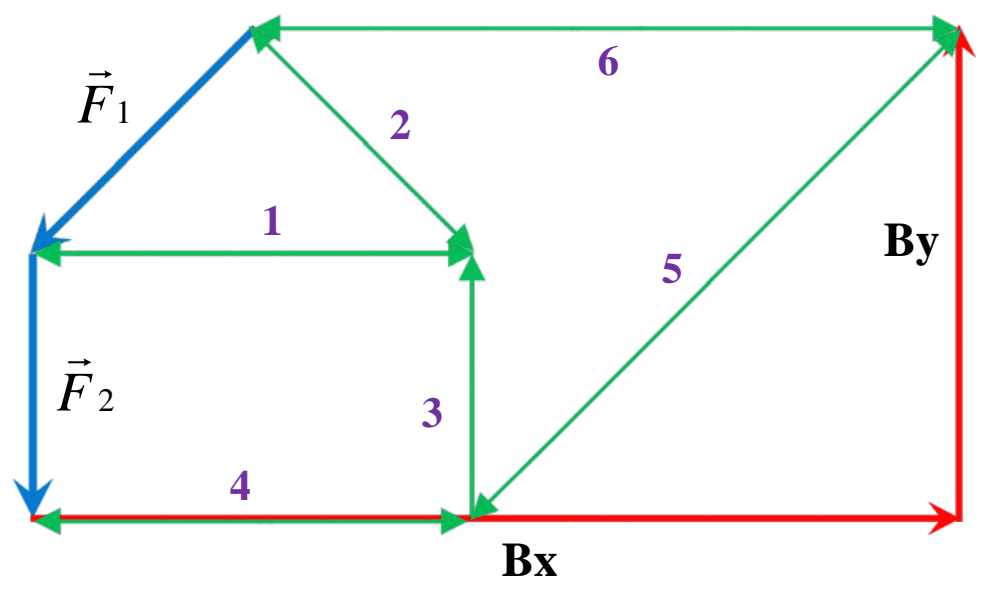
Renditja e hapava për zgjidhjen e problemit është si vijon:

- Caktohen reaksionet e lidhjeve të kapriatës;
- Konstruktohet poligoni i mbyllur i të gjitha forcave të jashtme dhe reaksioneve të lidhjeve. Të gjitha forcat bartën në poligon në drejtim të akrepave të orës;
- Vizatohet poligoni për të gjitha nyjet e kapriatës duke filluar nga nyja e cila ka vetëm dy shufra. Poligoni i sëcilës nyje fillon nga shufrat e njohura (paraprakishtë të caktuara).
- Kahjet e fituara të shufrave bartën në mbajtësin kapriat.
- Formohet tabela në të cilën bartën vlerat e forcave në shufra me shënën përkatëse (tërheqje + , shtypje -).



Përvetësohet përpjesa: $2 \text{ kN} = 1 \text{ cm}$

Plani i Maksvel Kremon-it



- $S_1 = 10 \text{ kN}$
- $S_2 = -7.07 \text{ kN}$
- $S_3 = -6 \text{ kN}$
- $S_4 = 10 \text{ kN}$
- $S_5 = 15.56 \text{ kN}$
- $S_6 = -16 \text{ kN}$

Metoda e Culman-it

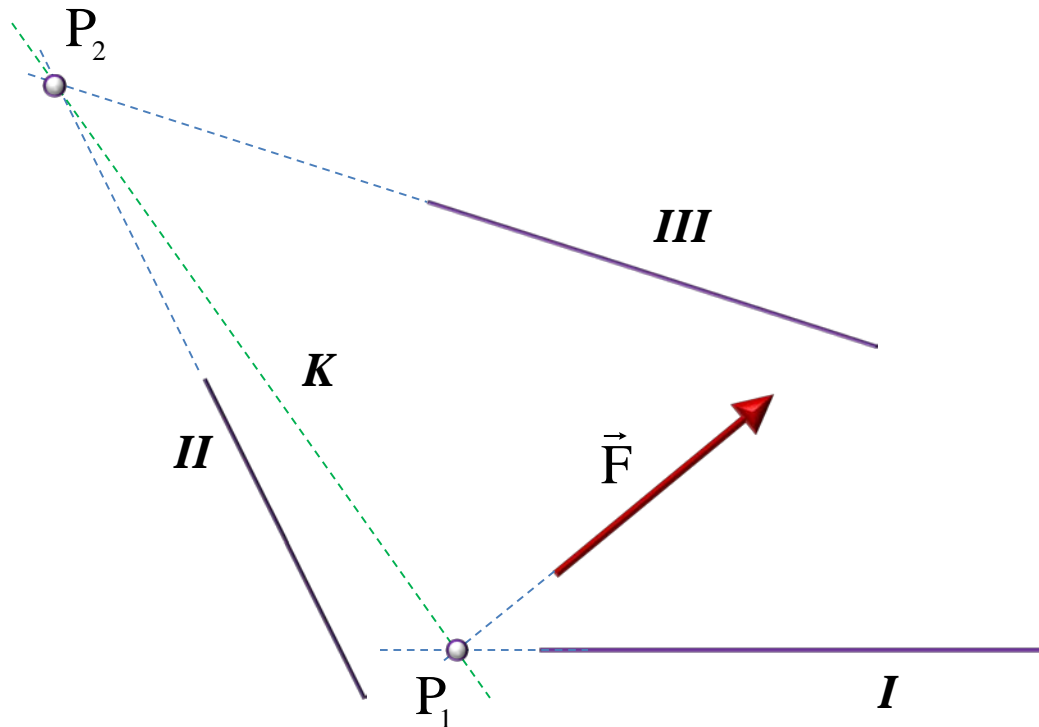
Metoda Kulmanit është metodë grafike me të cilën mundë të caktojme forcat në tri shufra të kapriatës.

Aplikohet metoda e prerjës. **Drejtëza e kulmanit**

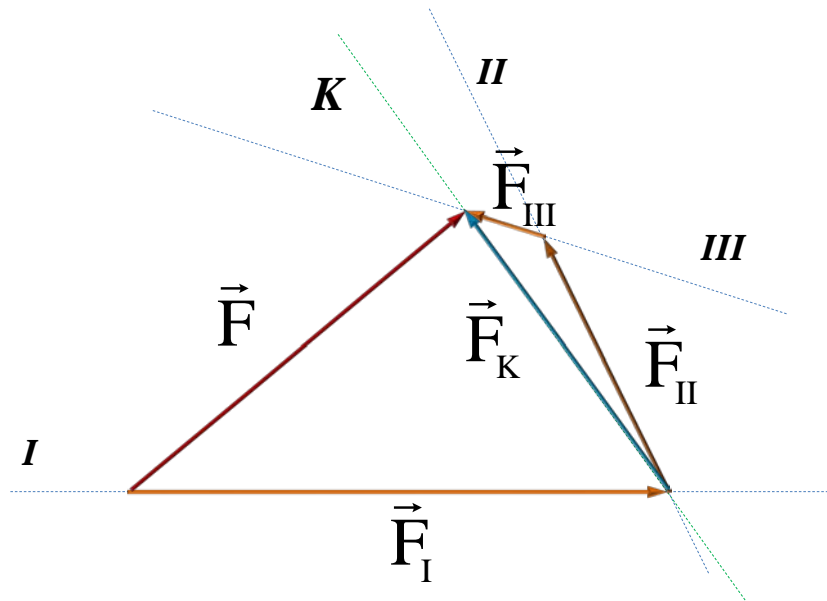
- Shqyrtohet ekuilibri i pjesës së prerë të kapriatës.
- Caktohet rezultanta e forcave të jashtme të pjesës së prerë RL,
- Ku prehet drejtimi i rezultantes me drejtimin e shufres S_6 terhiqet e ashtuquajtura drejtëza e Culman-it C,
- Formohet trekëndeshi i forcave për R_L , S_6 dhe C,
- Pasi caktohen forcat në shufren S_6 dhe drejtëzen e Culman-it formohet trekëndëshi tjetër për caktimin e forcave në shufrat S_4 dhe S_5 .

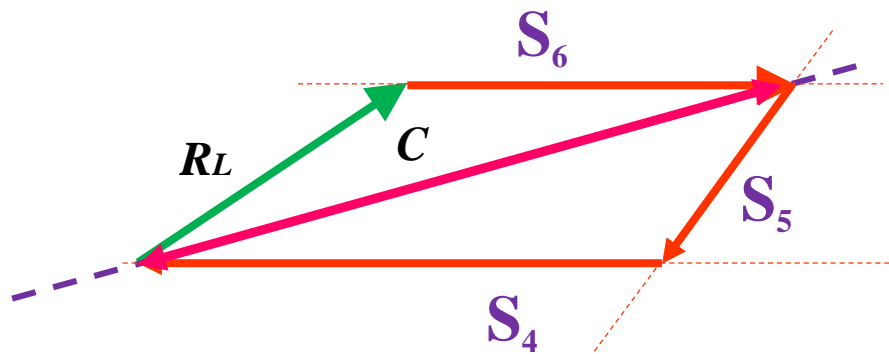
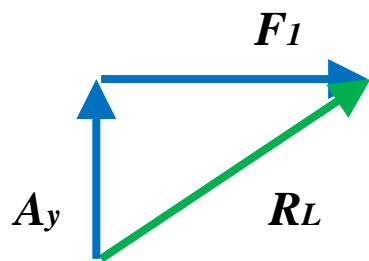
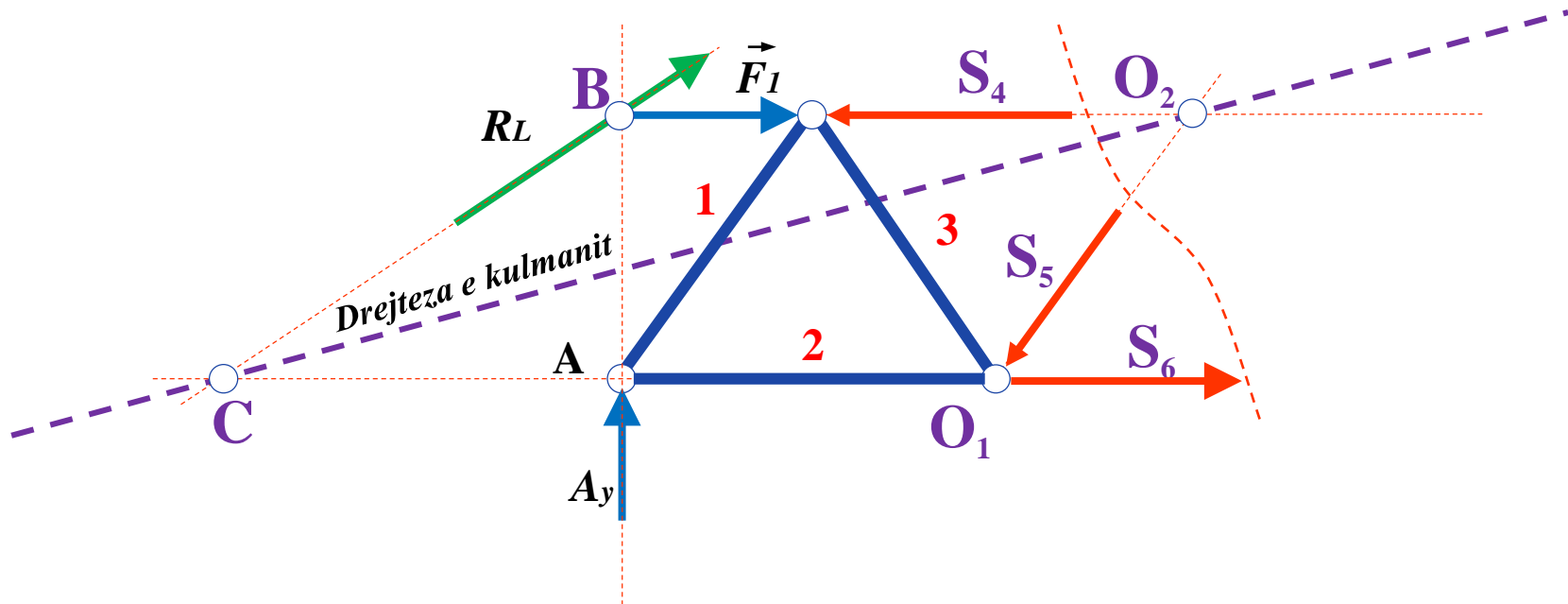
Zbërthimi i forcës në tri komponente- Drejtime

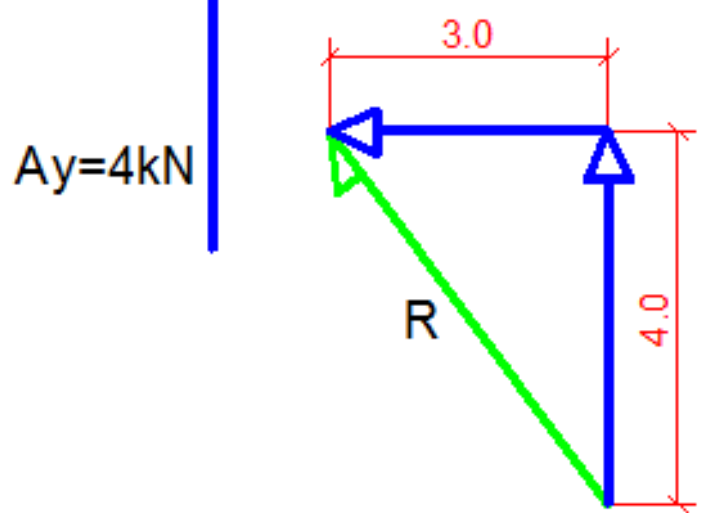
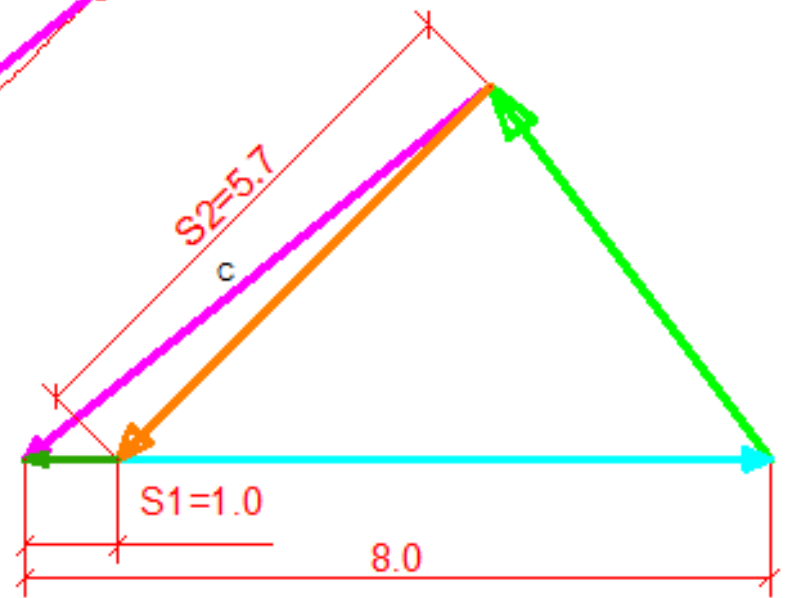
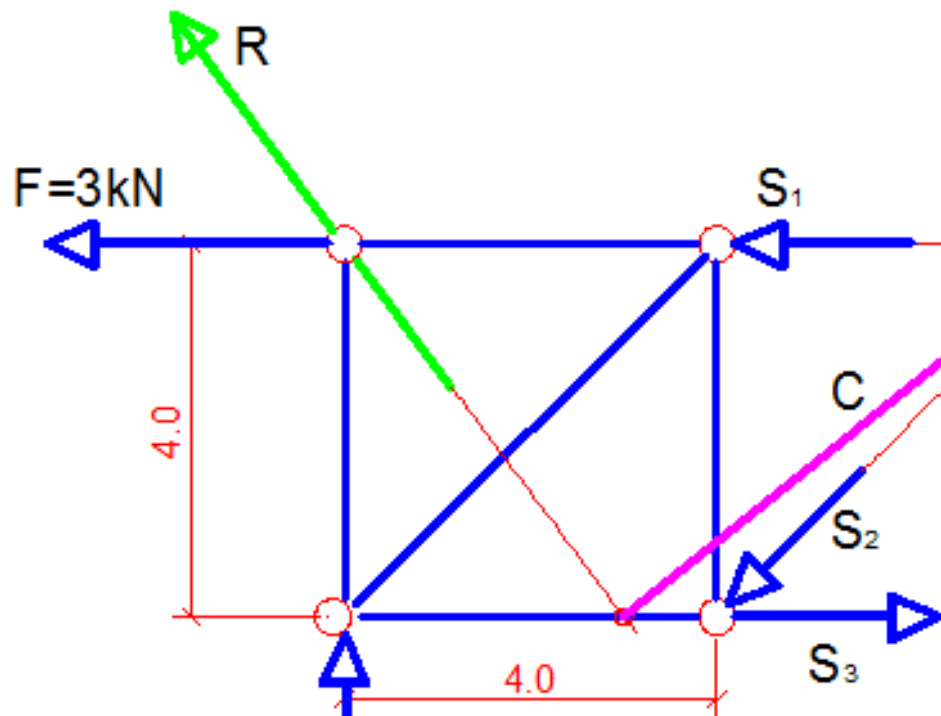
Jepet forca F dhe tri drejtimet (I, II, III) ne te cilat deshirojm me e zberthyer forcen. Ku priten vijëdrejtimet e forcës dhe drejtimi I caktohet pika P_1 , më pas ku priten drejtimet II dhe III caktohet pika P_2 . Me bashkimin e pikave P_1 dhe P_2 caktohet drejtëza K .



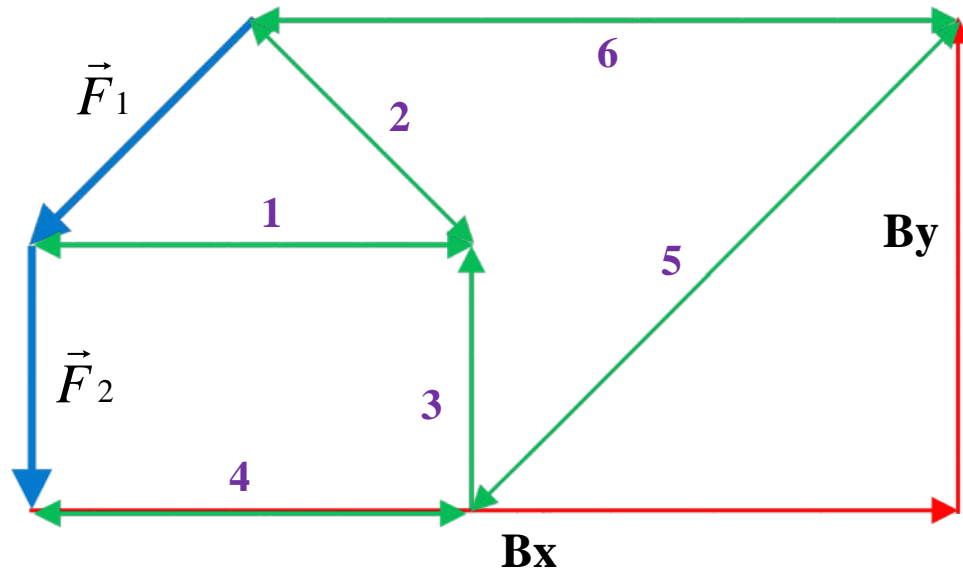
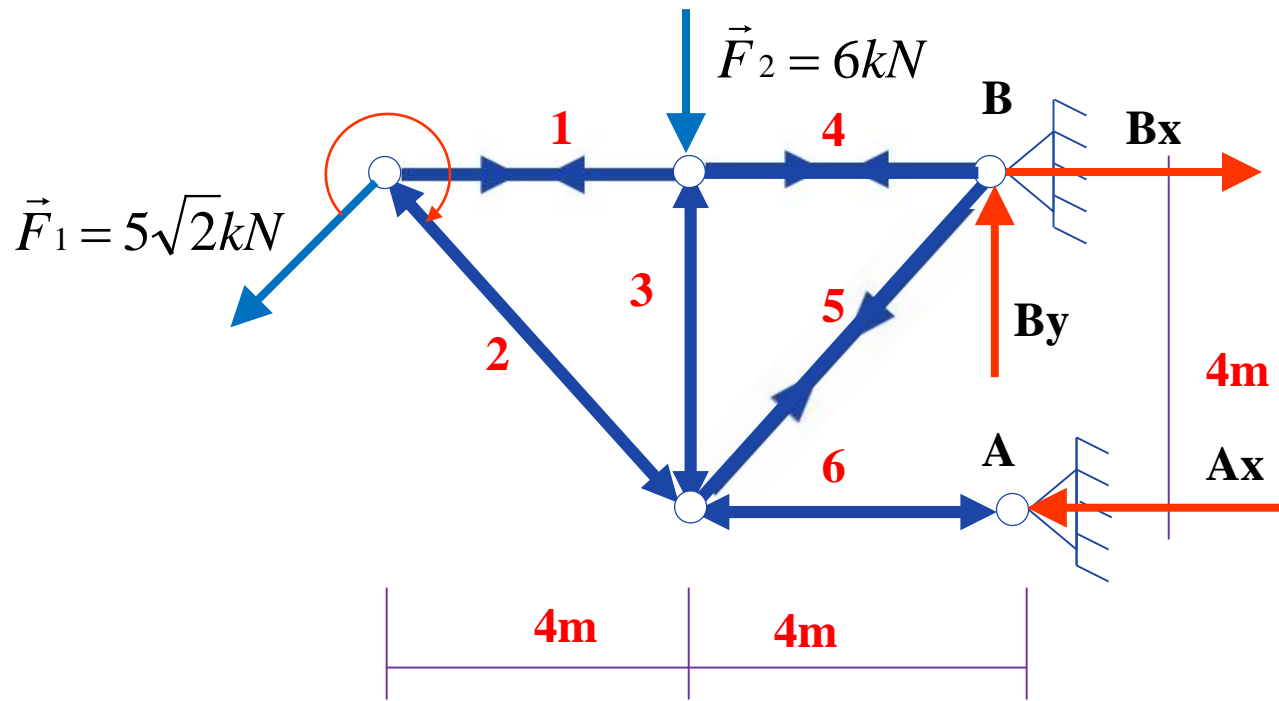
Fillimisht zberthehet Forca F në forcat (drejtimet) F_I dhe F_K , në vazhdim Forca F_K zberthehet në dy drejtimet F_{II} dhe F_{III} dhe kështu forca F është zbërthyer në tri drejtime.





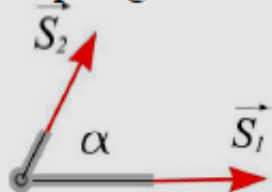


$A_y=4\text{kN}$



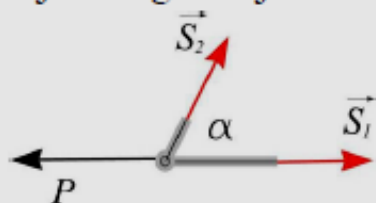
Disa raste speciale të ekuilibrit të nyjës

1) Nyja e pa ngarkuar



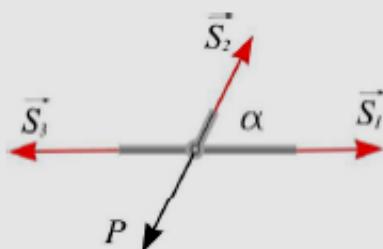
$$\left. \begin{array}{l} \sum X = 0, \\ \sum Y = 0. \end{array} \right\} \Rightarrow S_1 = 0, \quad S_2 = 0.$$

2) Në njërin nga drejtimet nuk ka forcë



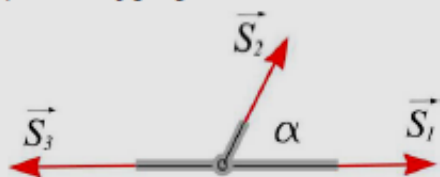
$$\left. \begin{array}{l} \sum X = 0, \\ \sum Y = 0. \end{array} \right\} \Rightarrow S_1 = P, \quad S_2 = 0.$$

3) Në nyje janë të lidhura tri shufra dhe vepron një forcë e jashtme.

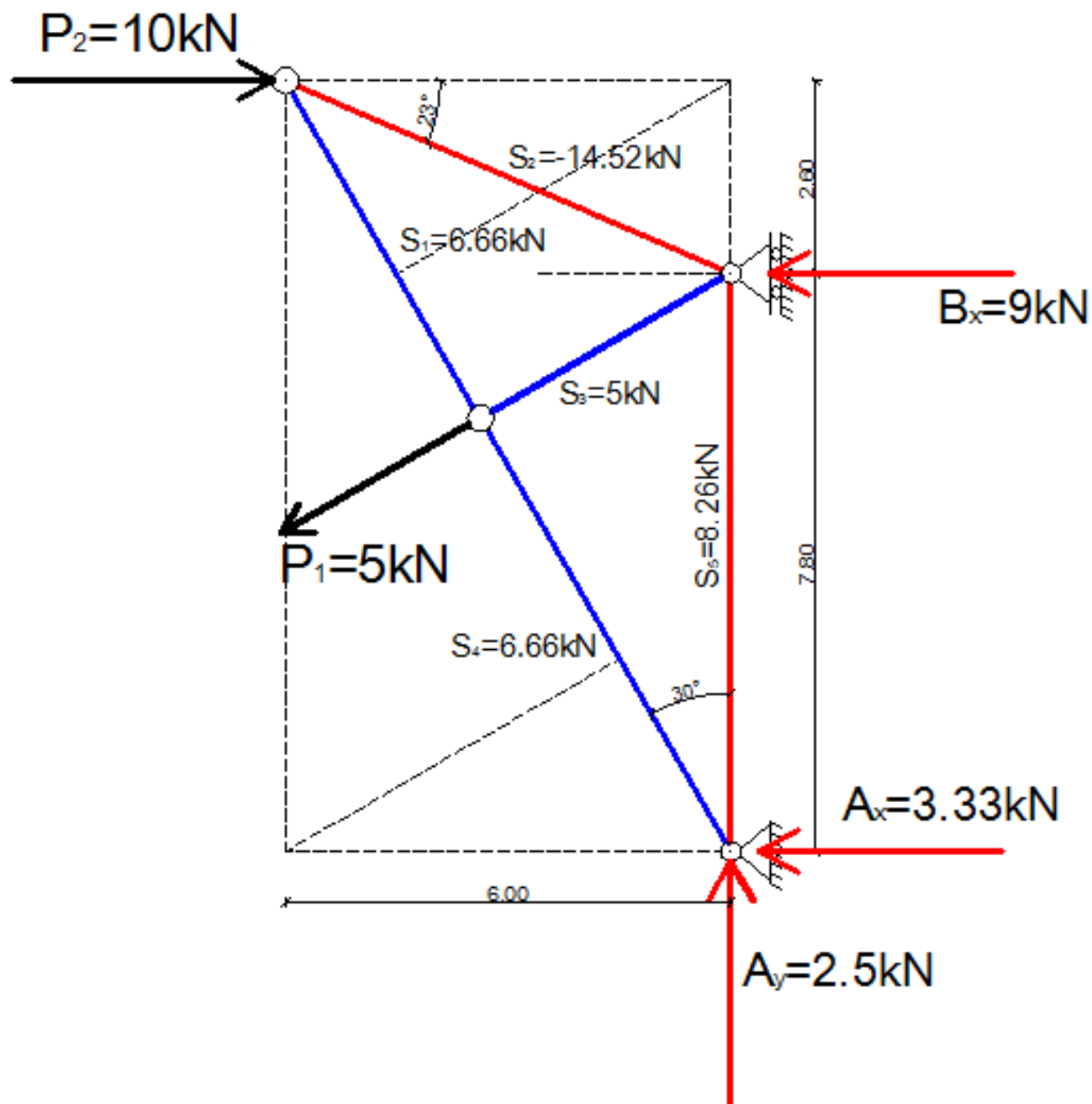


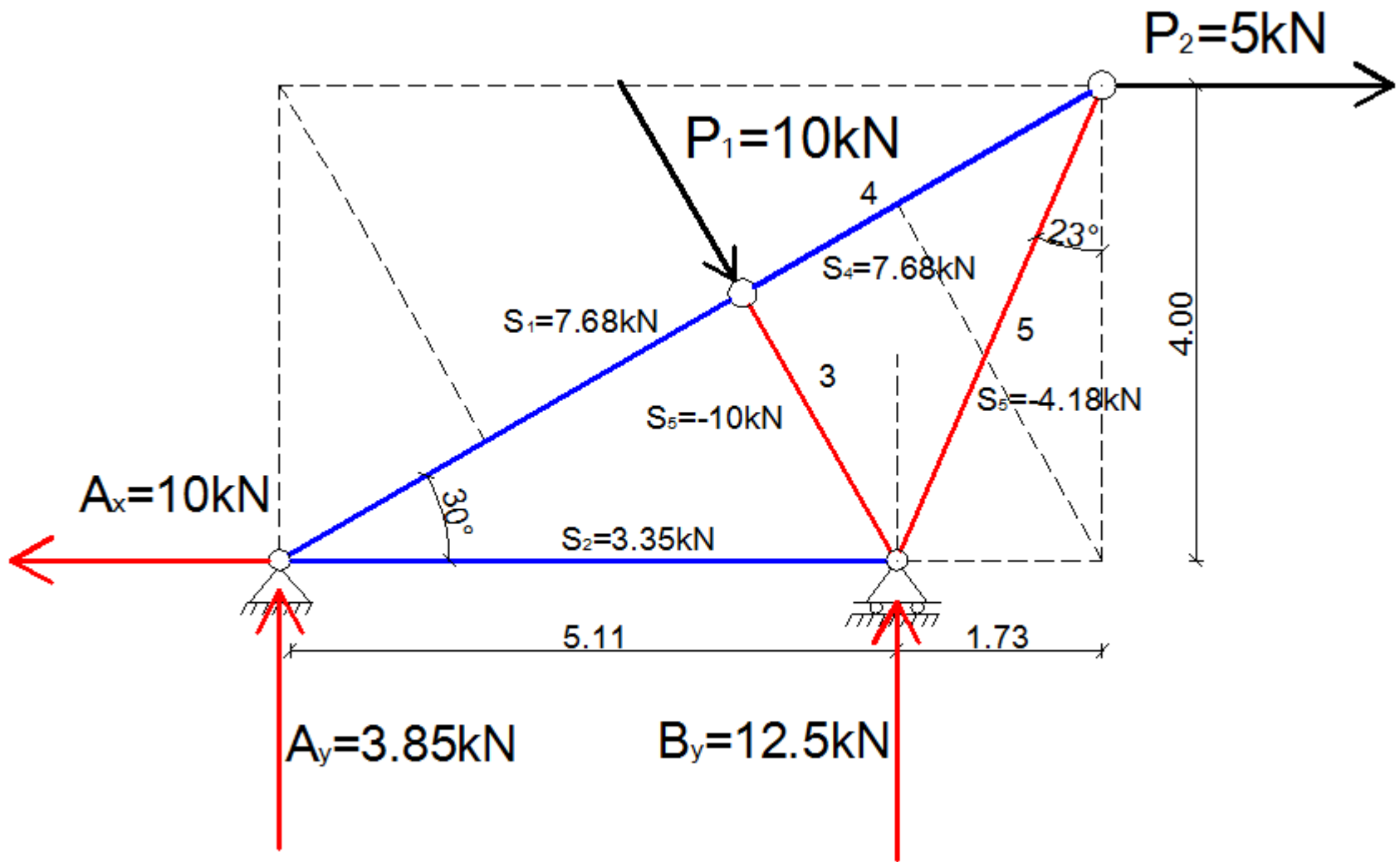
$$\left. \begin{array}{l} \sum X = 0, \\ \sum Y = 0. \end{array} \right\} \Rightarrow S_1 = S_3, \quad S_2 = P.$$

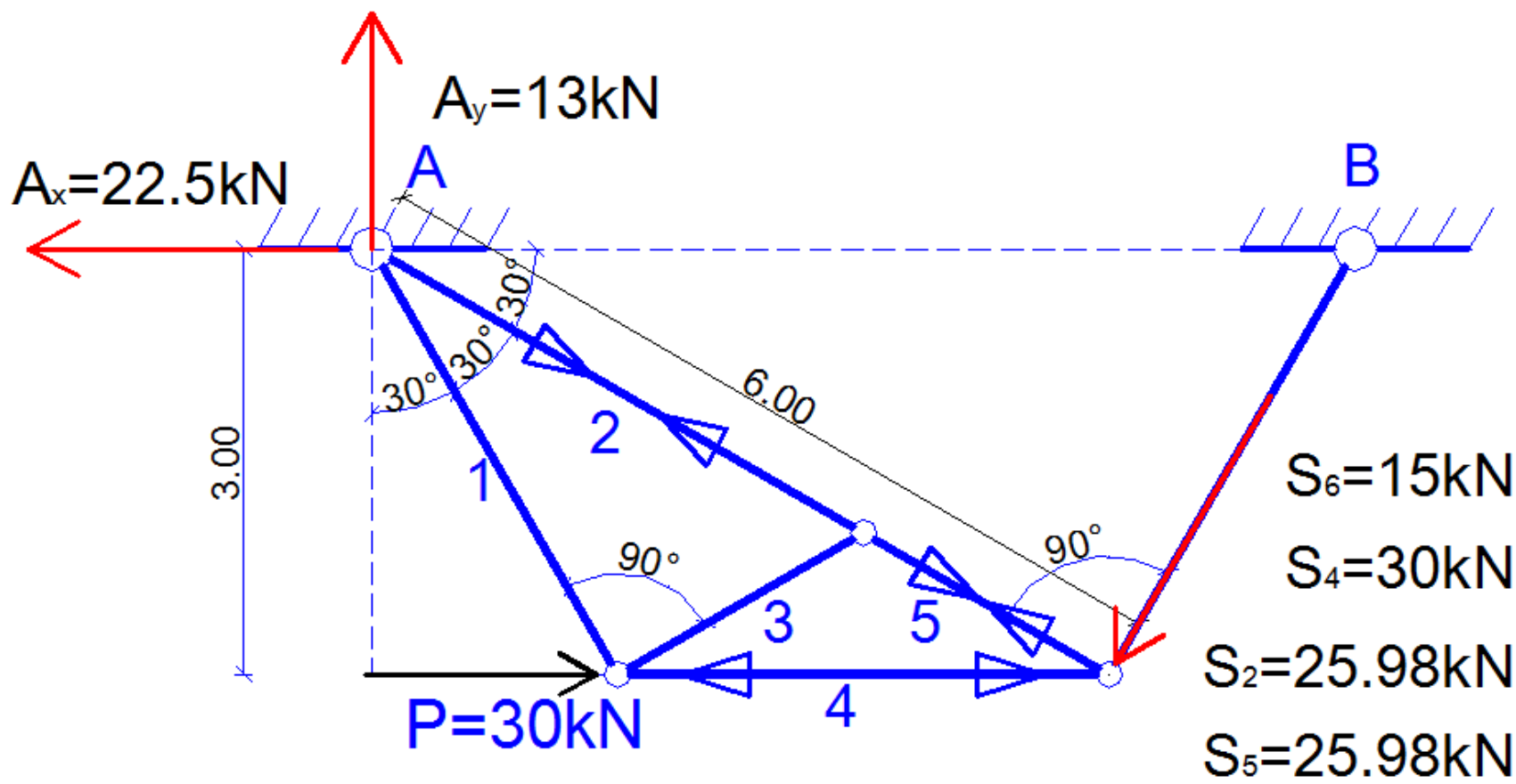
4) Në nyje janë të lidhura tri shufra .



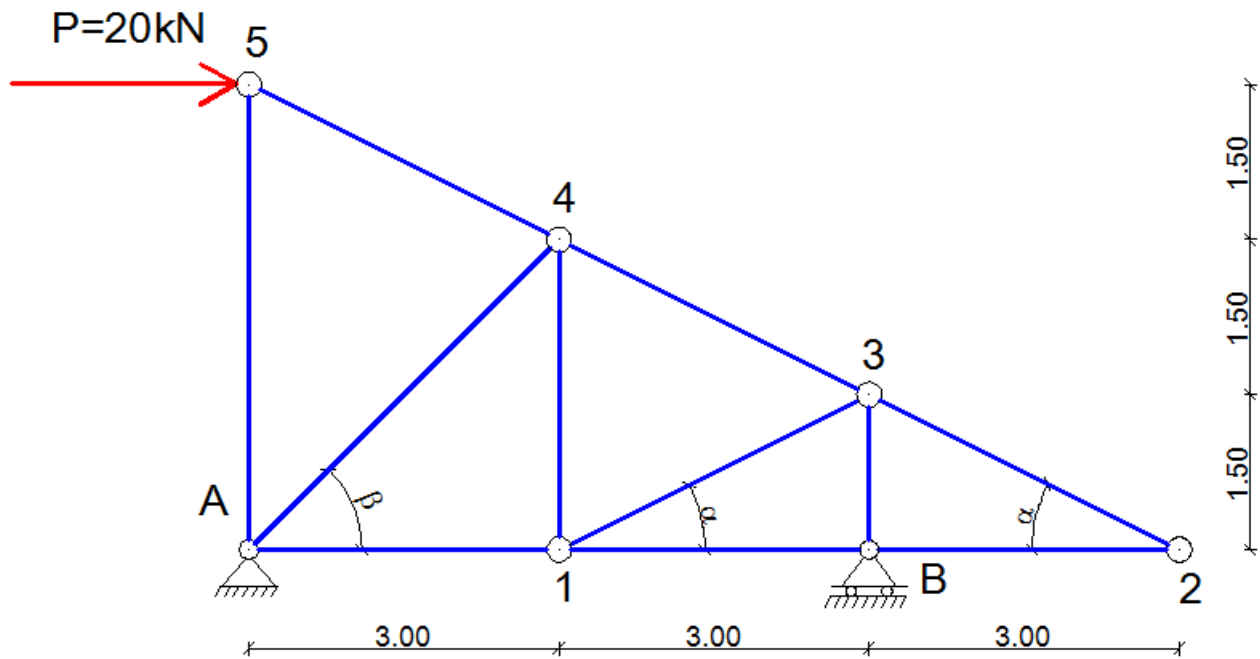
$$\left. \begin{array}{l} \sum X = 0, \\ \sum Y = 0. \end{array} \right\} \Rightarrow S_1 = S_3, \quad S_2 = 0.$$







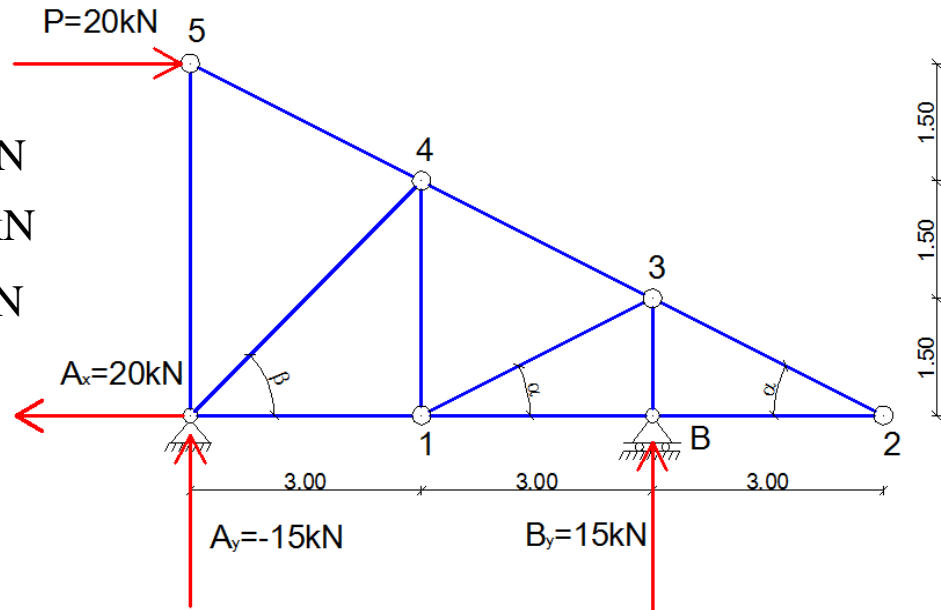
Shembull:



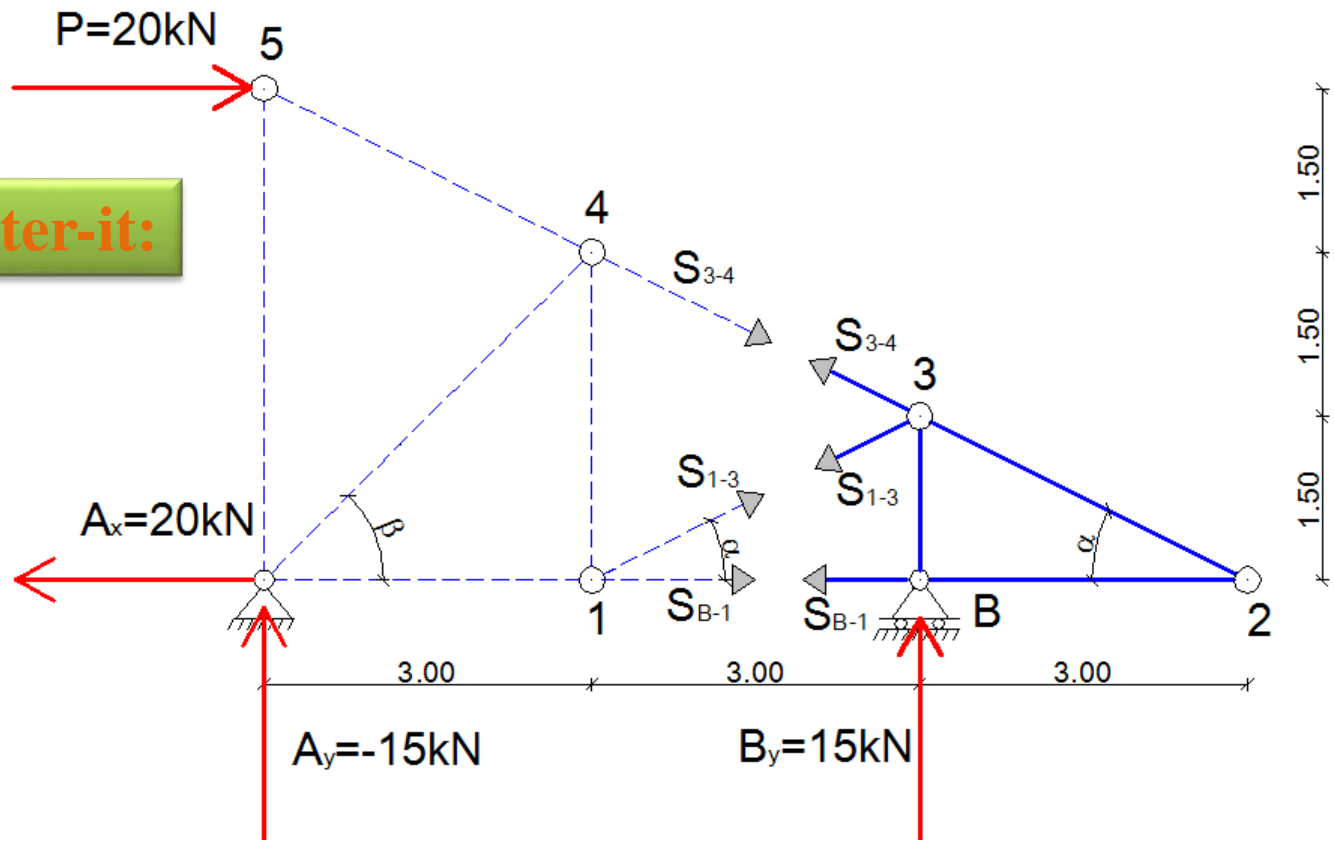
$$1) \sum X_i = 0 \Rightarrow -A_x + 20 = 0, \quad A_x = 20\text{kN}$$

$$2) \sum Y_i = 0 \Rightarrow A_y + B_y = 0, \quad A_y = -15\text{kN}$$

$$3) \sum M_A = 0 \Rightarrow B_y \cdot 6 - 20 \cdot 4.5 = 0, \quad B_y = 15\text{kN}$$



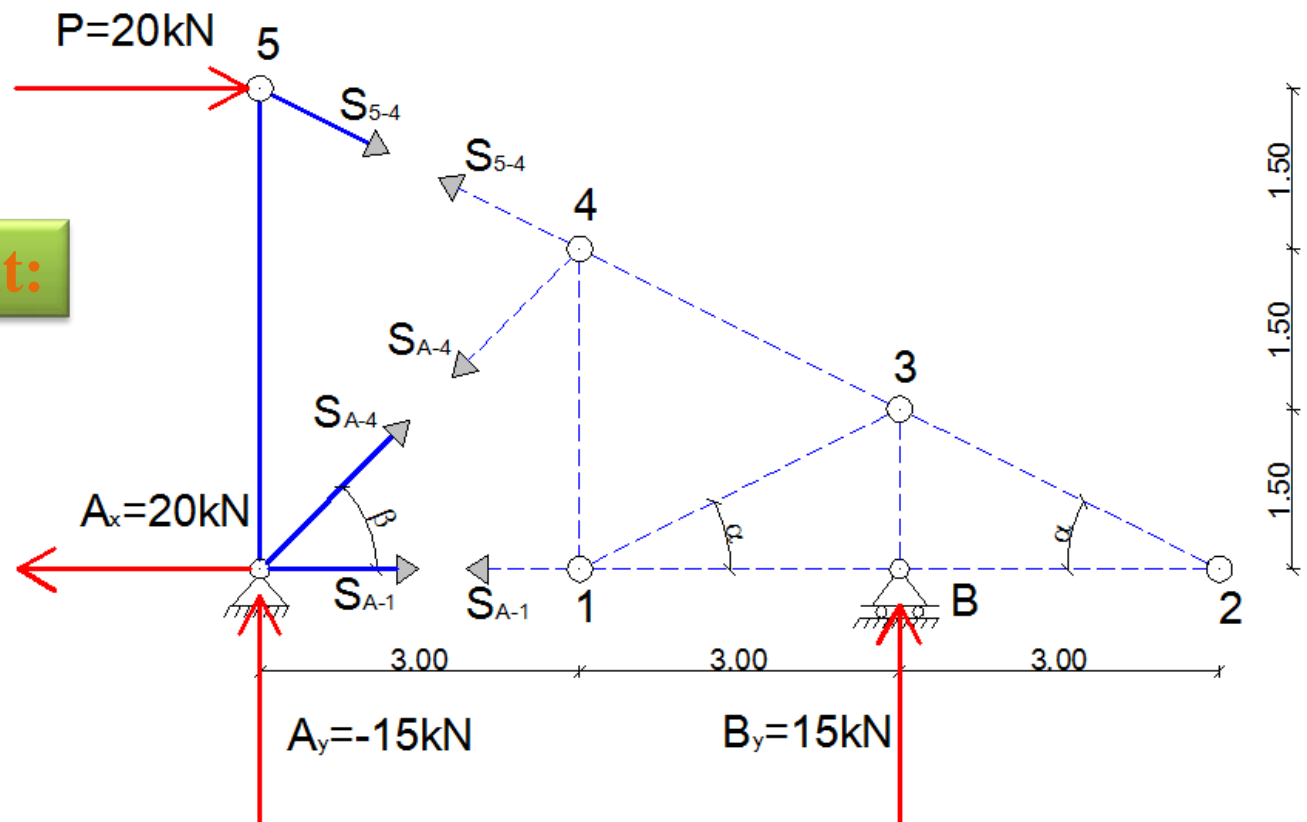
Metoda e Ritter-it:



Reale ana e djathtë

- 1) $\sum M_1^P = 0 \Rightarrow S_{3-4} \cdot \cos\alpha \cdot 1.5 + S_{3-4} \cdot \sin\alpha \cdot 3 + B_y \cdot 3 = 0, S_{3-4} = -16.779\text{kN}$
- 2) $\sum M_3^P = 0 \Rightarrow S_{B-1} \cdot 1.5 = 0, S_{5-1} = 0\text{kN}$
- 3) $\sum M_2^P = 0 \Rightarrow S_{1-3} \cdot \cos\alpha \cdot 1.5 + S_{1-3} \cdot \sin\alpha \cdot 3 - B_y \cdot 3 = 0, S_{1-3} = 16.779\text{kN}$

Metoda e Ritter-it:



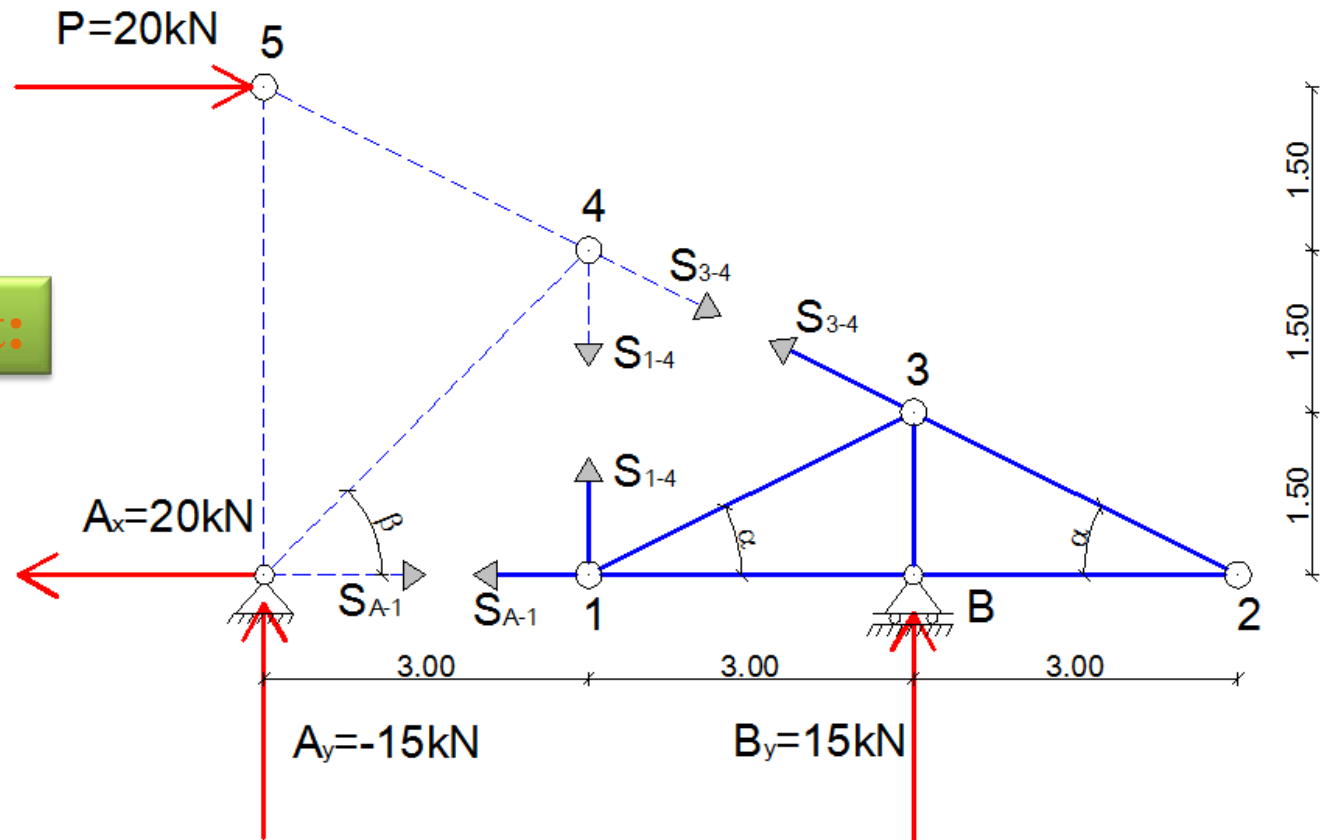
Reale ana e majtë

$$1) \sum M_A^P = 0 \Rightarrow S_{5-4} \cdot \cos\alpha \cdot 4.5 - 20 \cdot 4.5 = 0, \quad S_{5-4} = -22.371\text{kN}$$

$$2) \sum M_4^P = 0 \Rightarrow A_y \cdot 3 - A_x \cdot 3 + 20 \cdot 1.5 + S_{A-1} \cdot 3 = 0, \quad S_{A-1} = 15\text{kN}$$

$$3) \sum M_2^P = 0 \Rightarrow A_y \cdot 9 + 20 \cdot 4.5 + S_{A-4} \cdot \sin\beta \cdot 9 = 0, \quad S_{A-4} = 7.072\text{kN}$$

Metoda e Ritter-it:



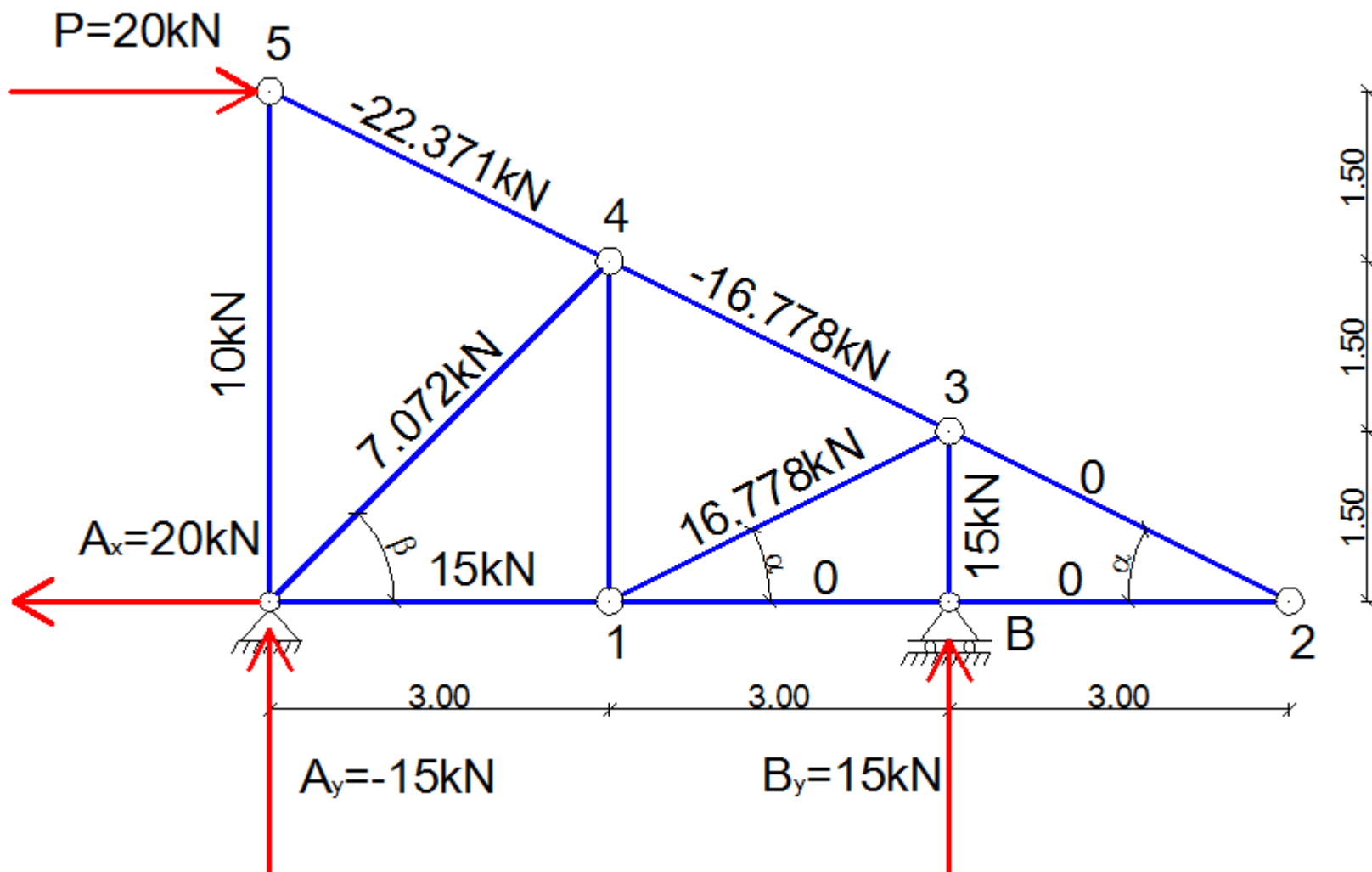
Reale ana e djathtë

$$1) \sum M_1^P = 0 \Rightarrow S_{3-4} \cdot \cos\alpha \cdot 1.5 + S_{3-4} \cdot \sin\alpha \cdot 3 + B_y \cdot 3 = 0, \quad S_{3-4} = -16.779\text{kN}$$

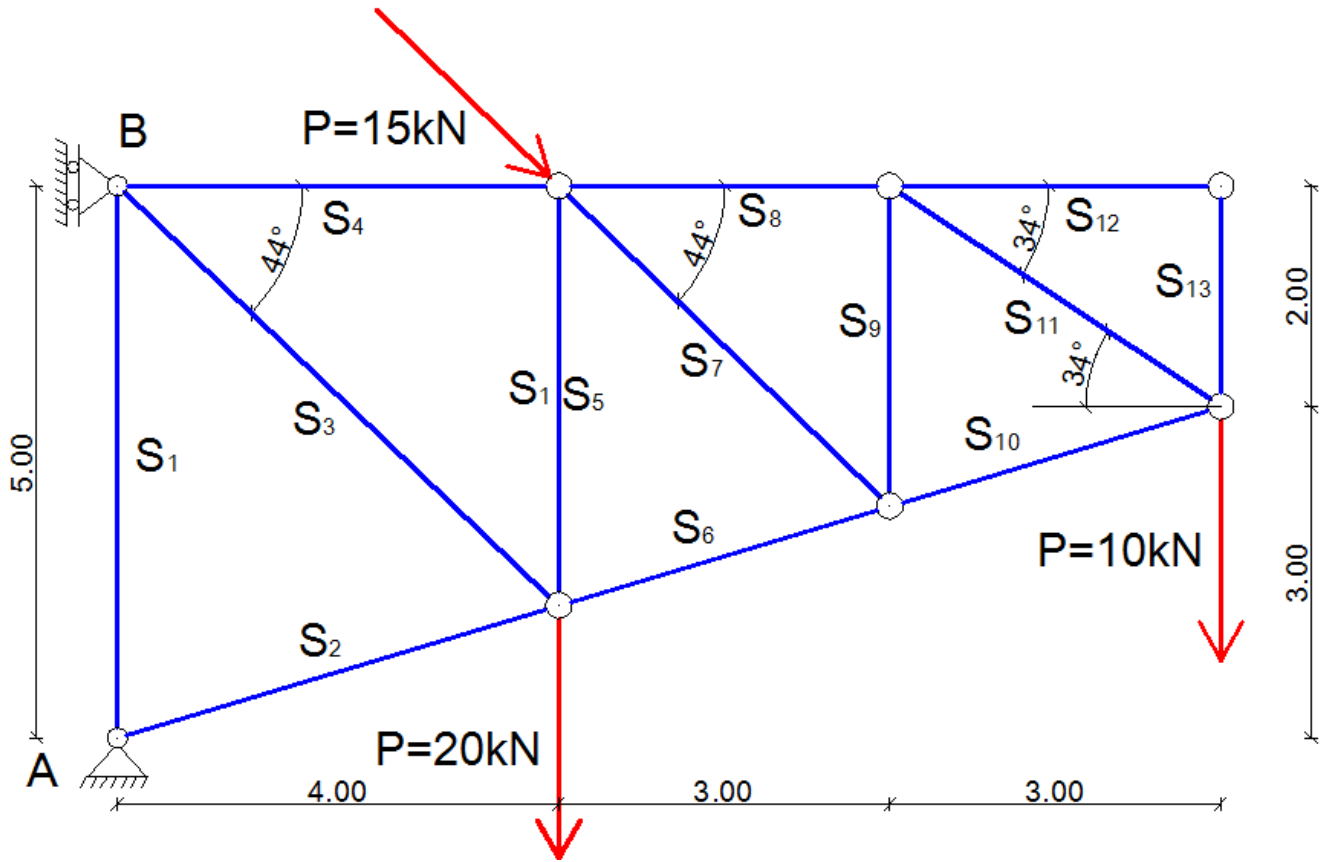
$$2) \sum M_4^P = 0 \Rightarrow B_y \cdot 3 - S_{A-1} \cdot 3 = 0, \quad S_{A-1} = 15\text{kN}$$

$$3) \sum M_2^P = 0 \Rightarrow -B_y \cdot 3 - S_{1-4} \cdot 6 = 0, \quad S_{1-4} = -7.5\text{kN}$$

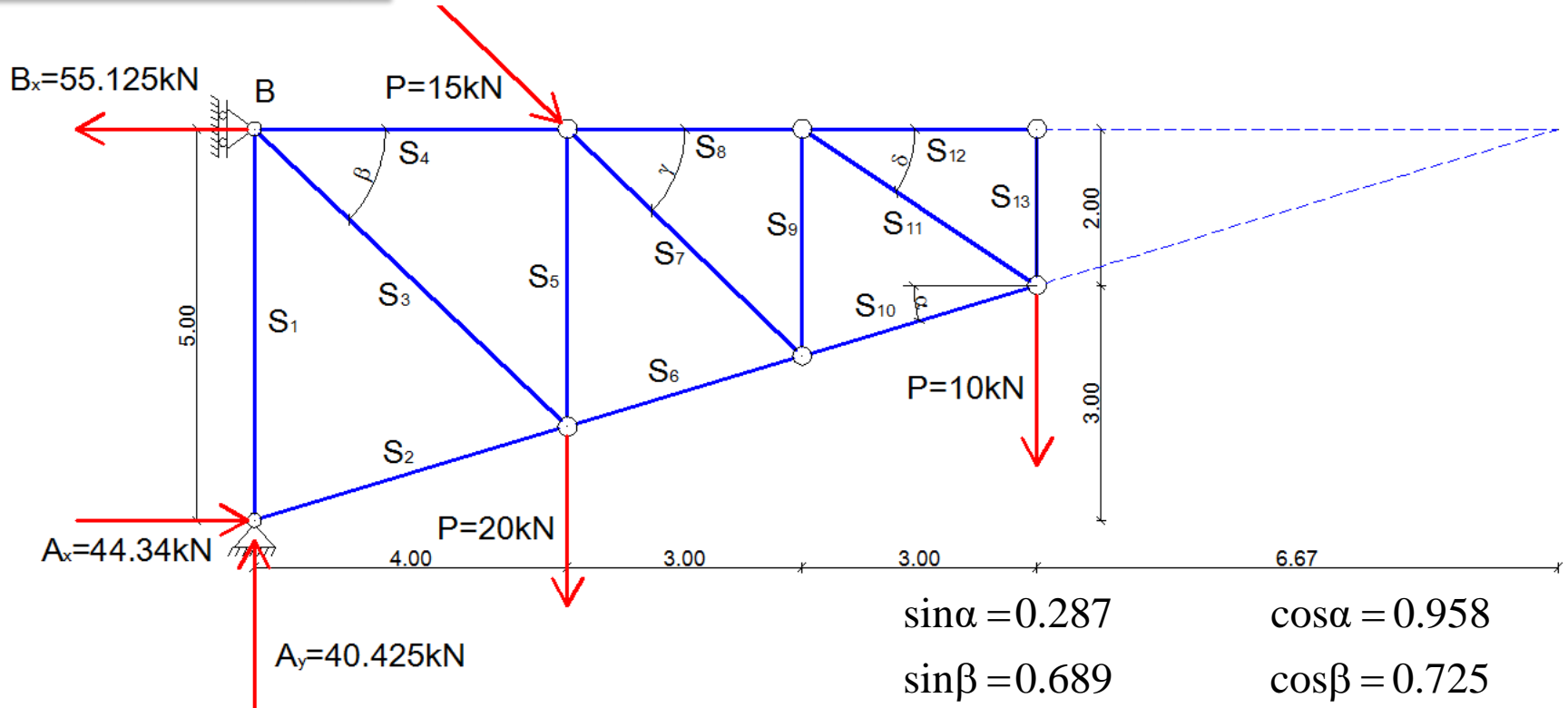
Forcat ne shufra



Shembull:



Reaksionet



$$\sin\alpha = 0.287$$

$$\cos\alpha = 0.958$$

$$\sin\beta = 0.689$$

$$\cos\beta = 0.725$$

$$\sin\gamma = 0.695$$

$$\cos\gamma = 0.719$$

$$\sin\delta = 0.555$$

$$\cos\delta = 0.832$$

$$1) \sum X_i = 0 \Rightarrow A_x - B_x + 15 \cdot \cos\gamma = 0,$$

$$A_x = 44.340\text{kN}$$

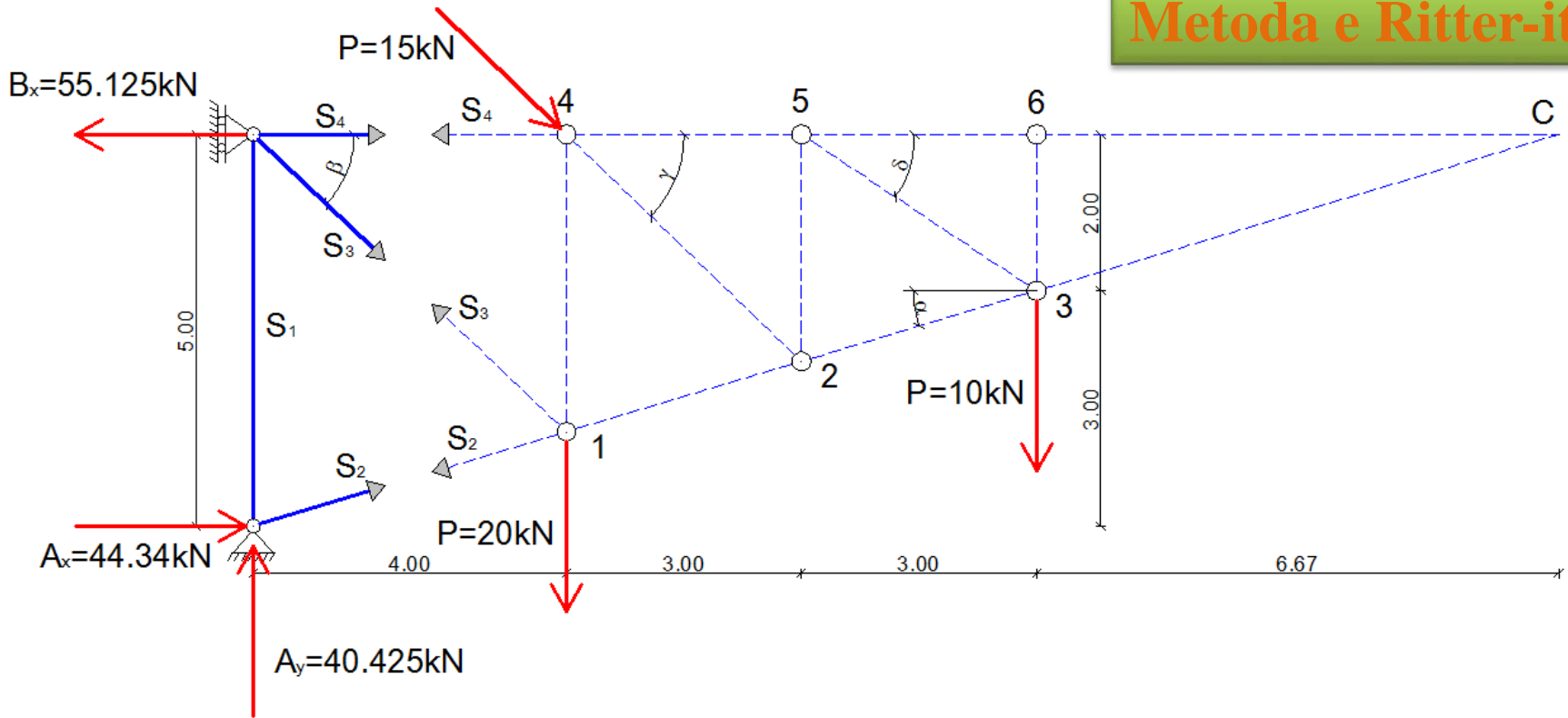
$$2) \sum Y_i = 0 \Rightarrow A_y - 20 - 10 - 15 \cdot \sin\gamma = 0,$$

$$A_y = 40.425\text{kN}$$

$$3) \sum M_A = 0 \Rightarrow B_x \cdot 5 + 20 \cdot 4 + 10 \cdot 10 + 15 \cdot \sin\gamma \cdot 4 + 15 \cdot \cos\gamma \cdot 5 = 0,$$

$$B_x = 55.125\text{kN}$$

Metoda e Ritter-it:



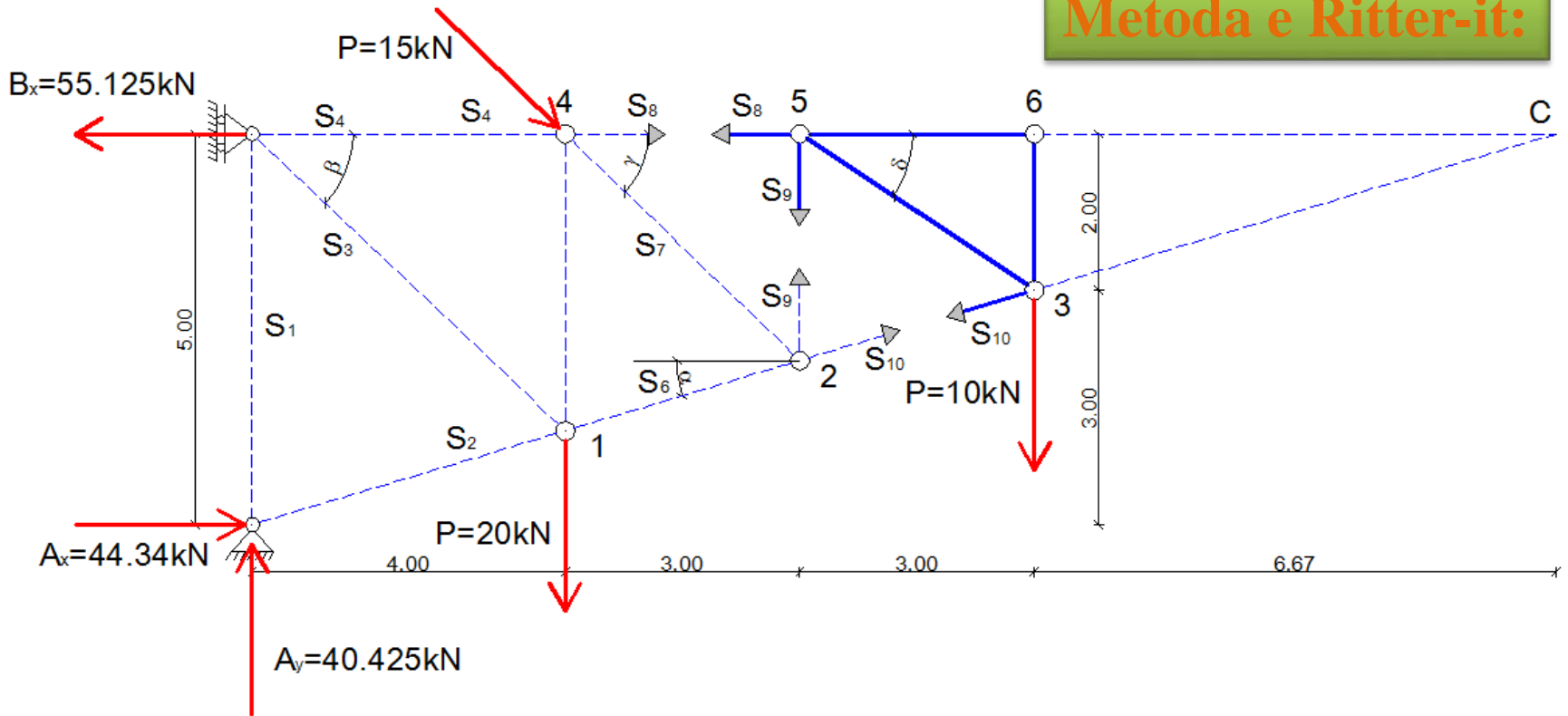
Reale ana e majtë

$$1) \sum M_1^P = 0 \Rightarrow S_4 \cdot 3.8 - 55.125 \cdot 3.8 - 44.34 \cdot 1.2 + 40.425 \cdot 4 = 0, \quad S_4 = 26.57 \text{ kN}$$

$$2) \sum M_B^P = 0 \Rightarrow A_x \cdot 5 + S_2 \cos\alpha \cdot 5 = 0, \quad S_2 = -46.284 \text{ kN}$$

$$3) \sum M_C^P = 0 \Rightarrow A_y \cdot 16.667 + A_x \cdot 5 + S_3 \cdot \sin\beta \cdot 16.667 = 0, \quad S_3 = 39.366 \text{ kN}$$

Metoda e Ritter-it:



Reale ana e djathtë

$$1) \sum M_2^P = 0 \Rightarrow S_8 \cdot 2.9 - 10 \cdot 3 = 0,$$

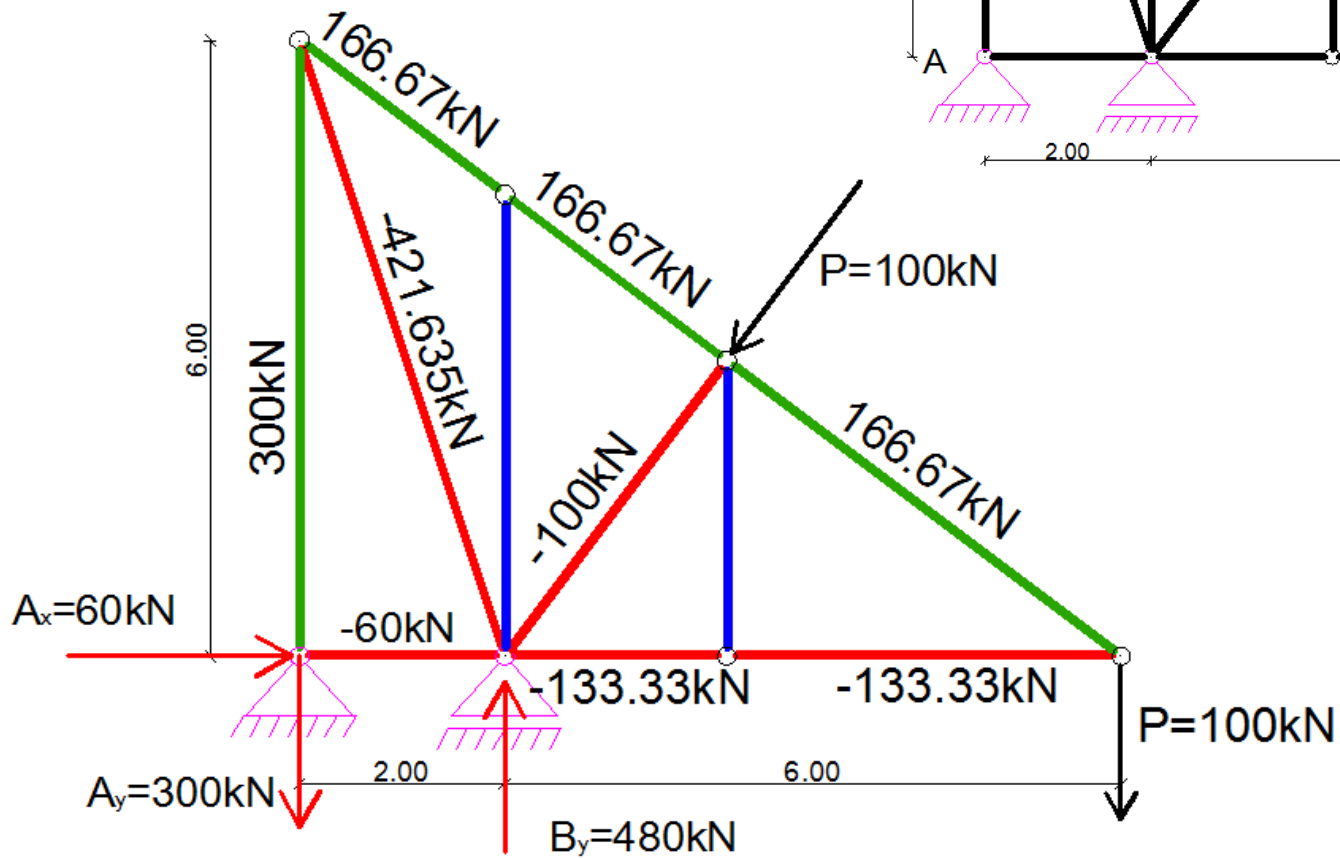
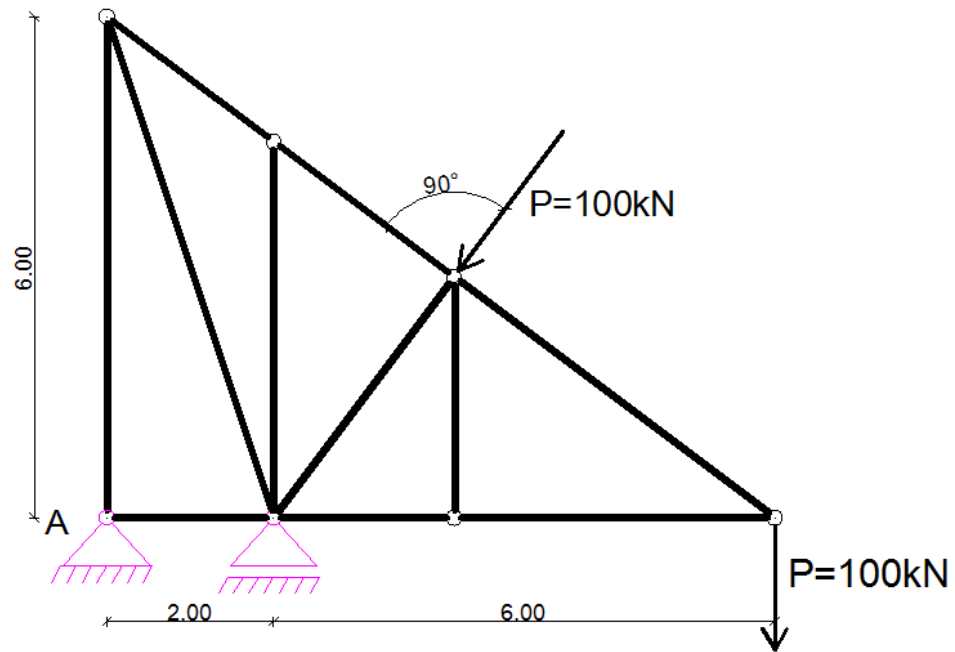
$$S_8 = 10.345 \text{ kN}$$

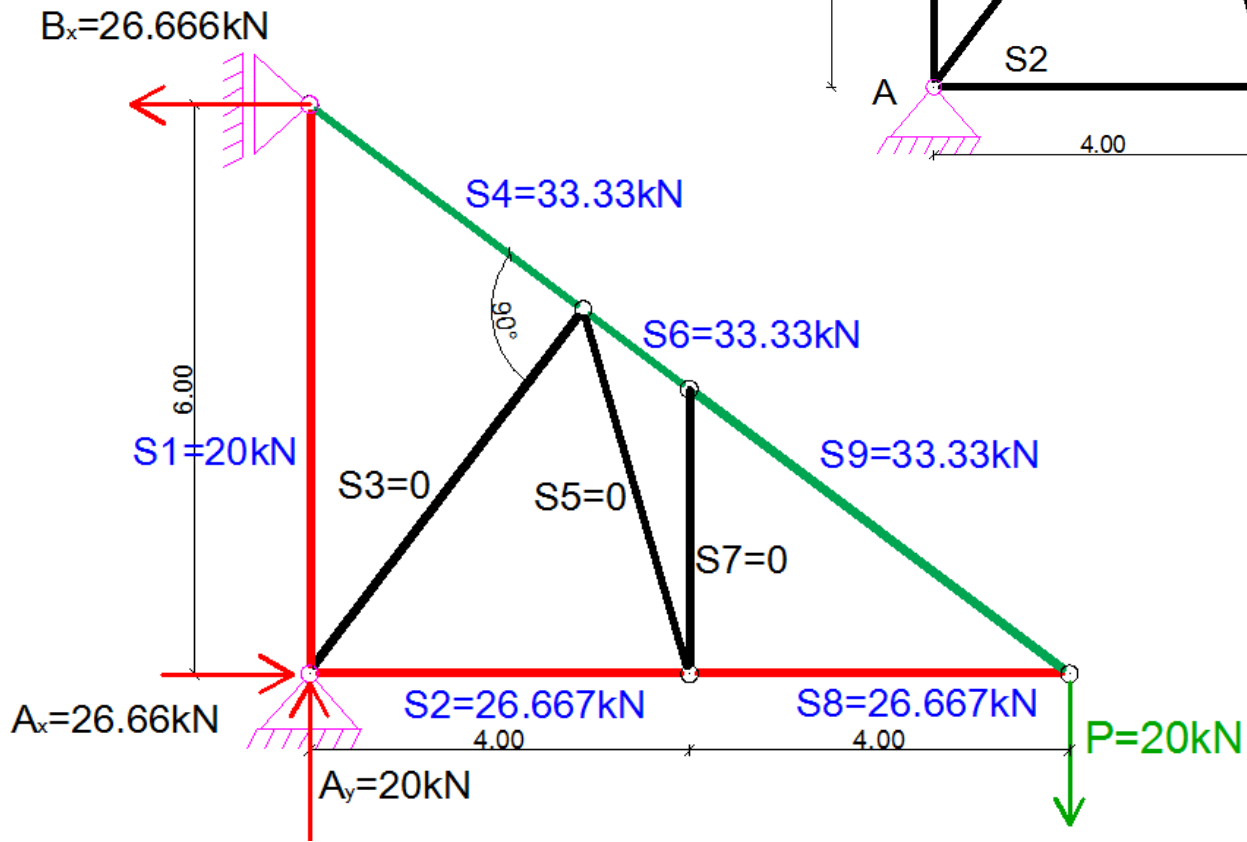
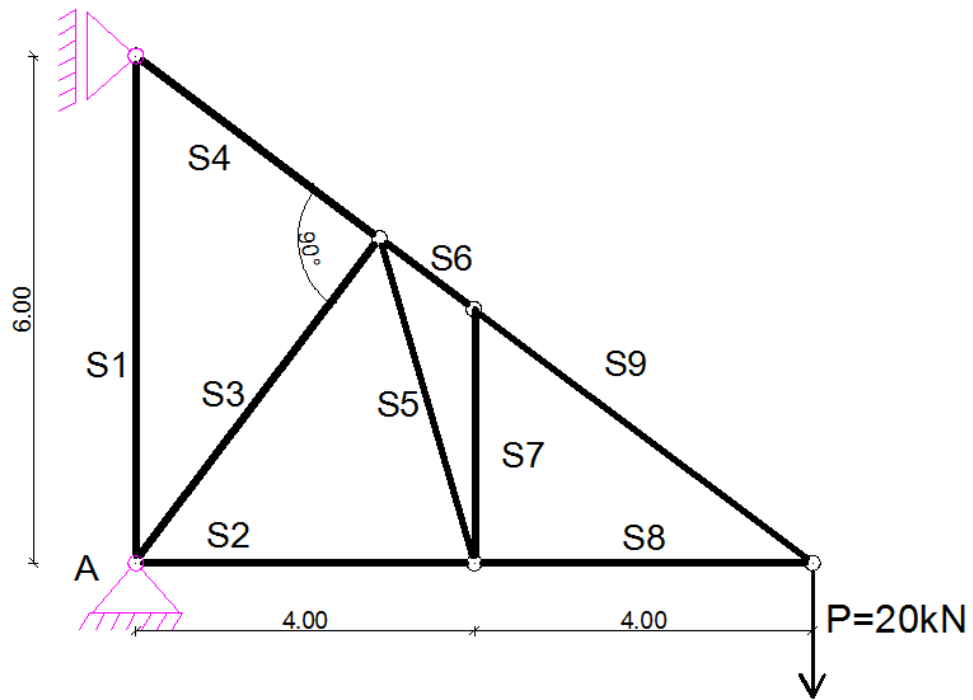
$$2) \sum M_5^P = 0 \Rightarrow S_{10} \cos \alpha \cdot 2 + S_{10} \sin \alpha \cdot 3 + 10 \cdot 3 = 0,$$

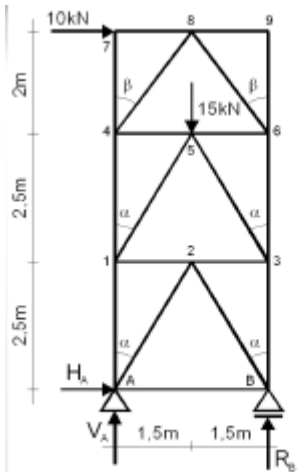
$$S_{10} = -10.803 \text{ kN}$$

$$3) \sum M_C^P = 0 \Rightarrow S_9 \cdot 9.667 + 10 \cdot 6.667 = 0,$$

$$S_9 = -6.897 \text{ kN}$$







$$\sum X : H_A + 10kN = 0 \quad H_A = -20kN$$

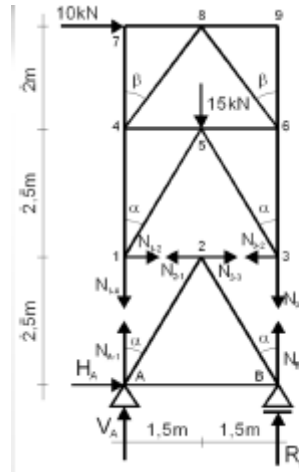
$$\sum Y : V_A + R_B - 15kN = 0 \quad V_A = -15,833kN$$

$$\sum M_A : R_B \cdot 3m - 15kN \cdot 1,5m - 10kN \cdot 7m = 0$$

$$R_B = 30,833kN$$

$$\sin \alpha = \frac{1,5m}{\sqrt{(1,5m)^2 + (2,5m)^2}} = 0,514 \quad \cos \alpha = \frac{2,5m}{\sqrt{(1,5m)^2 + (2,5m)^2}} = 0,857$$

$$\sin \beta = \frac{1,5m}{\sqrt{(1,5m)^2 + (2m)^2}} = 0,6 \quad \cos \beta = \frac{2m}{\sqrt{(1,5m)^2 + (2m)^2}} = 0,8$$

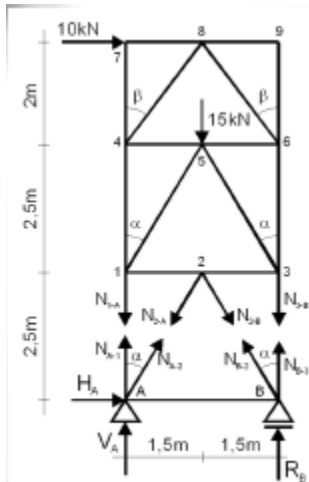


$$\sum M_1^g : N_{3-B} \cdot 3m + 15kN \cdot 1,5m + 10kN \cdot 4,5m = 0$$

$$N_{3-B} = -22,500kN$$

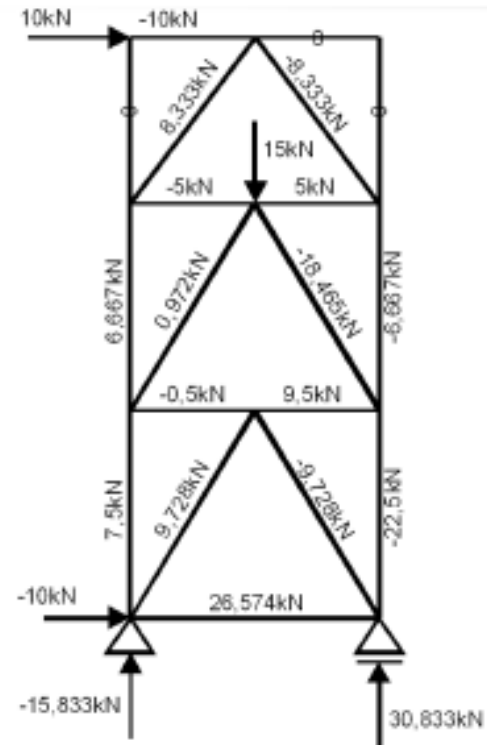
$$\sum M_3^g : N_{1-A} \cdot 3m + 15kN \cdot 1,5m - 10kN \cdot 4,5m = 0$$

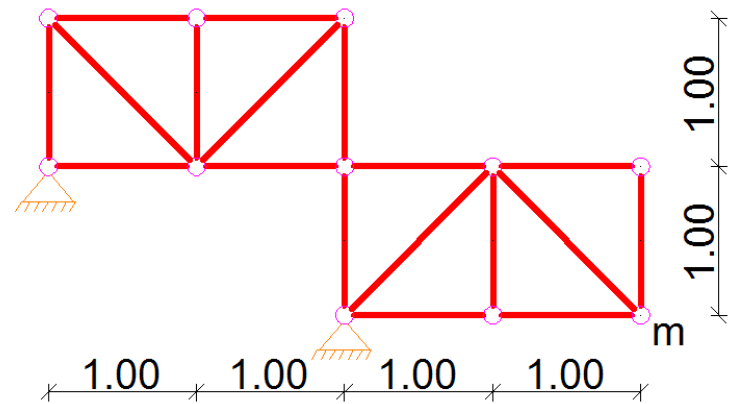
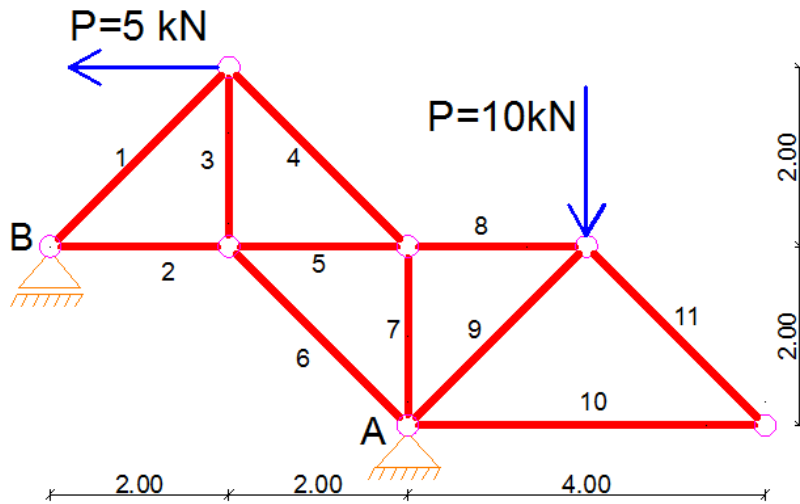
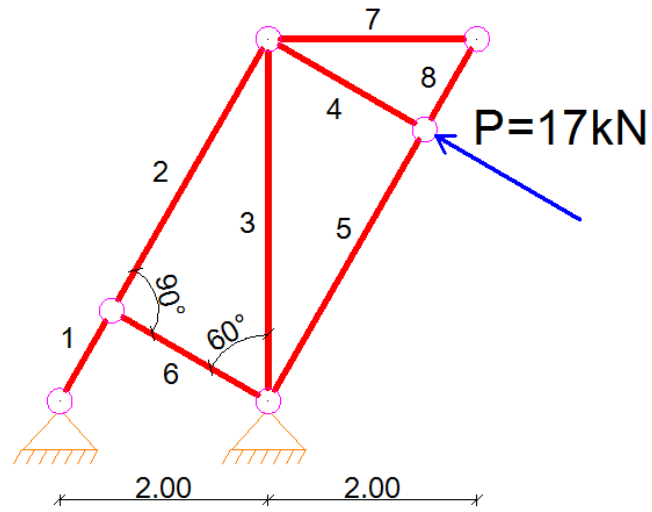
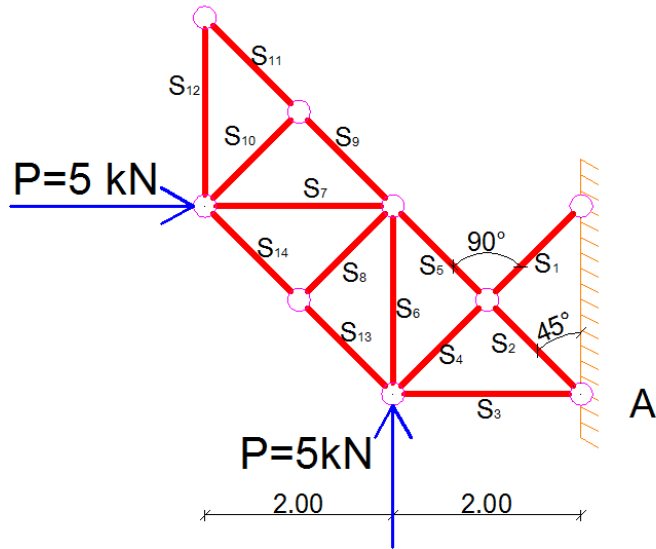
$$N_{1-A} = 7,500kN$$

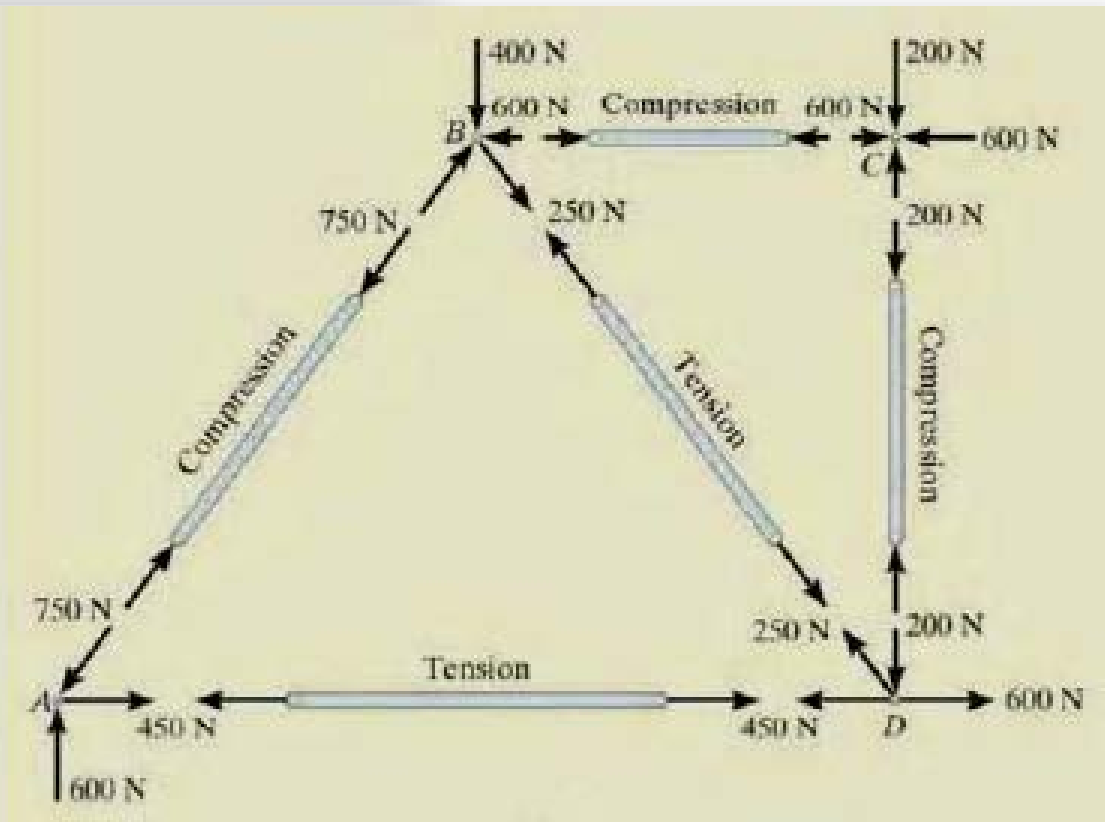
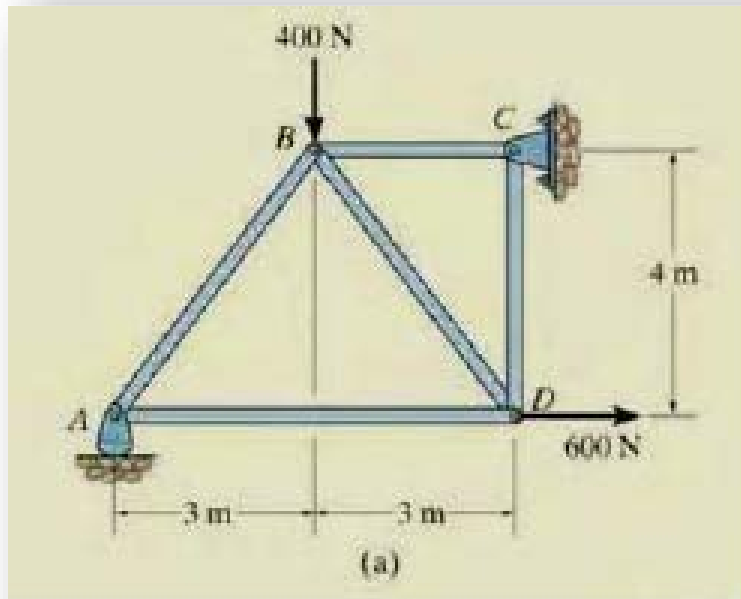
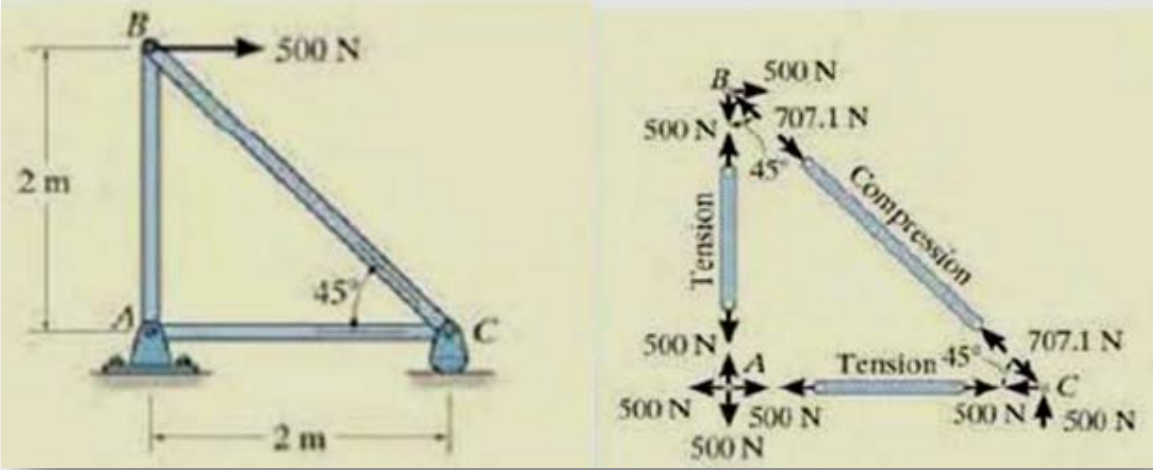


$$\sum X^g : N_{2-A} \cdot \sin \alpha - N_{2-B} \cdot \sin \alpha - 10kN = 0$$

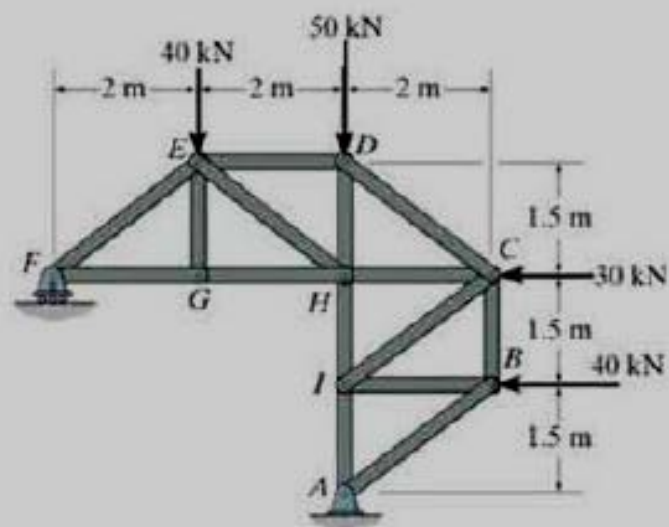
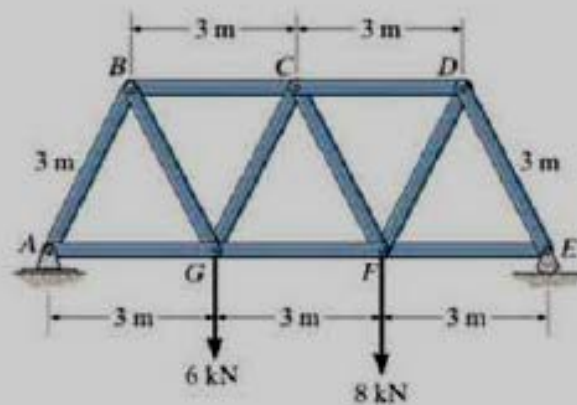
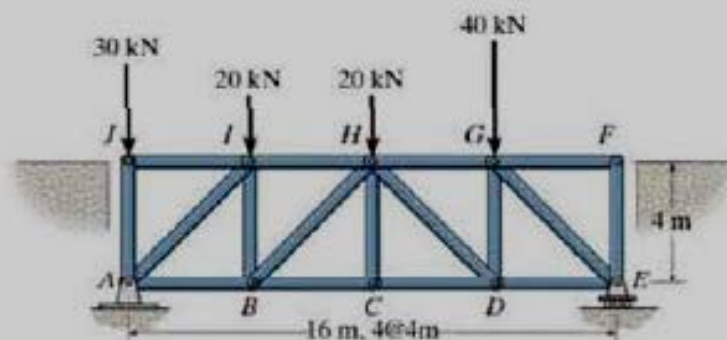
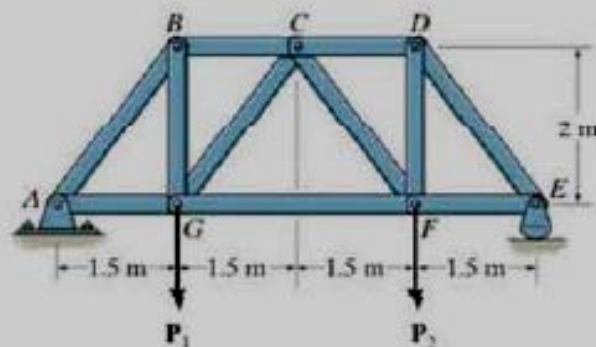
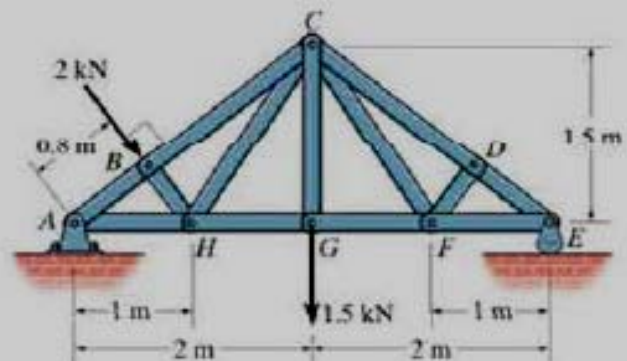
$$N_{2-A} - N_{2-B} = \frac{10kN}{\sin \alpha}$$





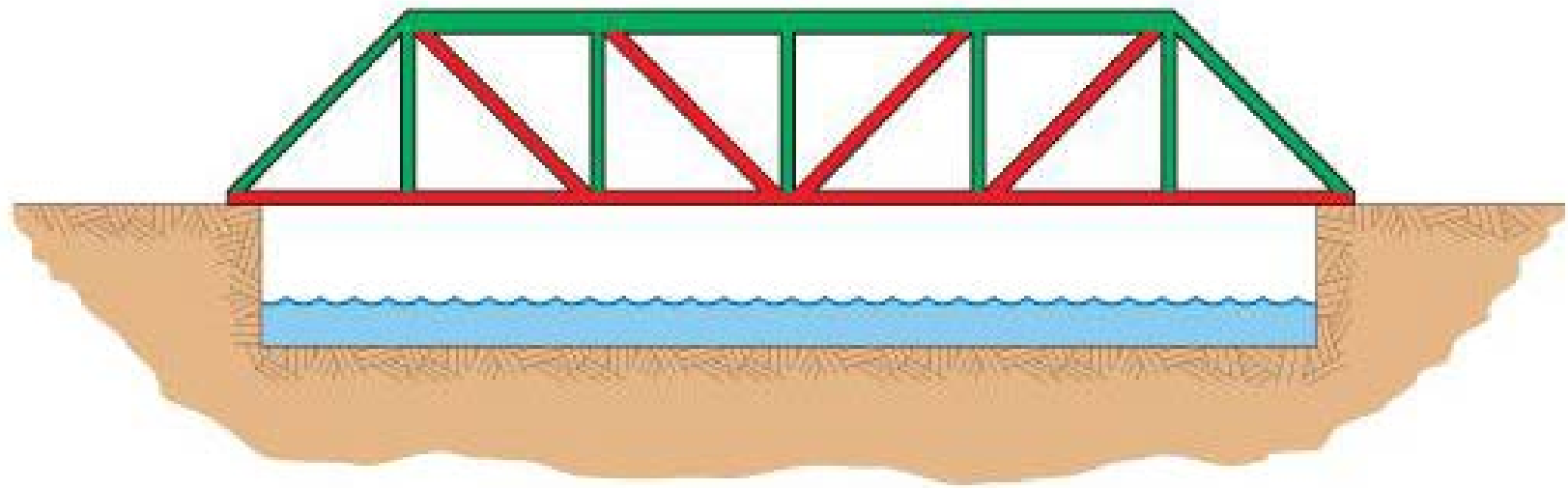
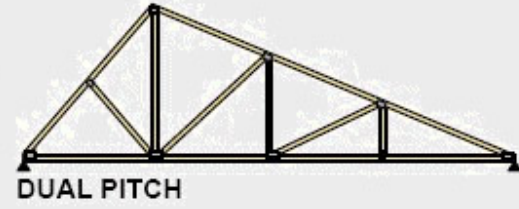
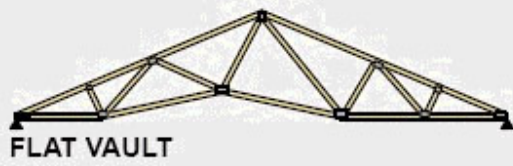
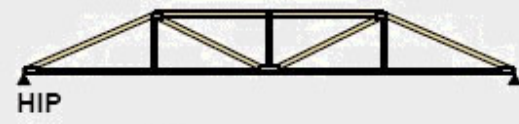
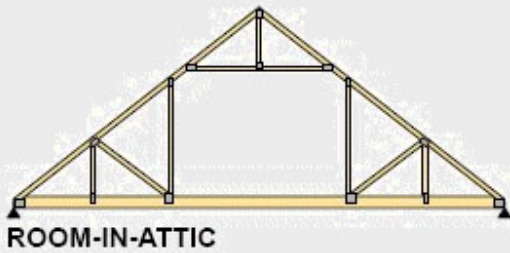
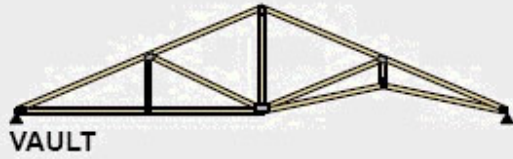
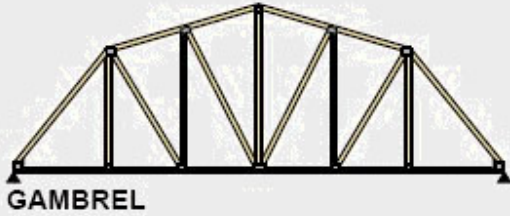
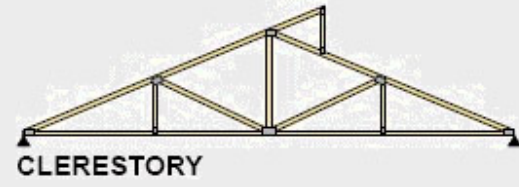
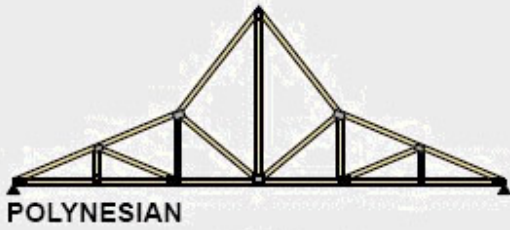
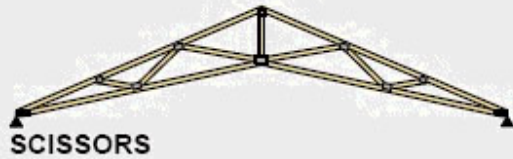


Shembull

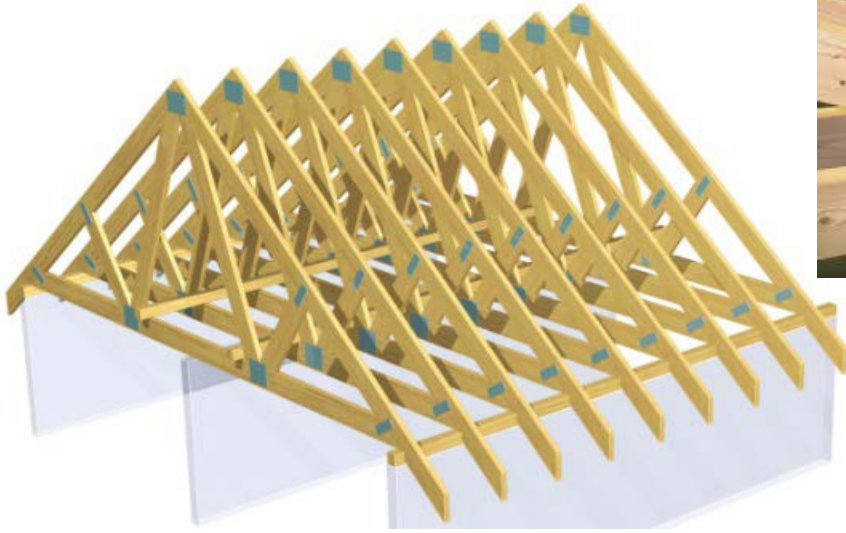


Shembuj per ushtrime : Për mbajtësit kapriat caktoni forcat në shufrat e kapriates.

SHEMBUJ
MBAJTËSIT KAPRIAT NË EKZEKUTIM

























© Folhapress / Barcroft Media



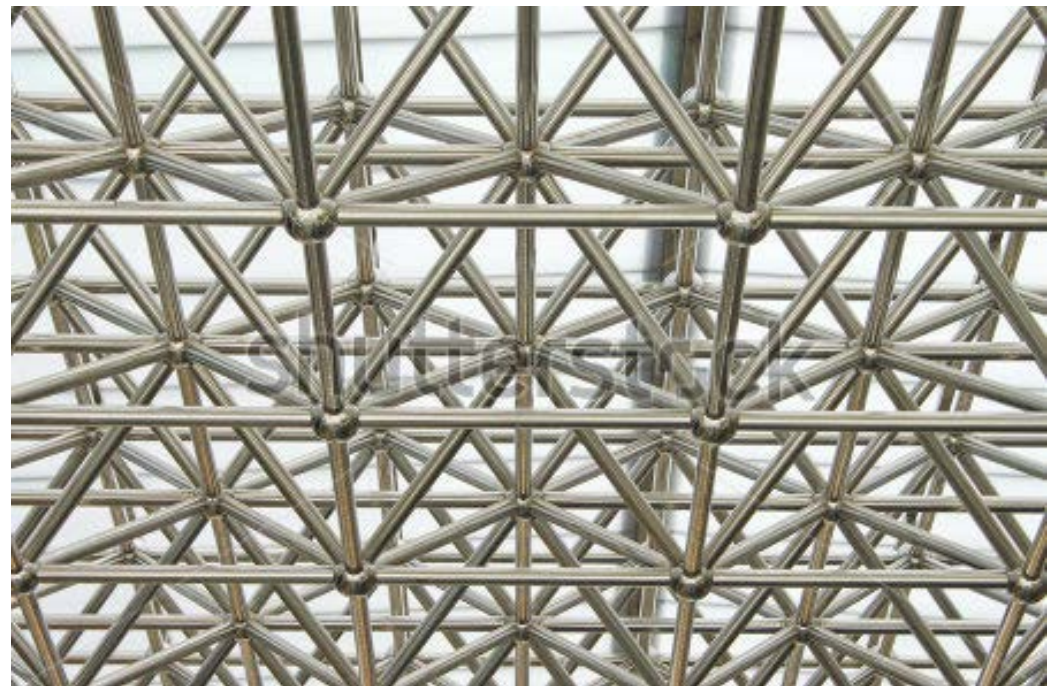
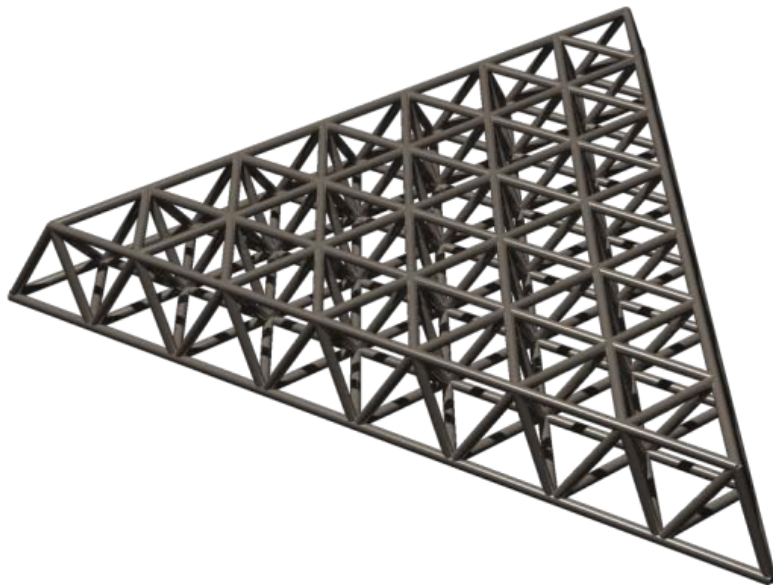
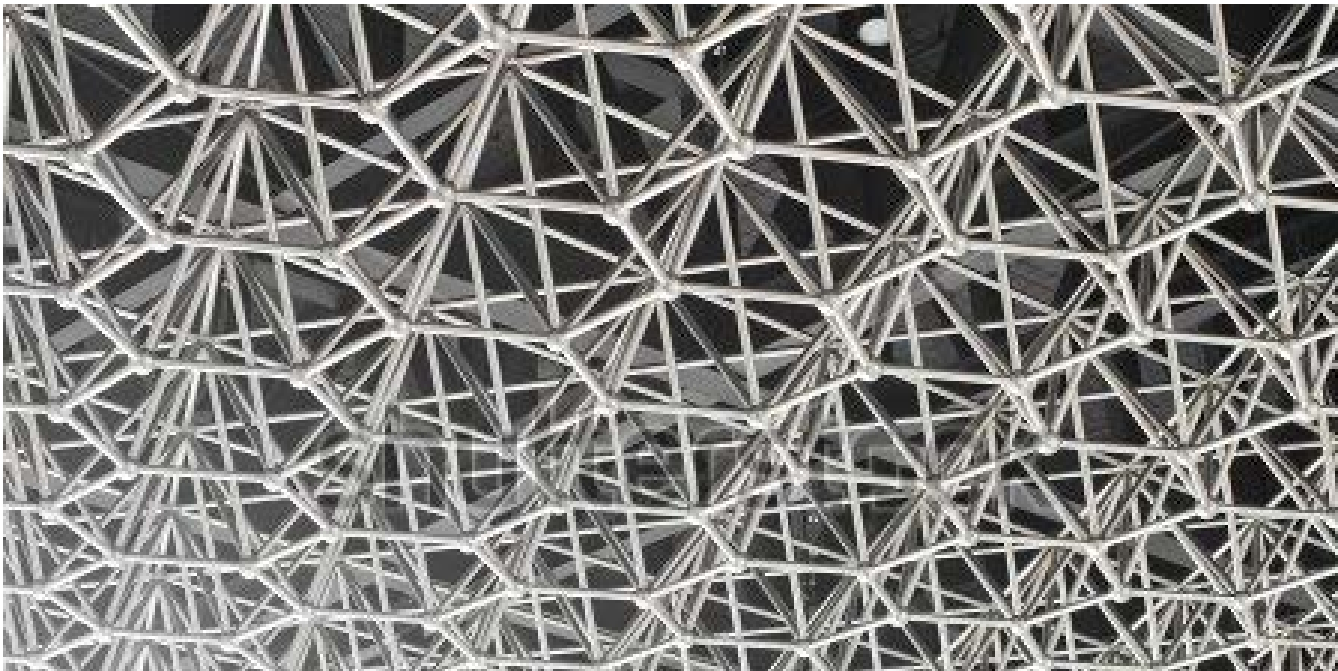


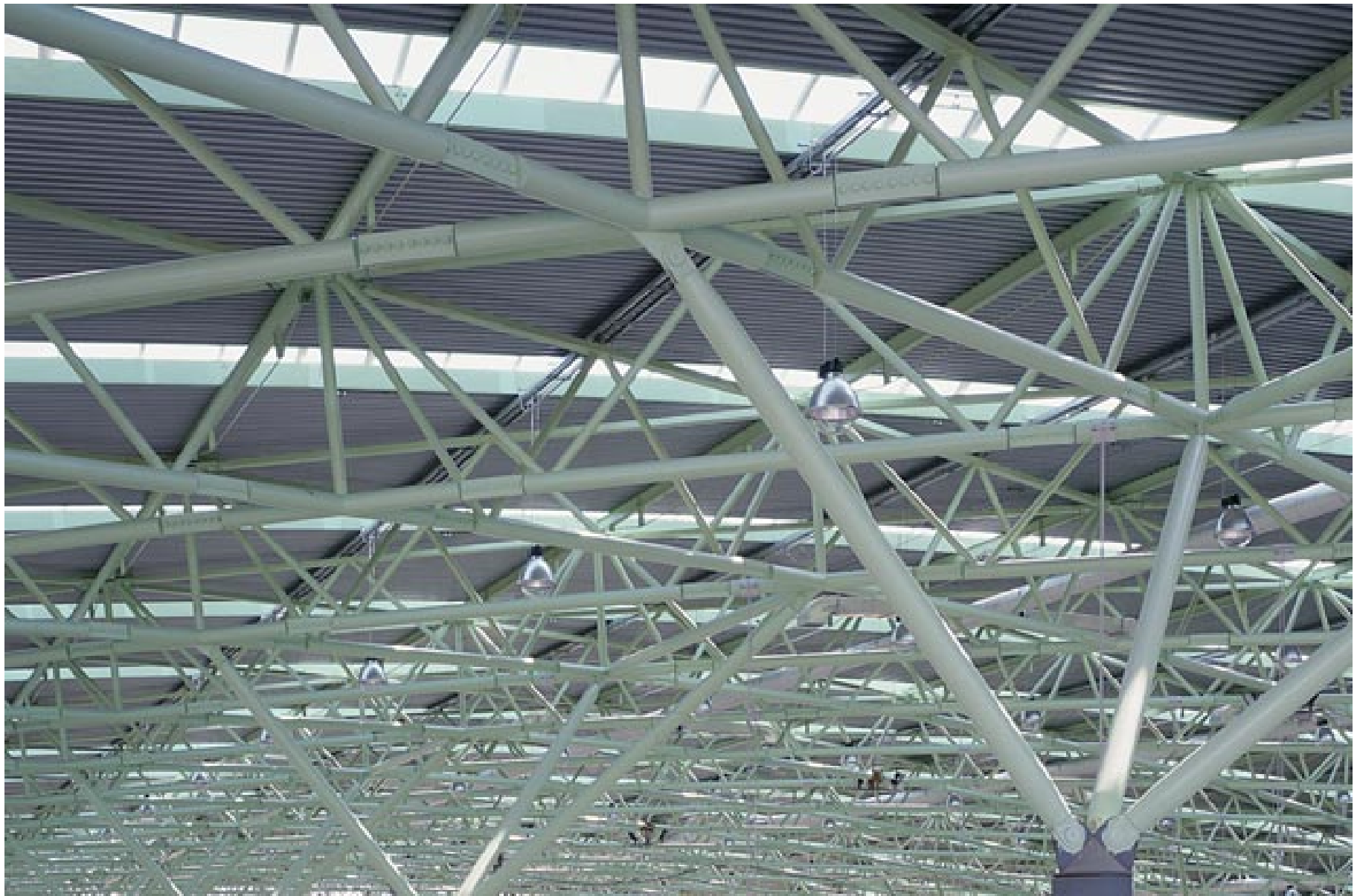










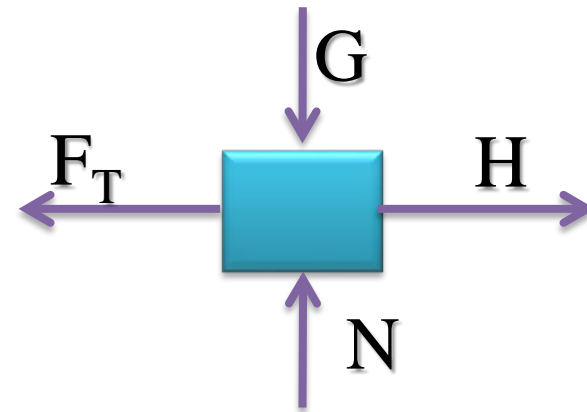
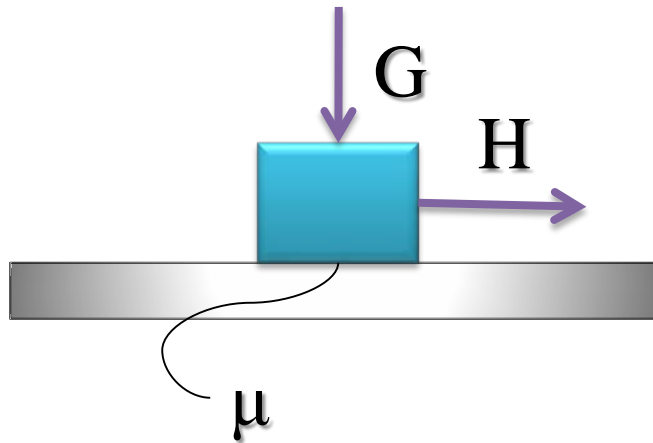




FERKIMI

FORCA E FERKIMIT; LIGJI I KULONIT

Forca e ferkimit paraqitet nese trupi leviz nËpër siperfaqe të vrazhdë



$$\sum X = 0: -F_T + N = 0$$

$$\sum Y = 0: N - G = 0$$

$$0 < F_T < F_{TG} \quad F_{TG} - \text{vlera kufitare e forcës së ferkimit}$$

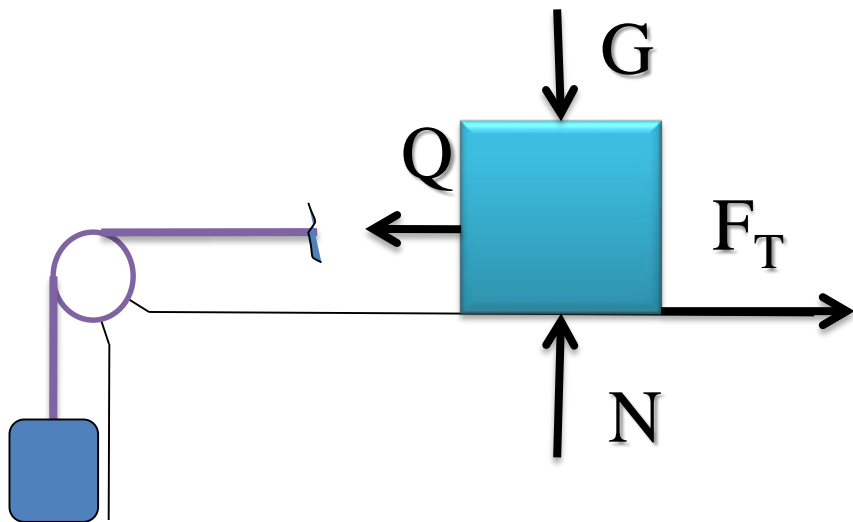
1. Forca e ferkimit F_T ka drejtimin e tangjentes ne drejtimin e mundshem te levizjes, ndersa kahjen e kundert me forcen aktive e cila shkakton levizjen.

$$2. F_{gr} = \mu_0 N$$

μ_0 – Koeficienti statik i ferkimit. Varet nga lloji i materialit i cili gjendet ne rrafshin kontaktues, perpunimit te siperfaqes kontaktuese, etj. N është forca normale në rrafshin kontaktues.

3. Forca e ferkimit nuk varet nga madhesia e siperfaqes kontaktuese

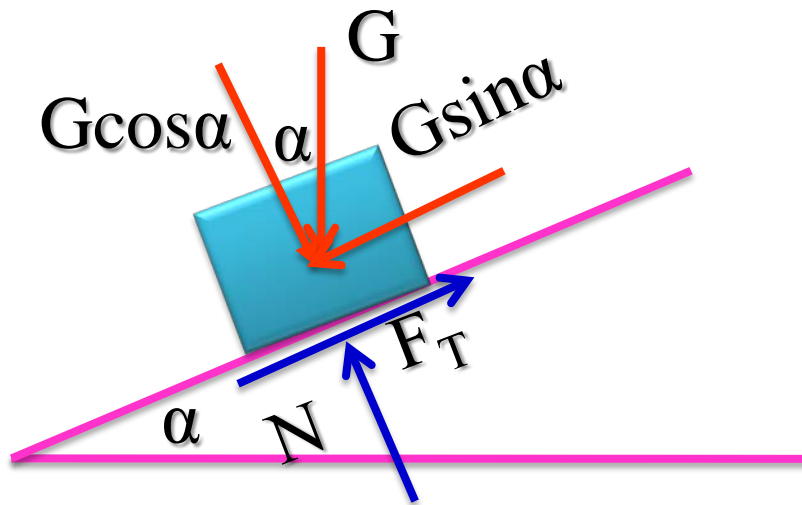
Caktimi i forces se ferkimit :



$$Q_{GR} = \mu_0 N$$

Gjatë levizjes

$$F_T = \mu N \quad (\mu < \mu_0)$$



$$N = G \cos \alpha$$

$$F_T = G \sin \alpha \text{ (trupit leviz)}$$

Gjatë ndërrimit të këndit α mund të caktohet vlera për të cilën vlenë kushti i ekuilibrit:

$$-F_T + G \sin \alpha = 0$$

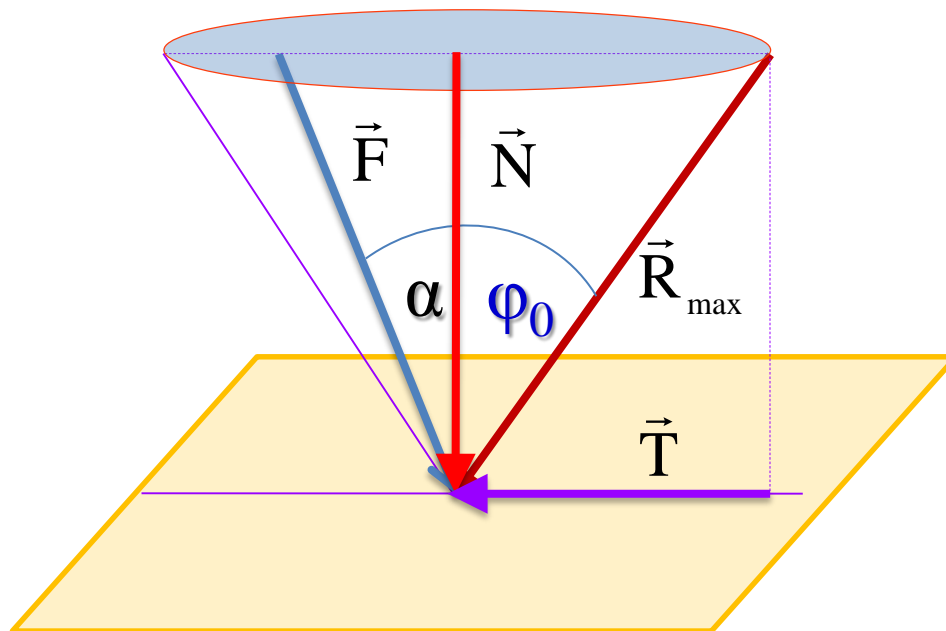
Nese $\alpha > \alpha_{gr}$ vjen deri te levizja e trupit ne rrafshin e vrazhdë

$$F = \mu_0 G \cos \alpha_{gr} = G \sin \alpha_{gr} \rightarrow \mu_0 \cos \alpha_{gr} = \sin \alpha_{gr}$$

$$\mu_0 = \operatorname{tg} \alpha_{gr}$$

Koni i ferkimit:

Në rastin kufitar , reaksioni total R_{max} me normalen mbyll këndin φ_0 , i cili quhet këndi i ferkimit. Atë mund ta caktojme duke u bazuar në figuren e dhënë



$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{T}{N} = \frac{\mu_0 N}{N} = \mu_0$$

Nga shprehja e më sipërme vijmë në përfundim se koeficienti i ferkimit të rreshqitjes statike është baraz me tangensin e këndit të ferkimit.

Trupi do të zhvendoset në qoftë se forca $F \sin \alpha$ është më e madhe se

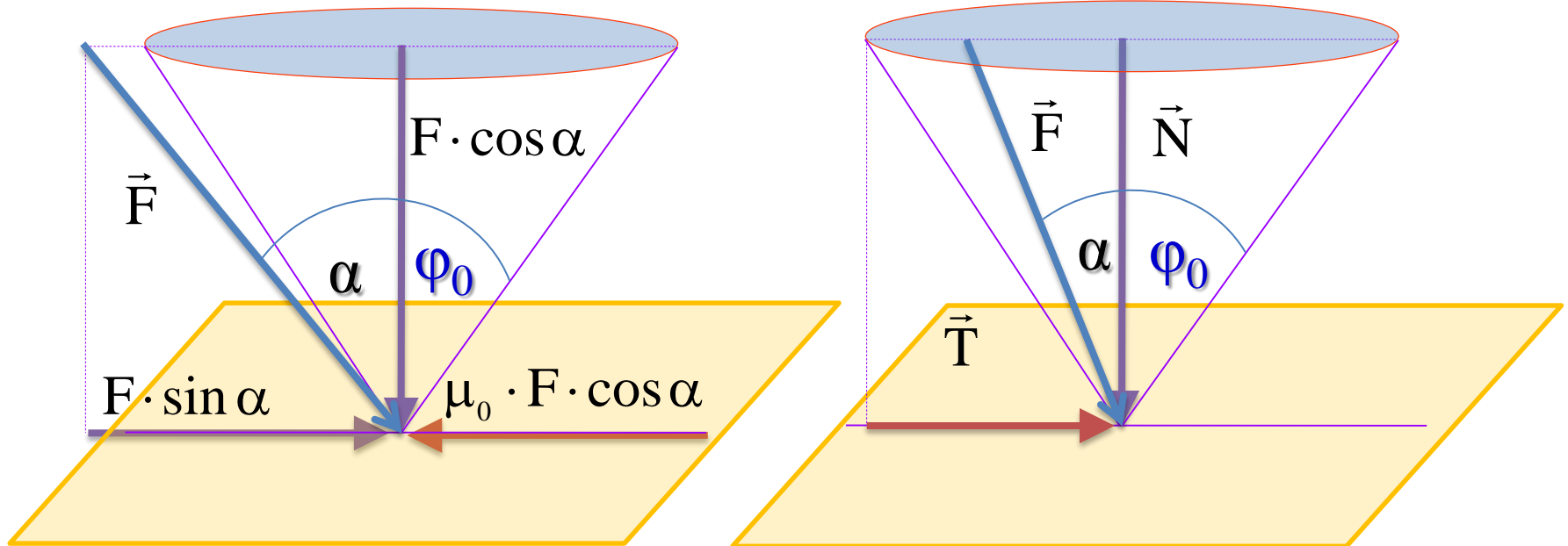
$$T = \mu_0 N = \mu_0 F \cos \alpha \quad \text{dmth:}$$

$$F \cdot \sin \alpha > \mu_0 \cdot F \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} > \mu_0 \quad \text{kurse} \quad \mu_0 = \text{tg} \varphi_0$$

$$\text{d.m.th.} \quad \text{tg} \alpha > \text{tg} \varphi_0 \quad \text{apo} \quad \alpha > \varphi_0$$

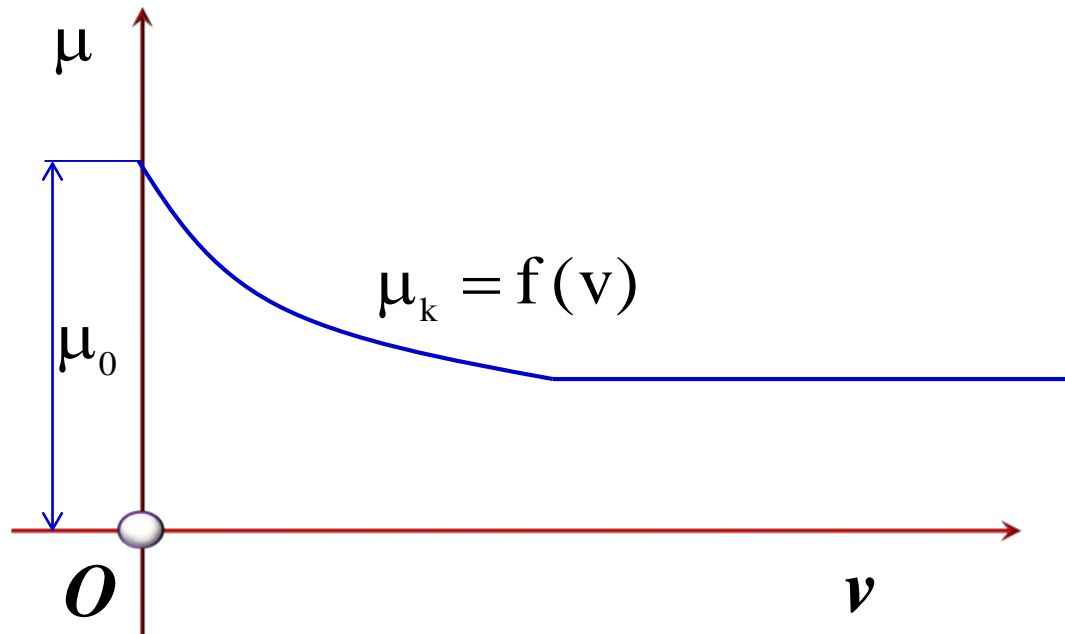
Nga kjo del se me asnjë forcë, që gjëndet brenda konit të fërkimit ($\alpha < \varphi_0$) nuk mund të zhvendoset trupi mbi sipërfaqen e vrazhdë



Koeficienti kinetik i ferkimit μ_k

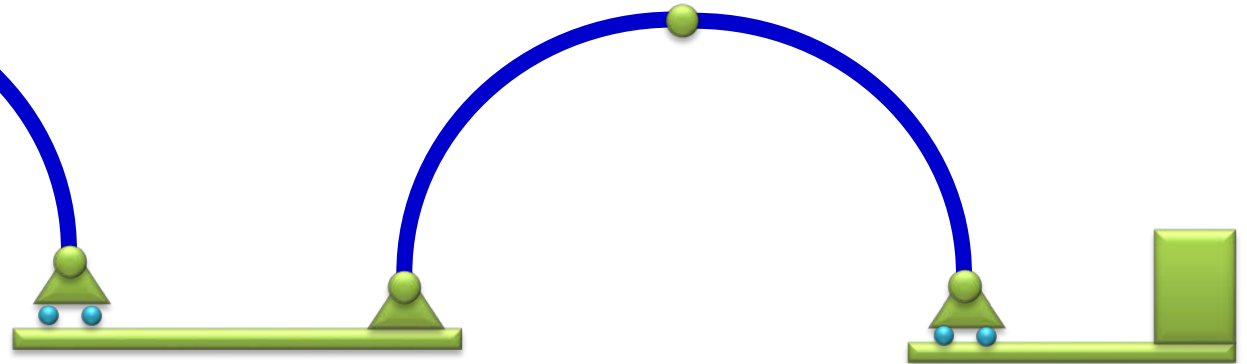
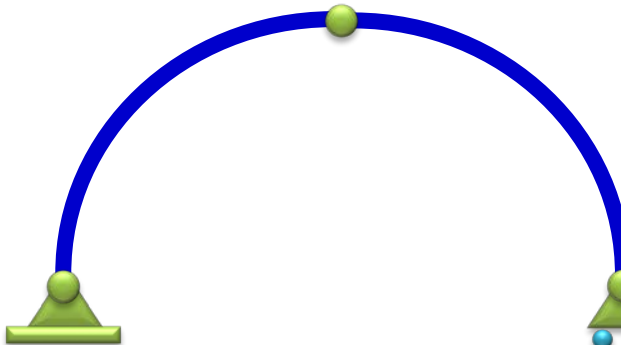
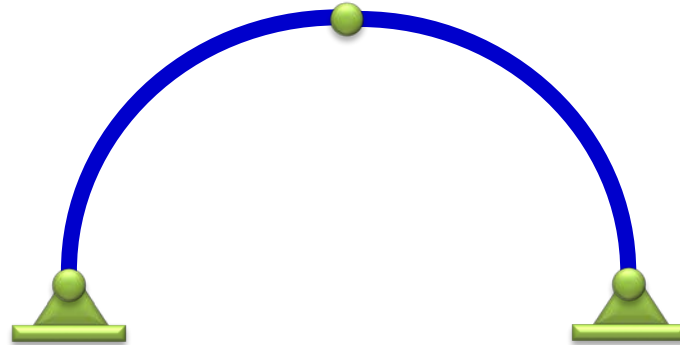
Me kalimin e trupit në levizje, forca e fërkimit zvogëlohet, kjo forcë zvogëlohet për shkak të zvogëlimit të koeficientit të fërkimit. Në këtë rast koeficienti i fërkimit quhet koeficienti kinetik i ferkimit μ_k

Në të shumtën e rasteve, me zmadhimin e shpejtësisë, koeficienti i kinetik i fërkimit zvogëlohet deri në një masë mandej gravidon një vlerë konstante si në figurë.



FORCAT NË PRERJE TË MBAJTËSIT TRA

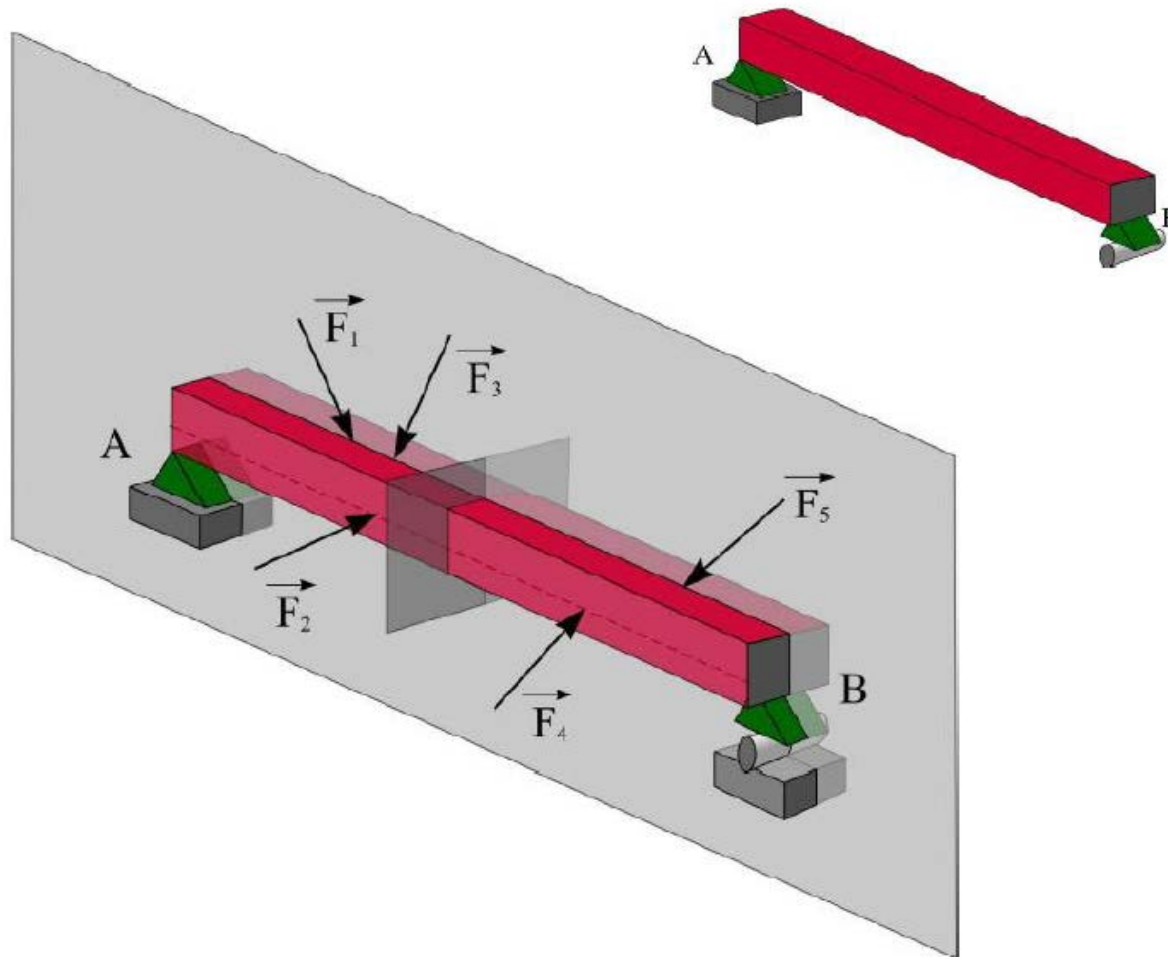
HARKU ME TRI SHARNIERA



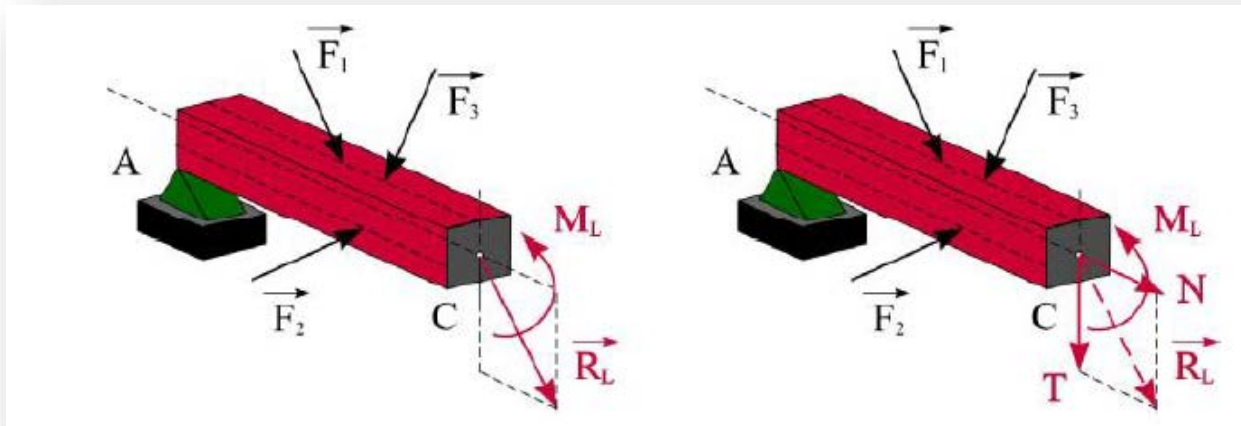
MEKANIZMI

MEKANIZMI I CILI SHENDRROHET NË
KONSTRUKSION KUR PERFUNDON
Ç'VENDOSJA

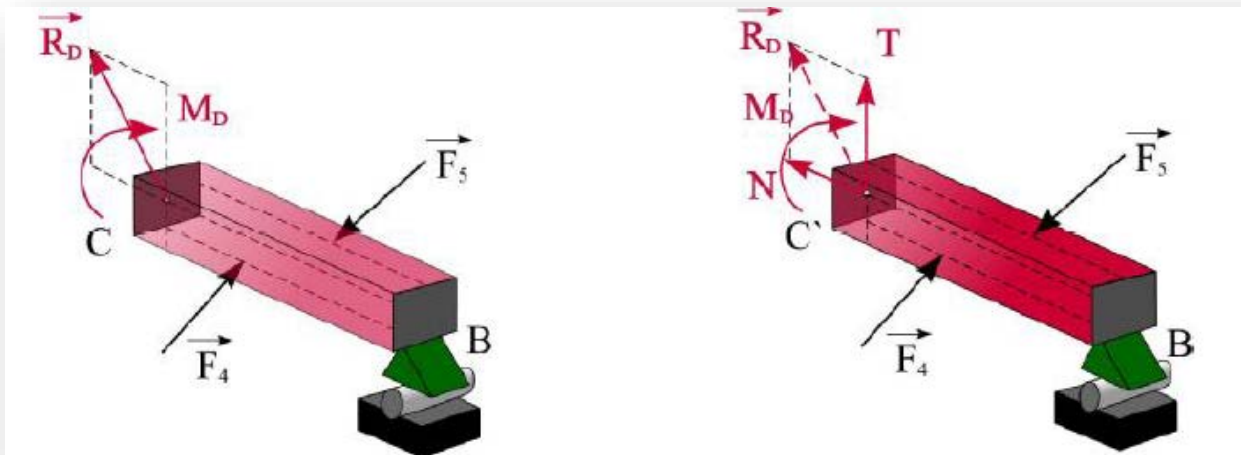
FORCAT NË PRERJE TË MBAJTËSIT TRA



EKUILIBRI I ANËS SË MAJTË TË MBAJTËSIT

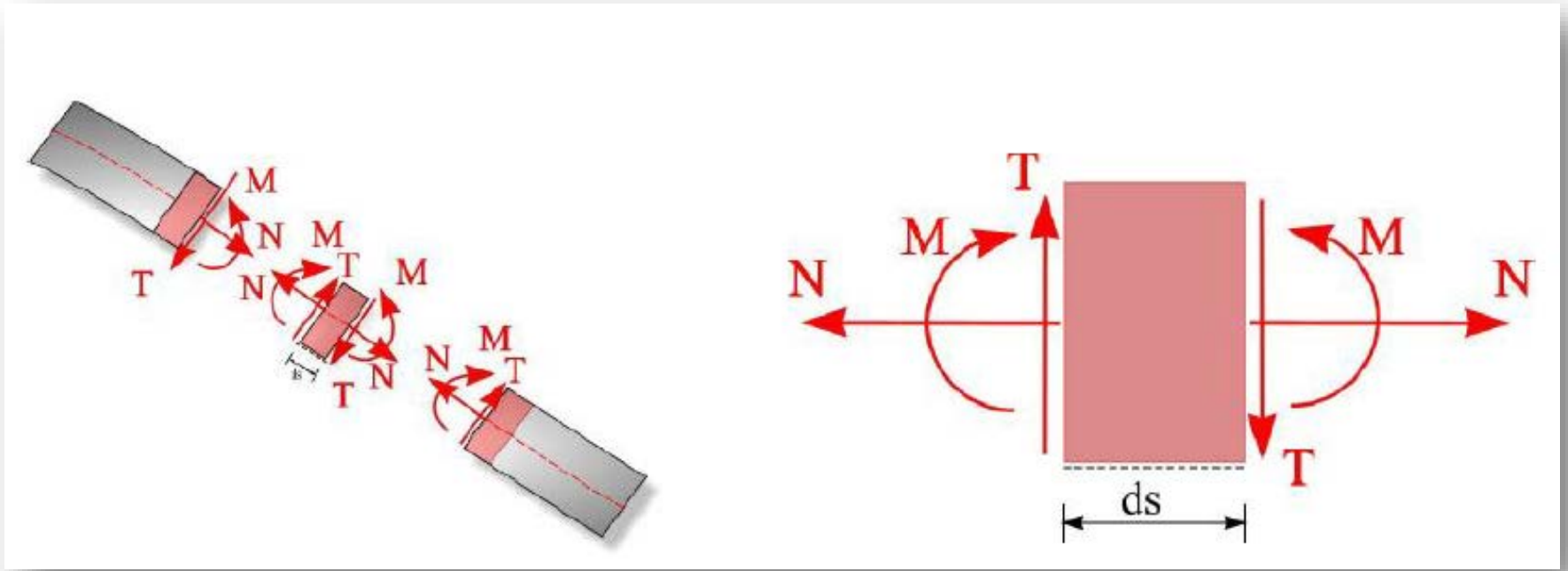


EKUILIBRI I ANËS SË DJATHTË TË MBAJTËSIT



$$\vec{R}_D = \vec{R}_M, \quad M_D = M_M = M$$

DEFINICIONI I FORCAVE PRERESE - KONVENTA PËR SHENJËN



Forca aksiale është pozitive nese në prerje vepron në terheqje.

Forca transverzale është pozitive nese prerjen e rrotullon në drejtim të akrepave të orës.

Momenti i përkuljes është pozitiv nese i tërheq fibrat.

$$N = \sum X_M = \sum X_D$$


Forcë aksiale quhet forca e cila vepron paralel me aksin e mbajtësit.

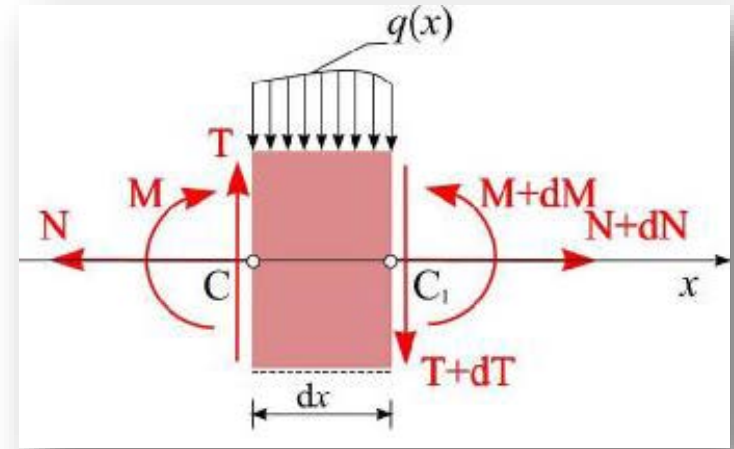
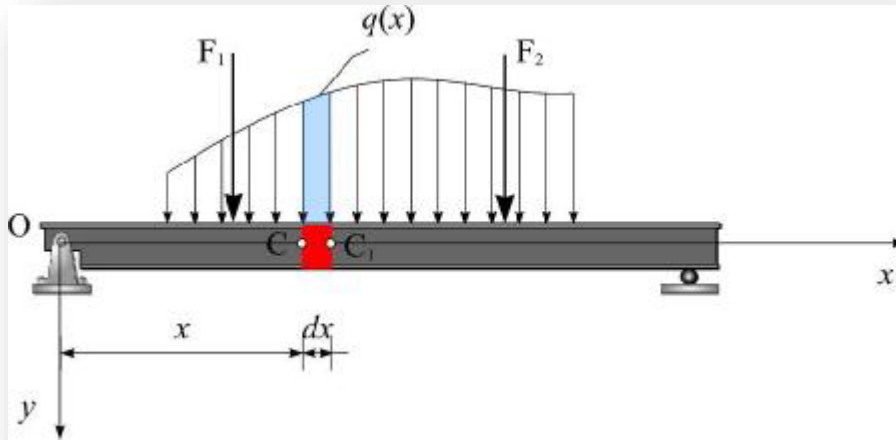
$$T = \sum Y_M = \sum Y_D$$


Forcë transgerzale quhet forca e cila vepron normal me aksin e mbajtësit.

$$M = \sum M_{CM} = \sum M_{CD}$$


Momenti i pculjes është i barabartë me shumën e momenteve të të gjitha forcave nga njëra ose nga ana tjetër e prerjes në raport me qendrën e prerjes tërthore.

VARËSIA DIFERENCIALE NË MES TË MOMENTIT M, FORCËS TRANSFERZALE T DHE NGARKESËS KONTINUALE q



$$\sum Y = 0 \Rightarrow T \cancel{\text{---}} dT - T \cancel{\text{---}} q(x)dx = 0, \Rightarrow q(x) = -\frac{dT}{dx}$$

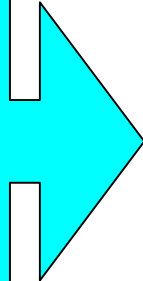
$$\sum M_{C_1} = 0 \Rightarrow M \cancel{\text{---}} dM - M \cancel{\text{---}} Tdx - q(x)dx \frac{dx}{2} = 0, \Rightarrow T = \frac{dM}{dx}$$

$$M \frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dT}{dx} = -q(x)$$

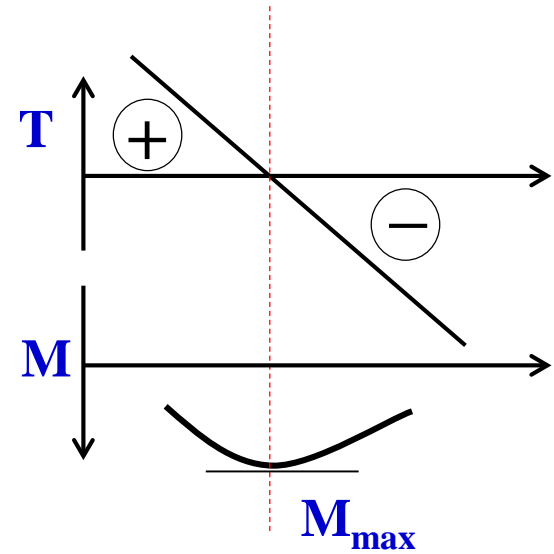
VLERAT EKSTRME TË MOMENTIT TË PËRKULJES

$$\frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{dM}{dx} = 0,$$

$$T = \frac{dM}{dx}$$



$$T = 0$$

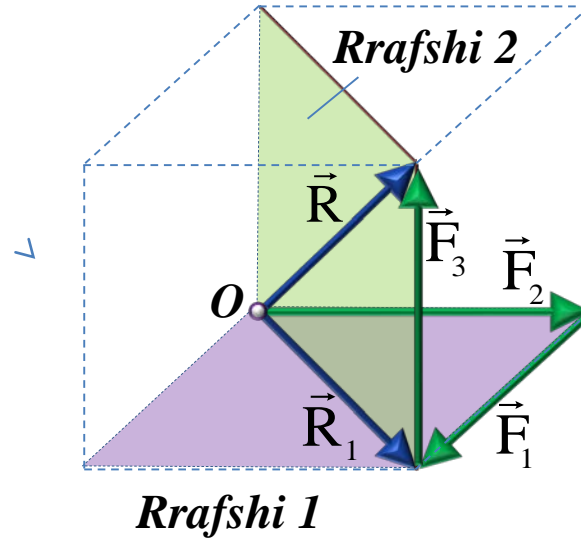
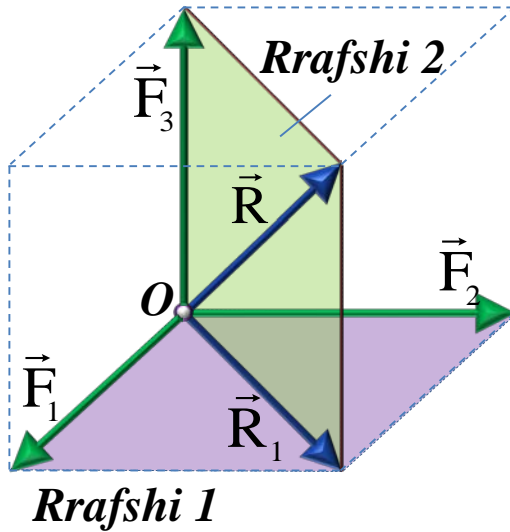


M	T	q
Constant	0	0
Lakore e shk. I	Constant	0
Lakore e shk. II	Lakore e shk. I	constant

Momenti i përkuljes ka vlerë ekstreme në prerje kur forca transferzale është zero.

SISTEMI I FORCAVE KONKURENTE NË HAPËSIRË

Përbërja e tri forcave



Rezultanta e tri forcave mundë të caktohet me metoden e paralelogramit ose të trkëndëshit të forcave:

$$\vec{R}_1 = (\vec{F}_1, \vec{F}_2), \quad - \text{rrafshi 1}$$

$$\vec{R} = (\vec{R}_1, \vec{F}_3), \quad - \text{rrafshi 2}$$

$$\Rightarrow \vec{R} = (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3),$$

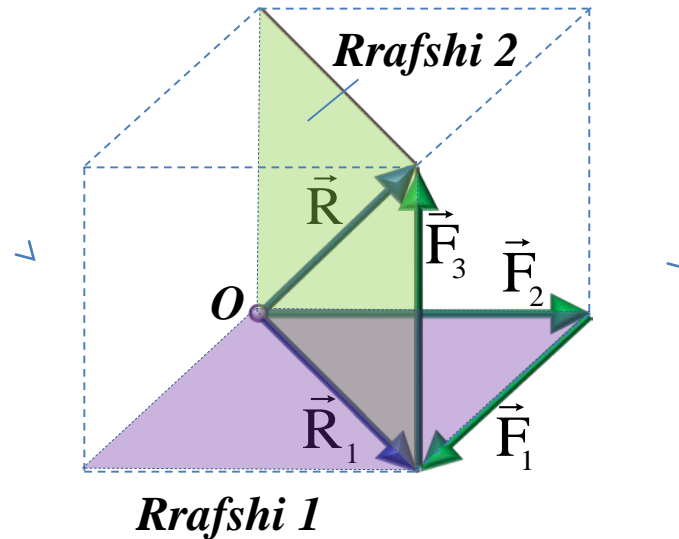
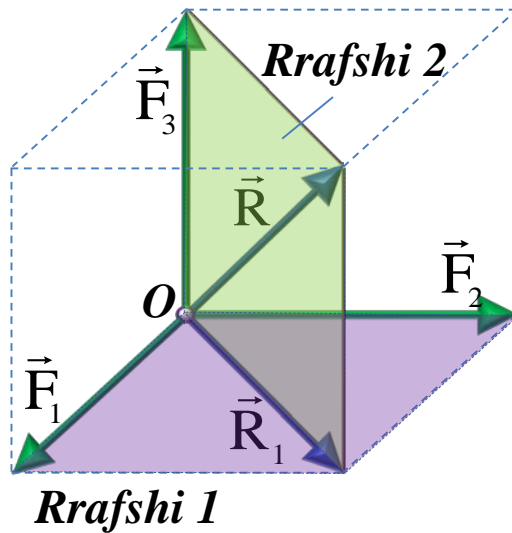
$$\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \quad - \text{rrafshi 1}$$

$$\vec{R}_2 = \vec{R}_1 + \vec{F}_3, \quad - \text{rrafshi 2}$$

$$\Rightarrow \vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$

Rezultantën e tri forcave që nuk shtrihen në një rrafsh e përfaqëson diagonalja paralelopipedit i cili është i konstruktuar nga ato forca.

Përbërja e sistemit të forcave



$$\vec{R}_1 = (\vec{F}_1, \vec{F}_2), \vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2,$$

$$\vec{R}_2 = (\vec{R}_1, \vec{F}_3), \vec{R}_2 = \vec{R}_1 + \vec{F}_3,$$

$$\vec{R} = (\vec{R}_2, \vec{F}_4), \vec{R} = \vec{R}_2 + \vec{F}_4,$$

$$\Rightarrow \vec{R} = (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4), \vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4,$$

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n, \quad \vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$

ZBËRTHIMI FORCËS NË TRI KOMPONENTE

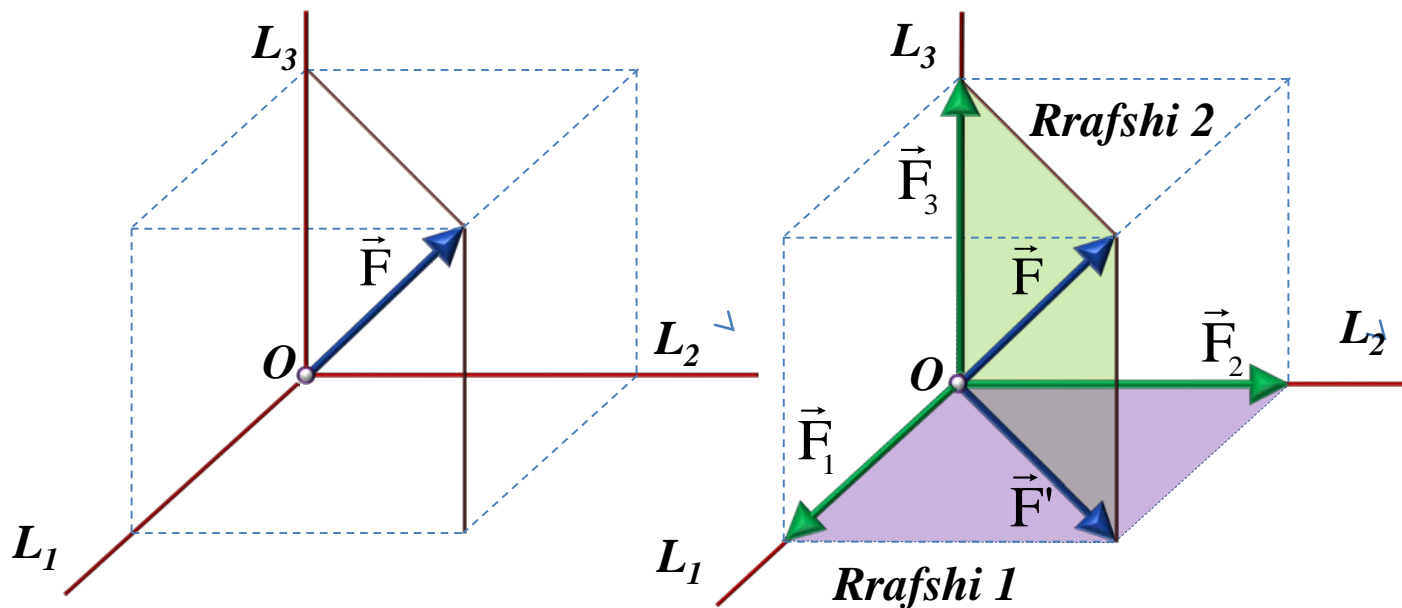
Që forca të zërthehet në tri komponente drejtimet e të cilave jepën L_1 , L_2 , L_3 , aplikohet metoda e paralelogramit të forcave:

a) \vec{F} zërthehet në rrafshin 2:

b) \vec{F}' zërthehet në rrafshin 1:

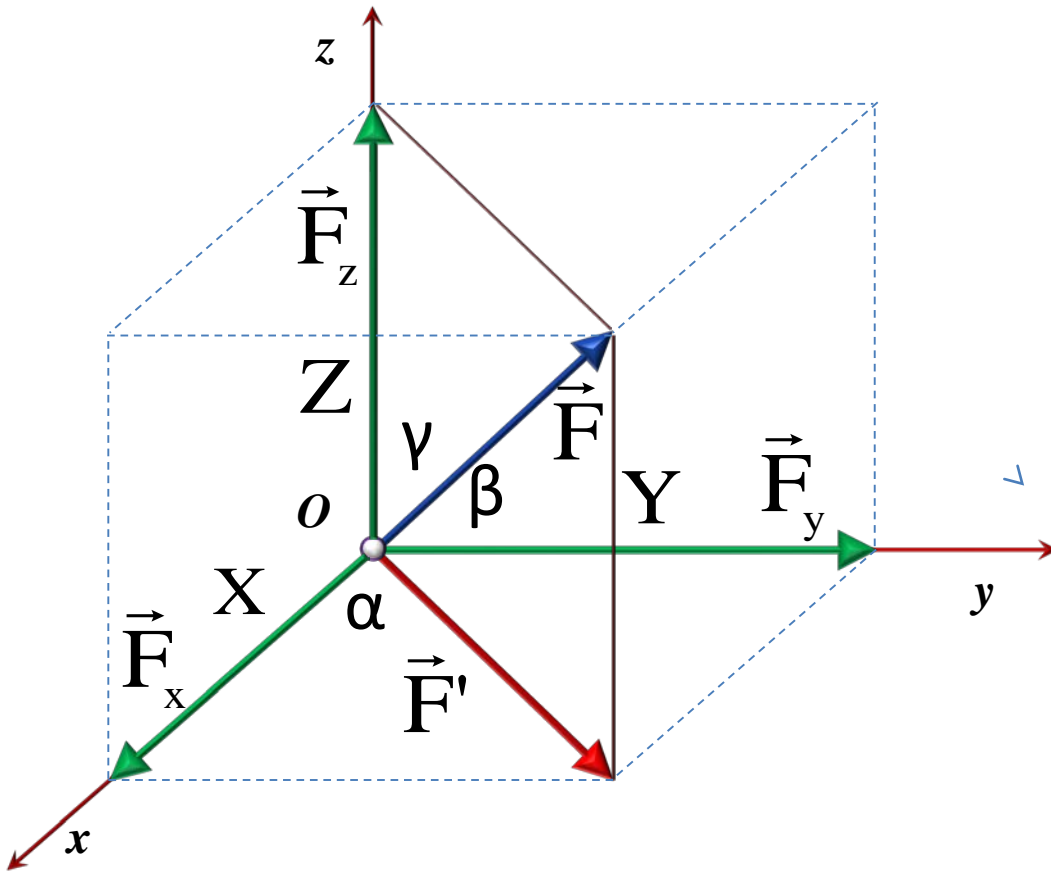
$$\begin{aligned}\vec{F} &\equiv (\vec{F}_3, \vec{F}'), & \vec{F} &= \vec{F}_3 + \vec{F}' \\ \vec{F}' &\equiv (\vec{F}_1, \vec{F}_2), & \vec{F}' &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2\end{aligned}$$

$$\vec{F} \equiv (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3),$$



ZBËRTHIMI FORCËS NË DREJTIM TË AKSEVE KOORDINATIVE

Me aplikimin e metodës së paralelogramit të forcave forca mundë të zërthehet në tri komponente në drejtim të akseve koordinative X, Y, Z:



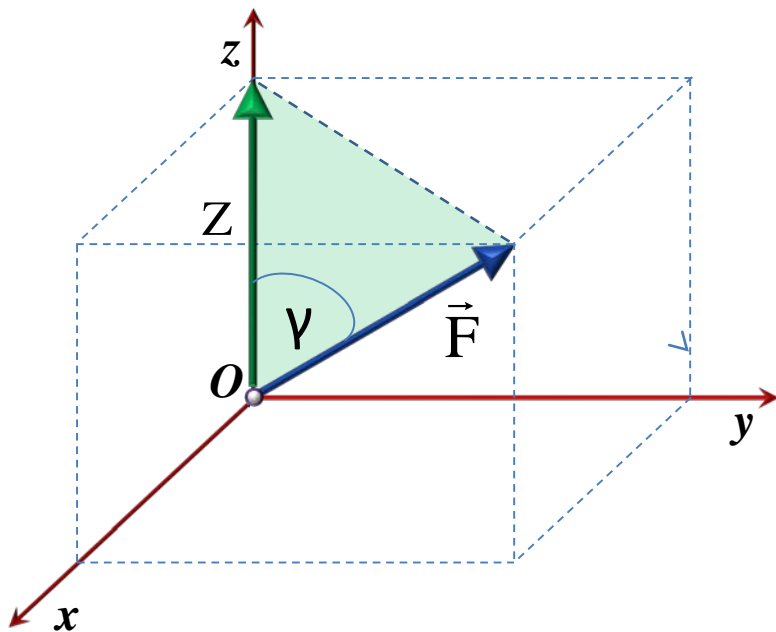
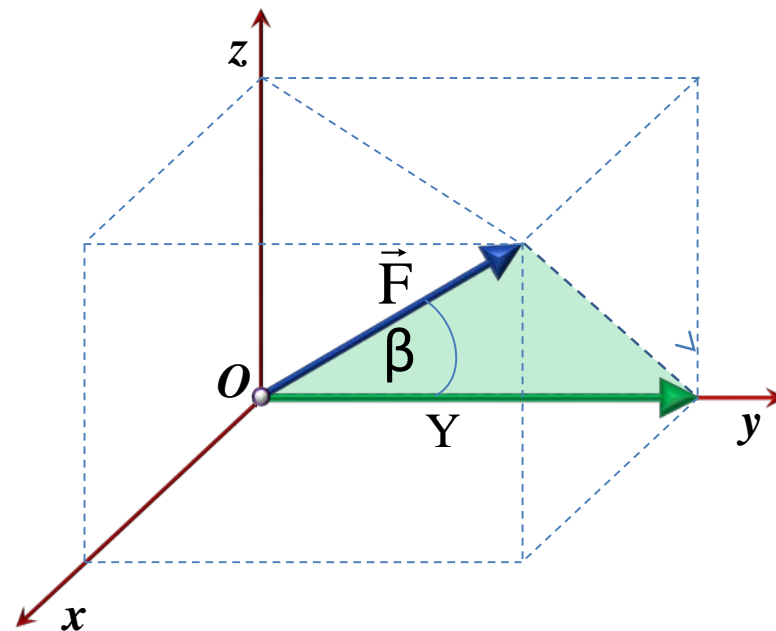
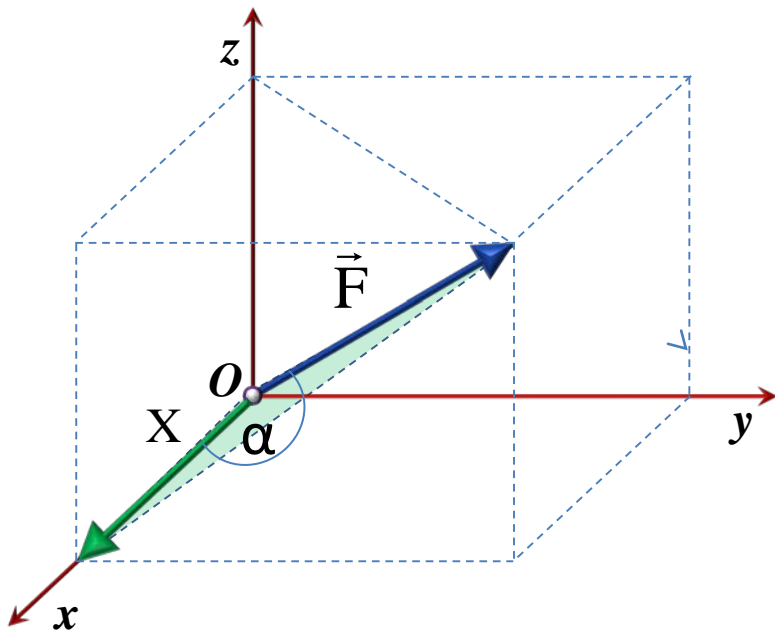
$$\vec{F} \equiv (\vec{F}_x, \vec{F}_y, \vec{F}_z),$$

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z.$$

$$\vec{F}_x = X \vec{i}, \quad \vec{F}_y = Y \vec{j}, \quad \vec{F}_z = Z \vec{k},$$

$$\vec{F} = X \vec{i} + Y \vec{j} + Z \vec{k}.$$

Projeksionet e forcës në akset koordinative janë:



$$X = F \cdot \cos \alpha$$

$$Y = F \cdot \cos \beta$$

$$Z = F \cdot \cos \gamma$$

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$\cos \alpha = \frac{X}{F}, \quad \cos \beta = \frac{Y}{F}, \quad \cos \gamma = \frac{Z}{F}$$

METODA ANALITIKE E PËRBËRJES SË SISTEMIT TË FORCAVE NË HAPËSIRË

Rezultanta e sistemit të forcave në hapësirë është: $\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$.

Projeksionet e resultantës në akset koordinative jepen me shprehjet:

$$X_R = \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n F_i \cos \alpha_i,$$

$$Y_R = \sum_{i=1}^n Y_i = \sum_{i=1}^n F_i \cos \beta_i,$$

$$Z_R = \sum_{i=1}^n Z_i = \sum_{i=1}^n F_i \cos \gamma_i.$$

Intenziteti dhe drejtimi i resultantës jepen me shprehjet:

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$\cos \alpha = \frac{X}{F}, \quad \cos \beta = \frac{Y}{F}, \quad \cos \gamma = \frac{Z}{F}$$

EKUILIBRI I SISTEMIT TË FORCAVE KONGURENTE NË HAPËSIRË

Që sistemi i forcave kongurente në hapësirë të jetë në ekuilibër është e nevojshme dhe e mjaftueshme që:

- Rezultanta e sistemi të forcave kongurente në hapësirë të jetë e barabartë me zero.
- Shuma vektoriale e sistemi të forcave kongurente në hapësirë të jetë e barabartë me zero.

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$$

$$R = \sqrt{X_R^2 + Y_R^2 + Z_R^2},$$

$$X_R^2 + Y_R^2 + Z_R^2 = 0$$

$$X_R = 0, Y_R = 0, Z_R = 0$$



$$X_R = \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n F_i \cos \alpha_i,$$

$$Y_R = \sum_{i=1}^n Y_i = \sum_{i=1}^n F_i \cos \beta_i,$$

$$Z_R = \sum_{i=1}^n Z_i = \sum_{i=1}^n F_i \cos \gamma_i.$$

Kushtet analitike të ekuilibrit të sistemit të forcave kongurente në hapësirë janë:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n Z_i = 0.$$

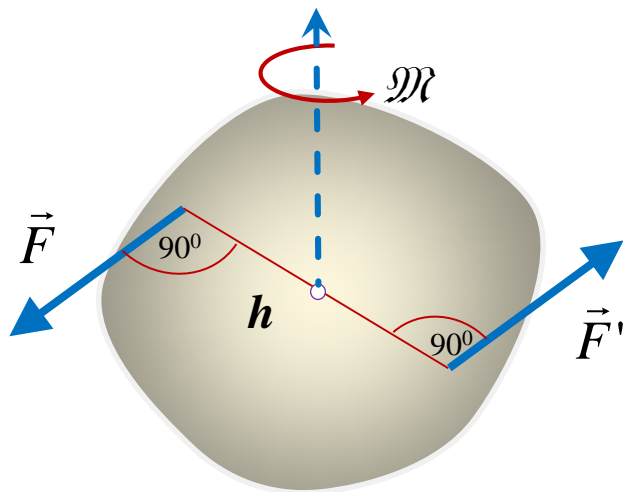
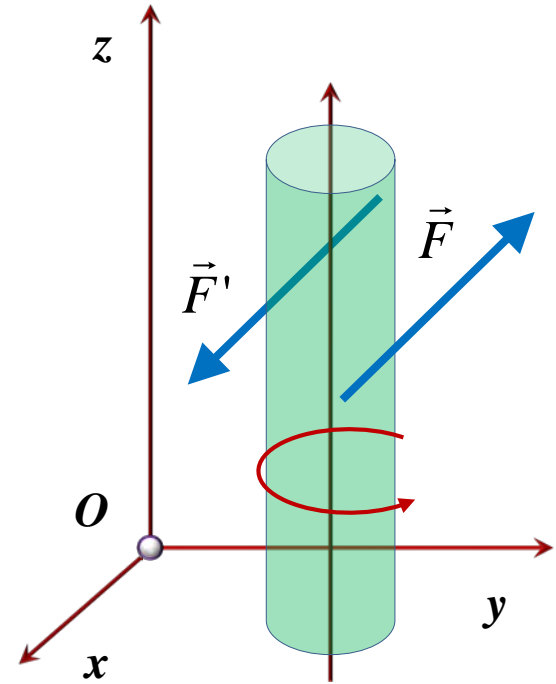
Që sistemi i forcave kongurente në hapësirë të jet në ekuilibër është e nevojshme dhe e mjaftueshme që:

- Shuma vektoriale e projeksioneve të sistemit të forcave kongurente në hapësirë të jet e barabartë me zero.

QIFTI I FOARCAVE NË HAPËSIRË

Qifti i foarcave në hapësirë është njësia e veprimit mekanik i cili shkakton rrotullimin e trupit të ngurtë rreth aksit të pa levizshëm.

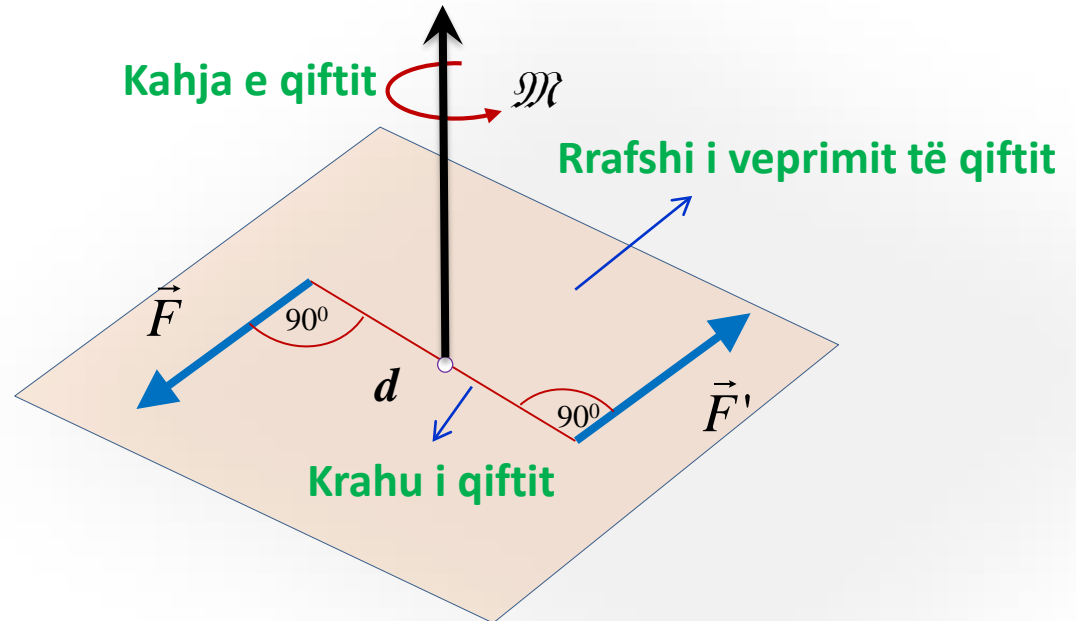
Qiftin e foarcave e përbëjnë dy forca paralele me intenzitet të njëjtë dhe me kahje të kundërt.



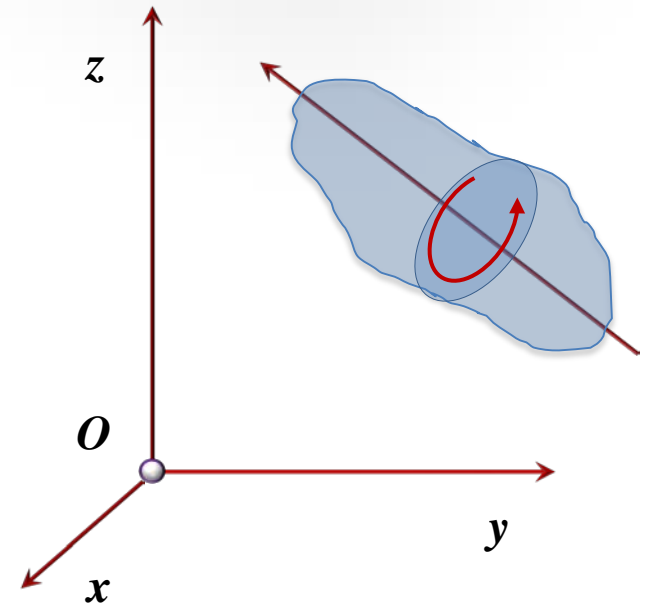
Forcat e qiftit veprojnë në rrafshin i cili është normal në aksin e rrotullimit.

$$\mathfrak{M} = \pm F d$$

Kahja e qiftit është pozitive nese trupin e rrotullon në drejtim të kundërt të akrepave të orës.



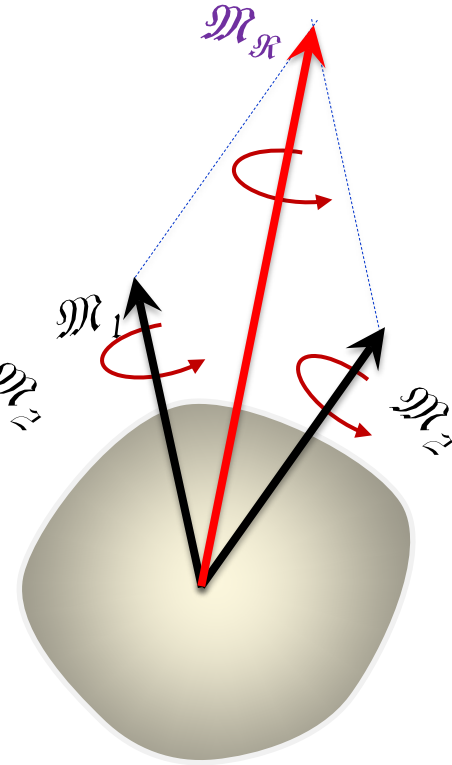
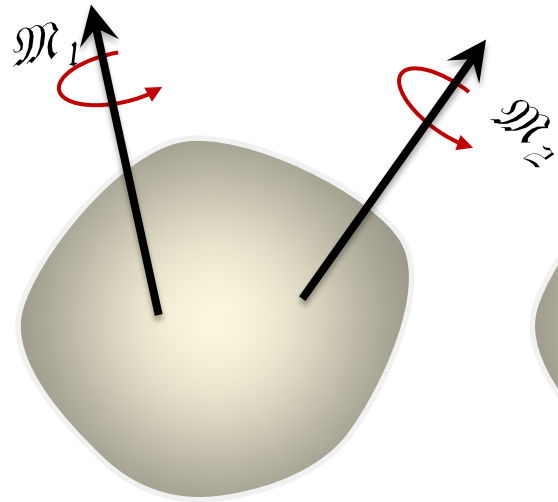
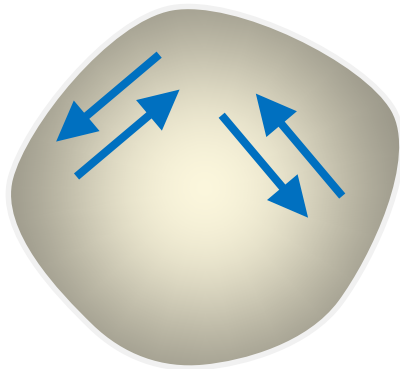
Qifti i forcave mundë të zëvendësohet me një vektor i cili quhet momenti i qiftit \mathfrak{M}



PËRBËRJA E QIFTEVE NË HAPËSIRË

Dy qifte, të cilët shtrihën në rrafshje të ndryshëm, janë ekuivalentë me një qift momenti i të cilit është i barabartë me shumën gjeometrike të momenteve të qiftëve të dhëna:

$$\mathcal{M}_R = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$$



$$\mathcal{M}_R = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_3 + \dots \quad \mathcal{M}_n = \sum \mathcal{M}_i$$

EKUILIBRI I QIFTEVE NË HAPËSIRË

Që sistemi i qifteve të forcave të jet në ekuilibër duhet që momenti i qiftit rezultues të jetë i barabartë me zero.

$$\mathfrak{M}_R = \sum \mathfrak{M}_i = 0$$

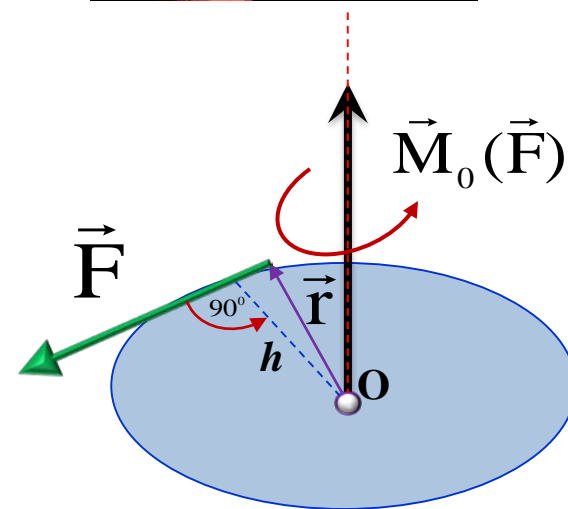
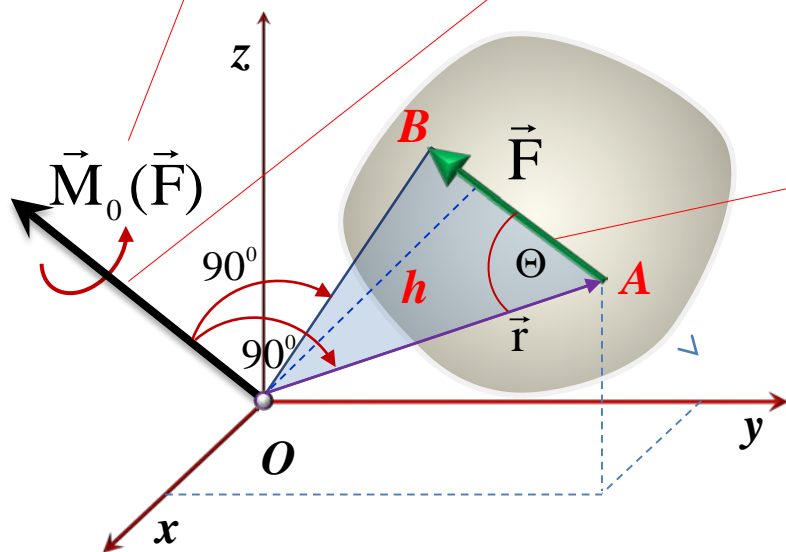
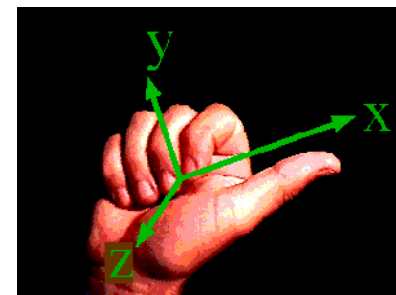
MOMENTI I FORCËS PËR PIKËN DHE MOMENTI I FORCËS PËR AKSIN

Momenti i forcës për pikën - Formulimi vektorial

Kahja-pozitive në drejtim të kundërt të akrepave të orës

Drejtimi-normalja në rrafshin që e formojn vektorët

Intenziteti-prodhimi i forcës dhe krahut të forcës



Momenti i forcës për pikën është madhësi vektoriale

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

Intenziteti i momentit të forcës për pikën është intenziteti i prodhimit vektorial:

$$M_0(\vec{F}) = Fr \sin \Theta = Fh$$

PËRCAKTIMI I MOMENTIT TË FORCËS PËR PIKËN ME NDIHMEN E PRODIMIT VEKTORIAL

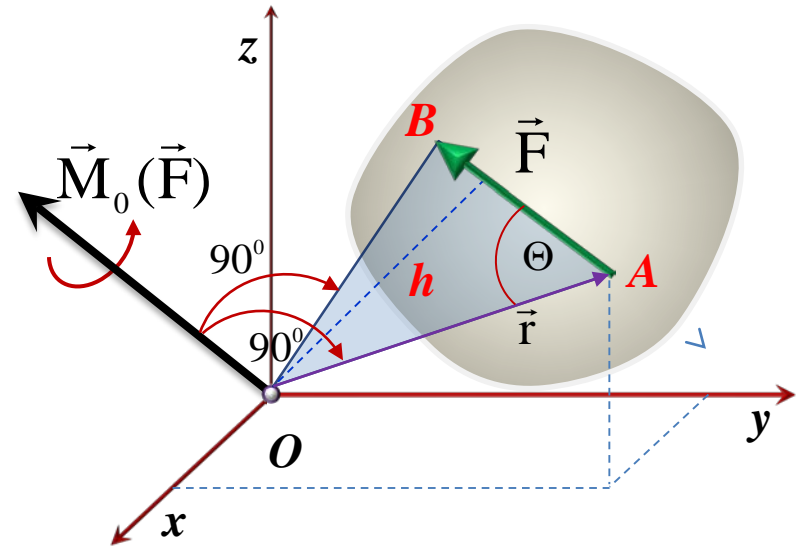
$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$

x, y dhe z - koordinatat e pikëveprimit të forcës.

X, Y dhe Z - projeksionet e forcës në akse.

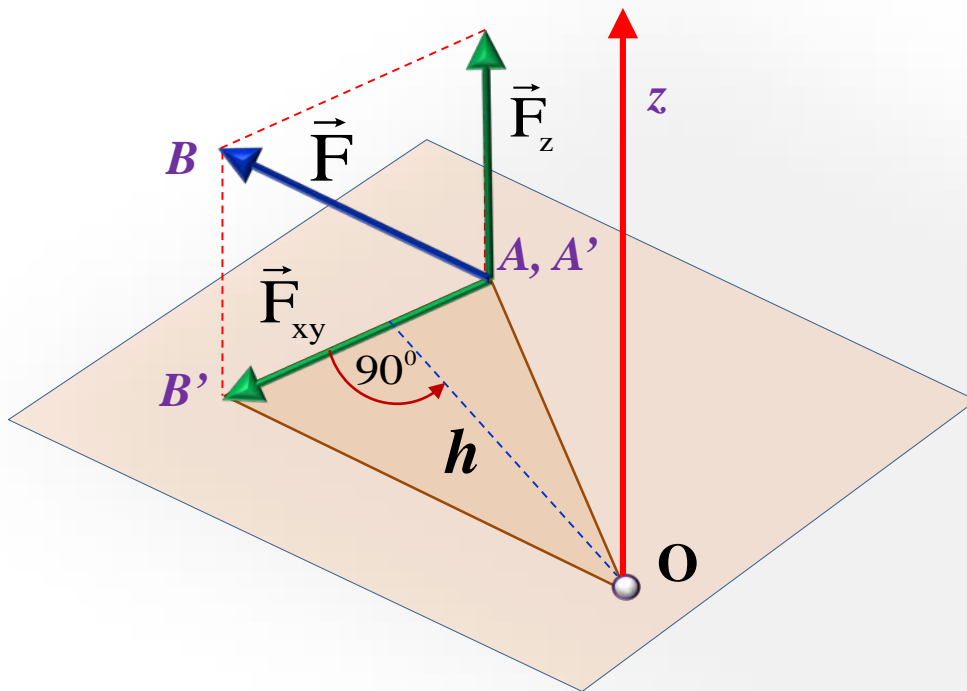
$$M_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$



$$M_0(\vec{F}) = (yZ - zY)\vec{i} + (zX - xZ)\vec{j} + (xY - yX)\vec{k}$$

MOMENTI I FORCËS PËR AKSIN

Është madhësia mekanike e cila definon rrotullimin rreth aksit.



$$M_z(\vec{F}) = \pm F_{xy} h$$

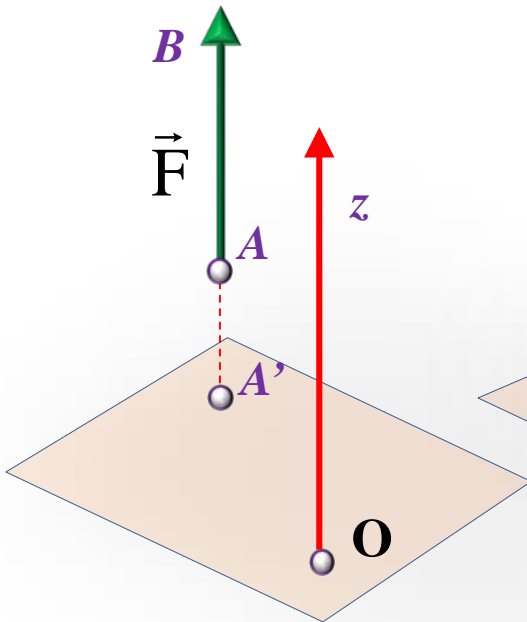
Momenti i forcës ndaj aksit është i barabartë me prodhimin e projekcionit të forcës në rrafsh në të cilin aksi është normal (F_{xy}) dhe krahut të forcës (h).

Momenti i forcës për aksin është madhësi skalare.

Momenti i forcës për aksin është zero:

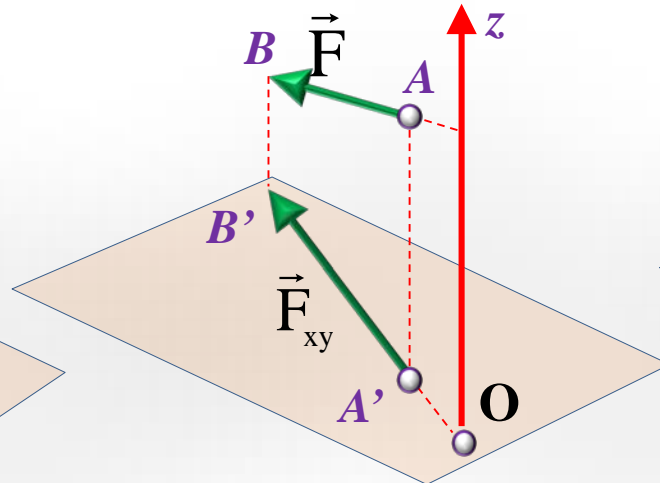
Nese forca është paralel me aksin

$$\vec{F}_{xy} = 0$$

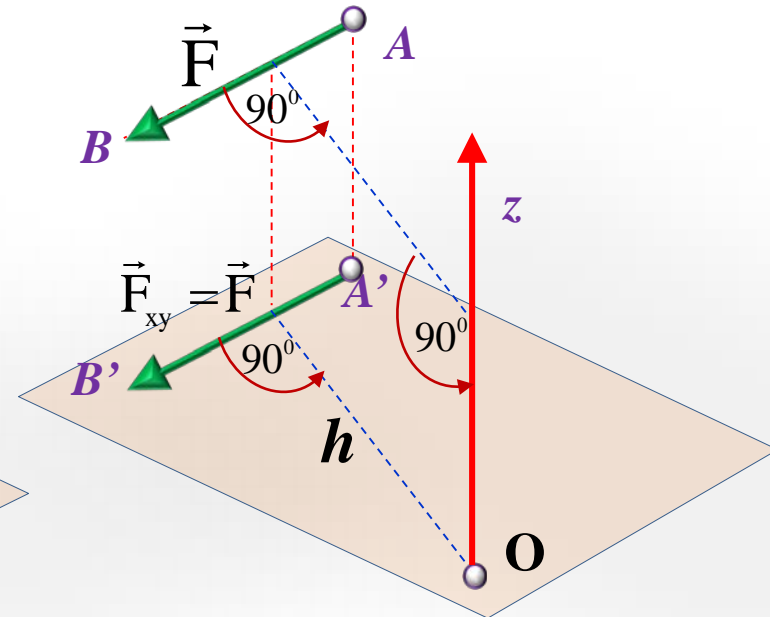


Nese forca e pret aksin

$$h = 0$$

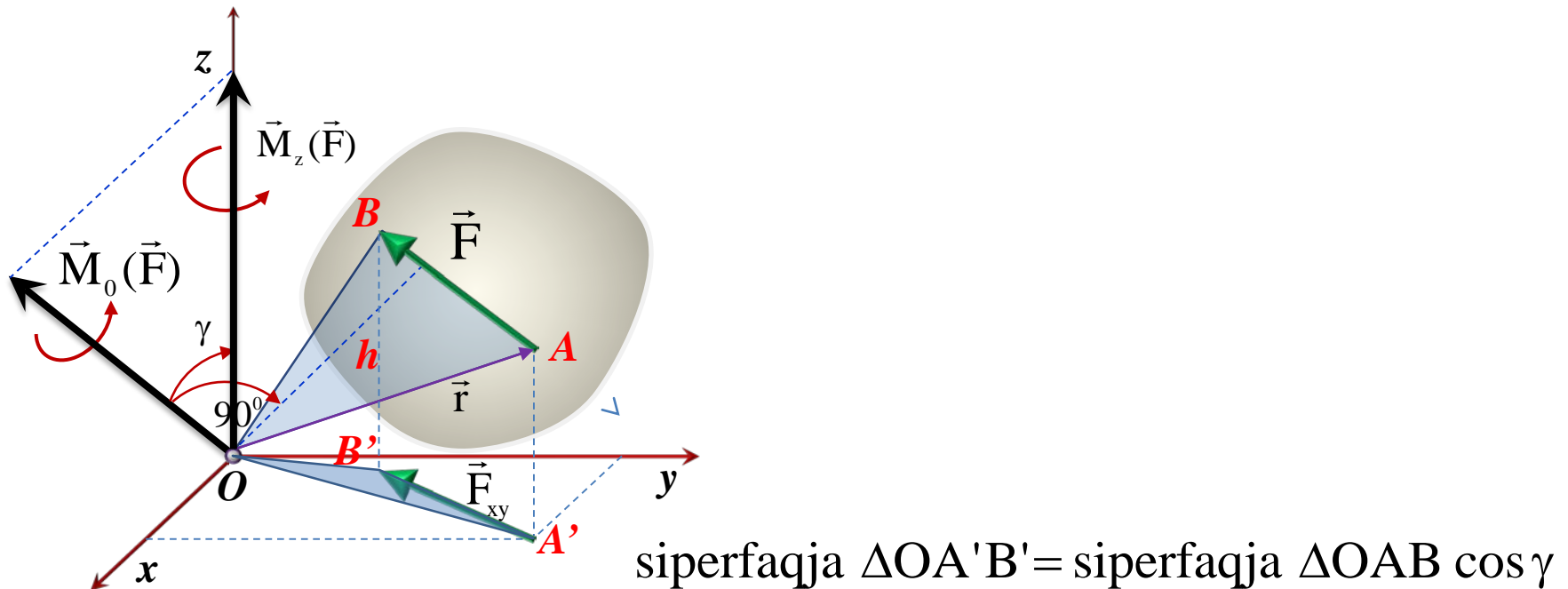


$$M_z(\vec{F}) = \pm F_{xy} h$$



VARËSIA NË MES MOMENTIT PËR PIKËN DHE MËMENTIT PËR AKSIN

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = Fh = 2 \text{ siperfaqe } \triangle OAB \quad \vec{M}_z(\vec{F}) = 2 \text{ siperfaqe } \triangle OA'B'$$



$$M_z(\vec{F}) = M_z = M_0(\vec{F}) \cos \gamma$$

Projeksioni i momentit të forcës për pikën në drjtim të aksit është i barabartë me momentin e forcës për atë aks.

$$M_0(\vec{F}) = (yZ - zY)\vec{i} + (zX - xZ)\vec{j} + (xY - yX)\vec{k}$$

Në bazë të lidhjes paraprake kemi:

$$M_x(\vec{F}) = M_{ox}(\vec{F}) = yZ - zY$$

$$M_y(\vec{F}) = M_{oy}(\vec{F}) = zX - xZ$$

$$M_z(\vec{F}) = M_{oz}(\vec{F}) = xY - yX$$



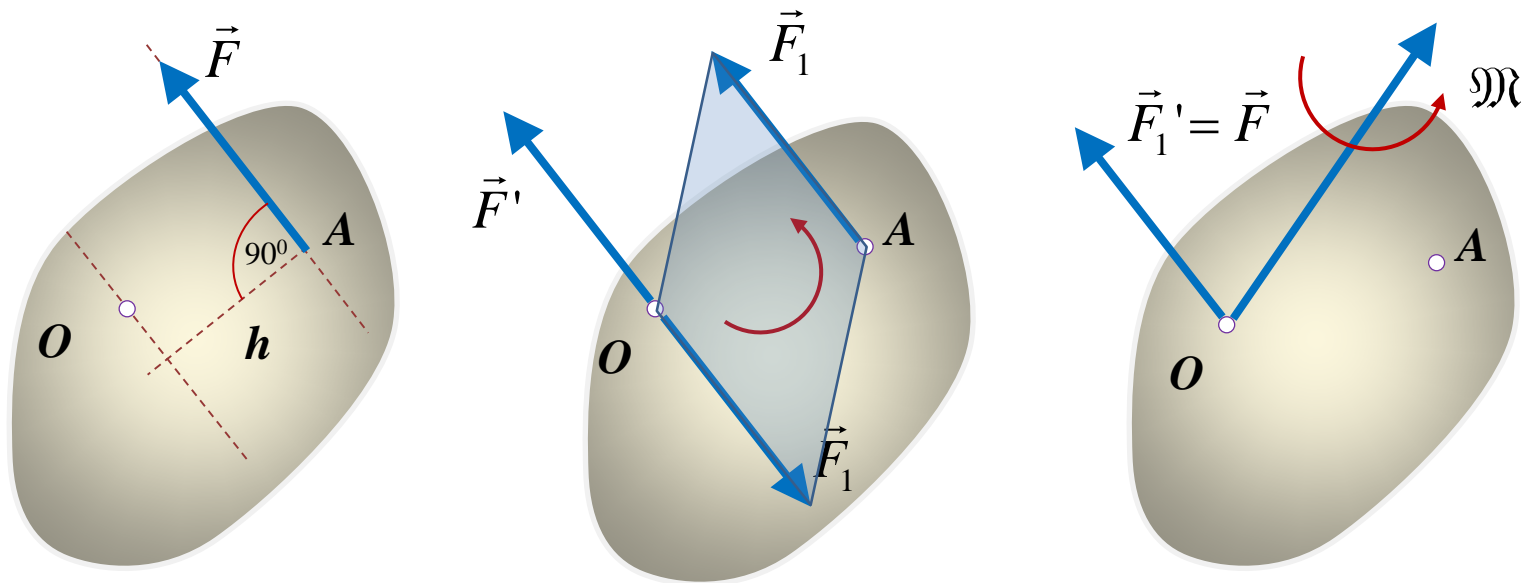
Shprehjet analitike për momentin e forcës ndaj akseve koordinative

SISTEMI I FORCAVE TË QFARËDOSHME NË HAPËSIRË

Redukimi i forcës në pikë

Teoremë:

Forca mundë të redukohet nese paraprakisht i shtohet qifti i cili është i barabartë me momentin e forcës ndaj pikës reduktuese.



$$\vec{F}_1 = \vec{F}' \quad \vec{F} = (\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}') \quad \vec{F}' = \vec{F}, \quad \vec{F}_1 = -\vec{F}$$

$$\mathcal{M} = M_O(\vec{F}) = \vec{r}_A \times \vec{F}$$

DEFINIMI I VEKTORIT KRYESOR DHE MOMENTIT KRYESOR

Shuma vektoriale e të gjitha forcave të sistemit është vektori kryesor i sistemit të forcave të dhëna.

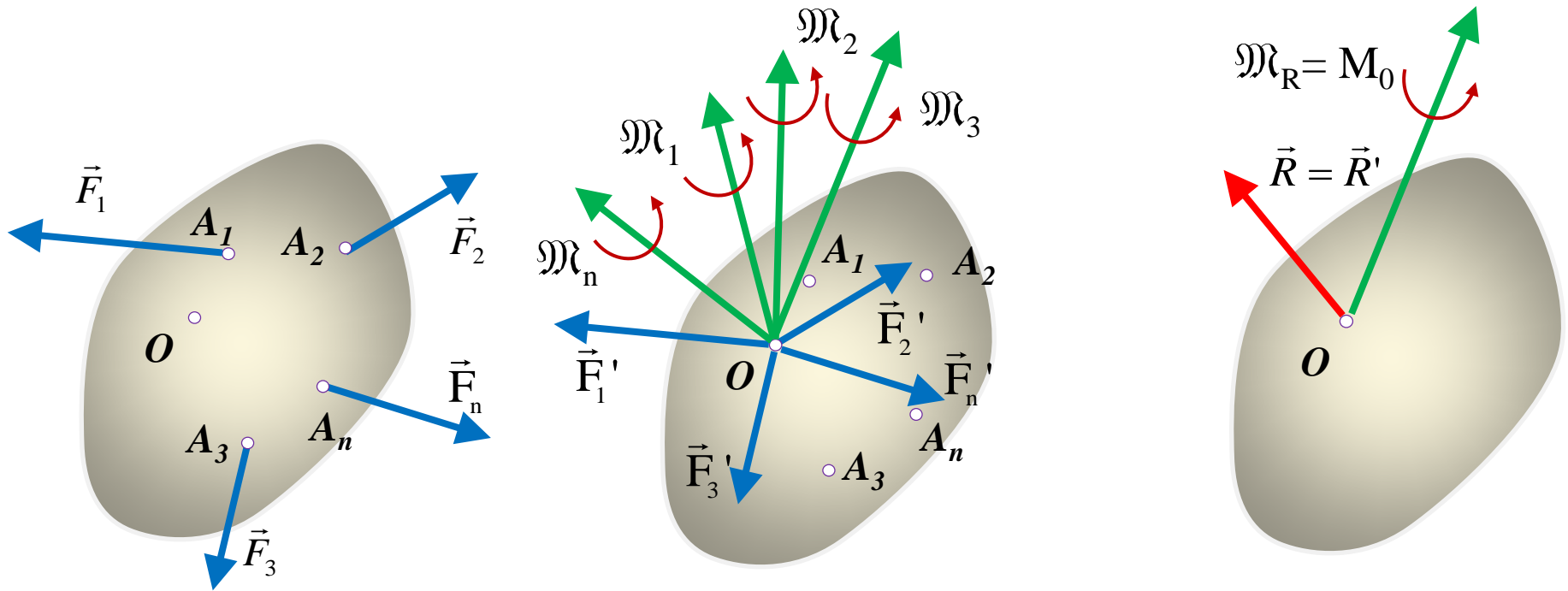
$$\vec{R}' = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i,$$

Shuma vektoriale e të gjitha momenteve të forcave të sistemit për pikën O quhet moment kryesor i sistemit të forcave të dhëna për pikën O.

$$\vec{M}_0 = \sum_{i=1}^n \vec{M}_0(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

REDUKIMI I SISTEMIT TË FORCAVE HAPSINIORE NË PIKË

Sistemi i forcave në hapësirë, i cili vepron në trupin e ngurtë, statikisht është ekuivalent me një forcë (rezultanta e redukuar), e cila është e barabartë me vektorin kryesorë të sistemit të forcave të dhëna, me pikëveprim në pikën O dhe me çiftin e forcave momenti i të cilit është i barabartë me momentin kryesorë të sistemit të forcave për pikën O .



$$\vec{F}'_1 = \vec{F}_1$$

$$\vec{F}'_2 = \vec{F}_2$$

•

•

$$\vec{F}'_n = \vec{F}_n$$

$$\mathfrak{M}_1 = \sum_{i=1}^n \vec{M}_0(\vec{F}_1)$$

$$\mathfrak{M}_2 = \sum_{i=1}^n \vec{M}_0(\vec{F}_2)$$

•

•

$$\mathfrak{M}_n = \sum_{i=1}^n \vec{M}_0(\vec{F}_n)$$

$$\vec{R}' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}'_i$$

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \dots + \mathfrak{M}_n = \sum \mathfrak{M}_i = \mathbf{0}$$

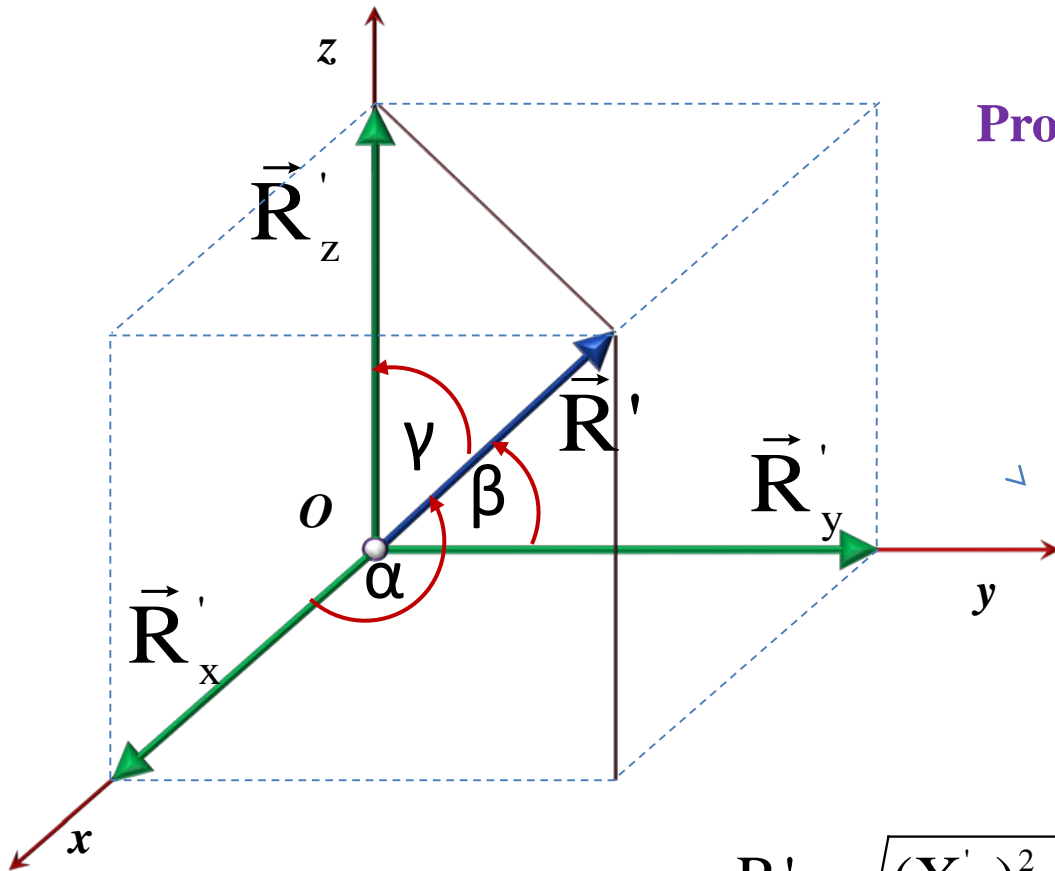
$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}'_i = \vec{R}'$$

$$\mathfrak{M} = \vec{M}_0 = \sum_{i=1}^n \vec{M}_0(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Vektori kryesor

Momenti kryesor

SHPREHJET ANALITIKE PËR VEKTORIN KRYESOR DHE MOMENTIN KRYESOR



Projeksionet e vektorit kryesor janë:

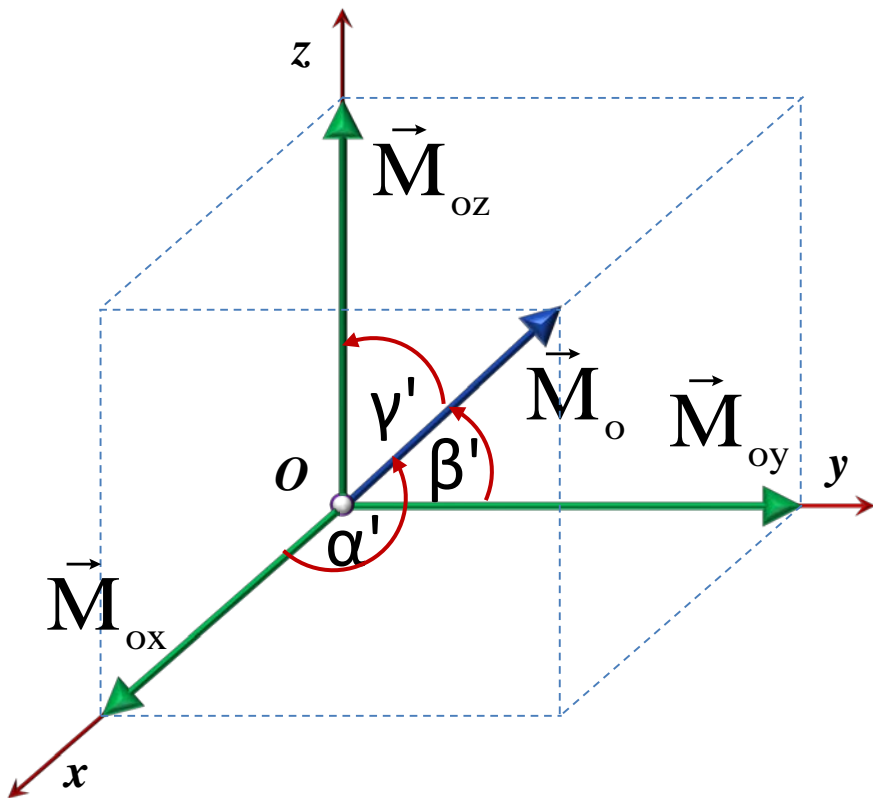
$$X'_R = \sum_{i=1}^n X_i$$

$$Y'_R = \sum_{i=1}^n Y_i$$

$$Z'_R = \sum_{i=1}^n Z_i$$

$$R' = \sqrt{(X'_R)^2 + (Y'_R)^2 + (Z'_R)^2},$$

$$\cos \alpha_R = \frac{X'_R}{R'}, \quad \cos \beta_R = \frac{Y'_R}{R'}, \quad \cos \gamma_R = \frac{Z'_R}{R'}$$



Projeksionet e momentit kryesor janë:

$$M_{ox} = \sum_{i=1}^n M_{ox}(\vec{F}_i)$$

$$M_{oy} = \sum_{i=1}^n M_{oy}(\vec{F}_i)$$

$$M_{ox}(\vec{F}) = \sum_{i=1}^n M_x(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n (y_i Z_i - z_i Y_i)$$

$$M_{oy}(\vec{F}) = \sum_{i=1}^n M_y(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n (z_i X_i - x_i Z_i)$$

$$M_{oz}(\vec{F}) = \sum_{i=1}^n M_z(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n (x_i Y_i - y_i X_i)$$

Intenziteti dhe drejtimi i momentit kryesor është:

$$M_o = \sqrt{(M_{ox})^2 + (M_{oy})^2 + (M_{oz})^2},$$

$$\cos \alpha'_R = \frac{M_{ox}}{M_o}, \quad \cos \beta'_R = \frac{M_{oy}}{M_o}, \quad \cos \gamma'_R = \frac{M_{oz}}{M_o}$$

EKUILIBRI I SISTEMIT TË FORCAVE NË HAPSIRË

Që sistemi i forcave në hapësirë të jetë në ekuilibër, është e nevojshme dhe e mjaftueshme që vektori kryesor dhe momenti kryesor për pikën e shikuar njëkohësisht të jenë të barabartë me zero.

Forma vektoriale e kushteve të ekuilibrit të sistemit të forcave:

$$\vec{R}' = 0, \quad \vec{M}_o = 0,$$

Forma analitike e kushteve të ekuilibrit

$$X'_R = 0, \quad \sum_{i=1}^n X_i = 0$$

$$Y'_R = 0, \quad \sum_{i=1}^n Y_i = 0$$

$$Z'_R = 0, \quad \sum_{i=1}^n Z_i = 0$$

$$M_{ox} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_x(\vec{F}_i) = 0$$

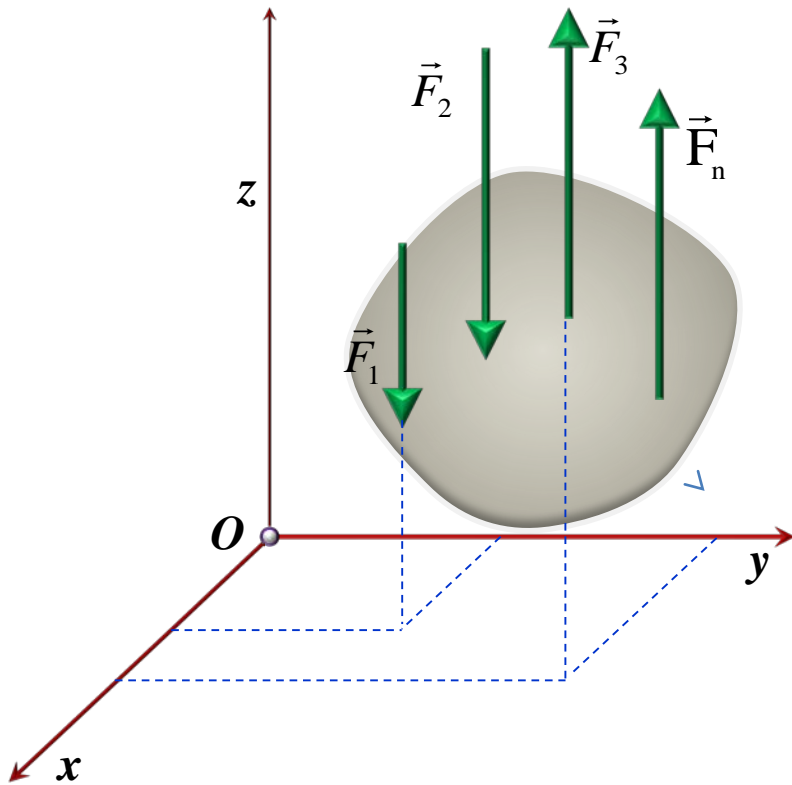
$$M_{oy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_y(\vec{F}_i) = 0$$

$$M_{oz} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_z(\vec{F}_i) = 0$$

**Kushtet e nevojshme që trupi mos të
leviz në drejtim të akseve
koordinative**

**Kushtet e nevojshme që trupi mos të
rrotullohet rreth akseve koordinative**

EKUILIBRI I FORCAVE PARALELE NË HAPËSIRË



$$\sum_{i=1}^n Z_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_x(\vec{F}_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_y(\vec{F}_i) = 0$$

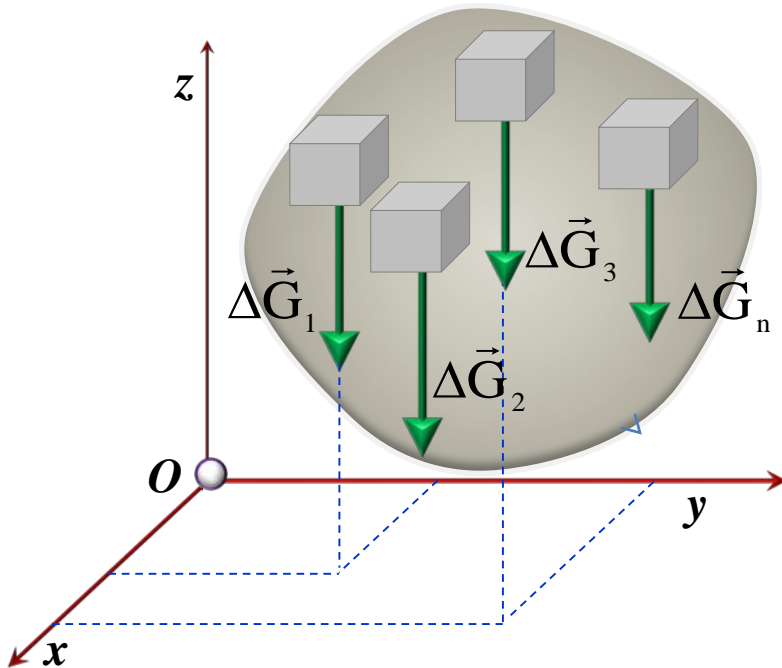


Që sistemi i forcave paralele në hapësirë të jetë në ekuilibër, është e nevojshme dhe e mjaftueshme që shuma e projeksioneve në aks paralel me forcat dhe shuma e momenteve për dy akset tjera(x,y) të barabartë me zero.

**QËNDRA E RENDESËS SË TRUPAVE TË
NGURTË, SIPERFAQEVE DHE VIJAVE**

QËNDRA E RENDESËS SË TRUPAVE TË NGURTË

Koordinatat e qendres së rëndesës së trupit, caktohen me aplikimin e teoremes së Varinjonit mbi momentin e rezultatës së forcave paralele ndaj aksit:



$$x_c = \frac{\sum \Delta G_i X_i}{G}$$

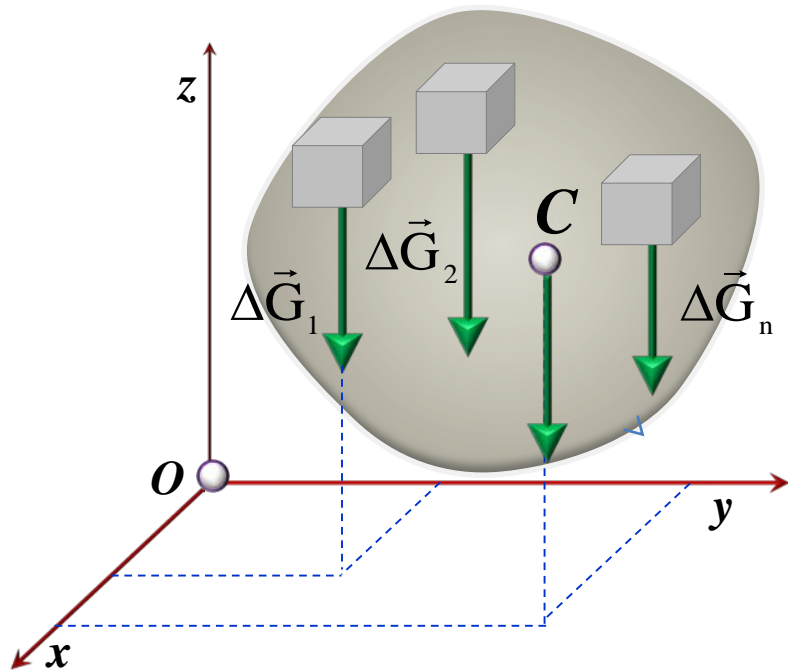
$$y_c = \frac{\sum \Delta G_i Y_i}{G}$$

$$z_c = \frac{\sum \Delta G_i Z_i}{G}$$

X_i, Y_i, Z_i - Koordinatat e pikëveprimit të pjesëve (peshave) të caktuara të trupit

X_c, Y_c, Z_c - Koordinatat e qendres së rëndesës

Qendra e rëndesës është pikë gjeometrike, ajo mund të gjëndët edhe jashtë konturës së trupit të dhënë(psh. Tek unaza)



Te trupat homogjen pesha e cilesdo pjesë është proporcionale me vëllimin e asajë pjese:

$$\Delta G_i = \gamma \Delta V_i \quad \gamma - \text{pesha specifike}$$

Pesha e trupit është proporcionale me vëllimin e tërë trupit

$$G = \gamma V$$

$$x_c = \frac{\sum \Delta G_i X_i}{G}$$

$$y_c = \frac{\sum \Delta G_i Y_i}{G}$$

$$z_c = \frac{\sum \Delta G_i Z_i}{G}$$



$$x_c = \frac{\sum \Delta V_i X_i}{V}$$

$$y_c = \frac{\sum \Delta V_i Y_i}{V}$$

$$z_c = \frac{\sum \Delta V_i Z_i}{V}$$



Pozita e qëndrës së rëndesës së trupit homogjen varët vetem nga forma gjeometrike e trupit të shikuar, derisa nuk varet nga pesha specifike.

Pika C është qëndra e rëndesës së vëllimit V

Nese trupi nuk mund të ndahë në numër të caktuar pjesësh të vogla qendra e të cilave dihet, trupi ndahët në numër të madh pjesësh të vogla dhe pastaj kalohet në gjendje kufitare kur të gjitha vëllimet tentojnë në zero.

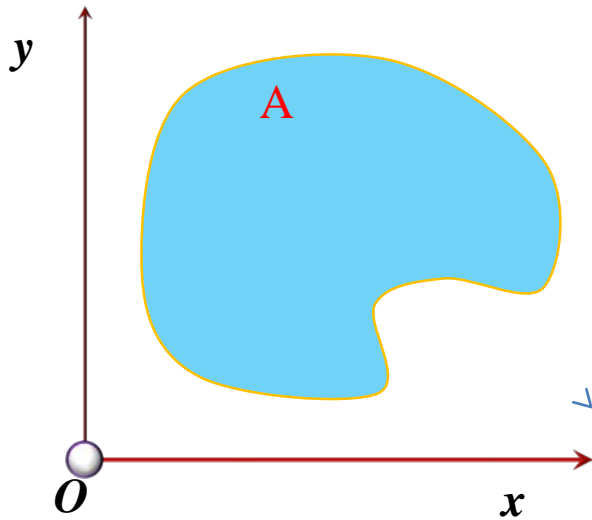
Në atë rast shumat në shprehje shëndërrohen në integrale në gjith vëllimin e trupit:

$$x_c = \frac{\sum \Delta V_i X_i}{V}$$
$$y_c = \frac{\sum \Delta V_i Y_i}{V}$$
$$z_c = \frac{\sum \Delta V_i Z_i}{V}$$

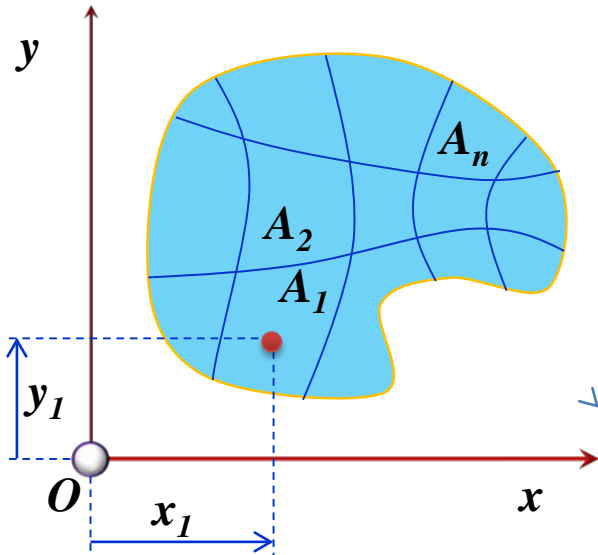
$$x_c = \frac{1}{V} \int_v x dV$$
$$y_c = \frac{1}{V} \int_v y dV$$
$$z_c = \frac{1}{V} \int_v z dV$$

Ku X, Y dhe Z janë koordinatat e elementit diferencial të vëllimit të trupit dV.

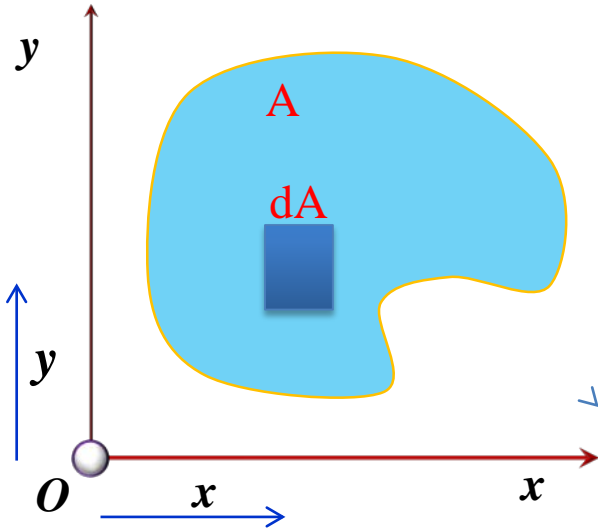
QËNDRA E RËNDESËS SË SIPERFAQËS



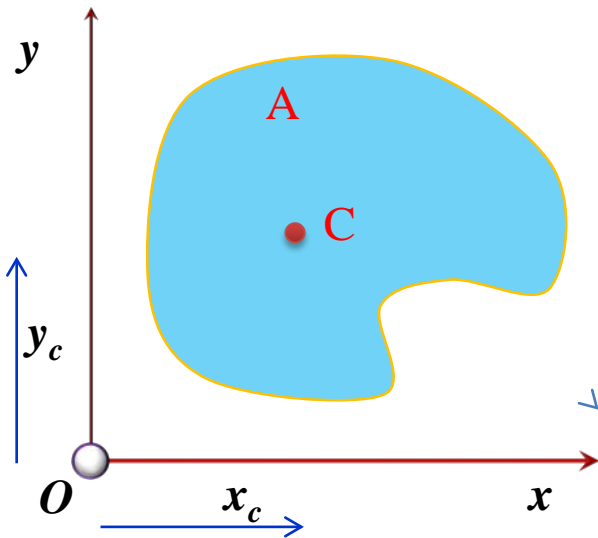
Nese trupi është pllakë homogjene me sipërfaqe A , Qendra e rëndesës së sipërfaqës me trashësi të vogël në rrafshin XY , dhe nese mund të ndahët në pjesë të sipërfaqeve A_1, A_2, \dots, A_n , qendra e rëndesës caktohet me shprehjet:



$$x_c = \frac{\sum \Delta A_i x_i}{A}$$
$$y_c = \frac{\sum \Delta A_i y_i}{A}$$



Nese trupi nuk mund të ndahët në numër të caktuar pjesësh të vogla qëndra e të cilave dihet, trupi ndahët në numër të madh pjesësh të vogla ΔA , dhe pastaj kalohet në gjendje kufitare kur siperfaqet tentojnë në zero.

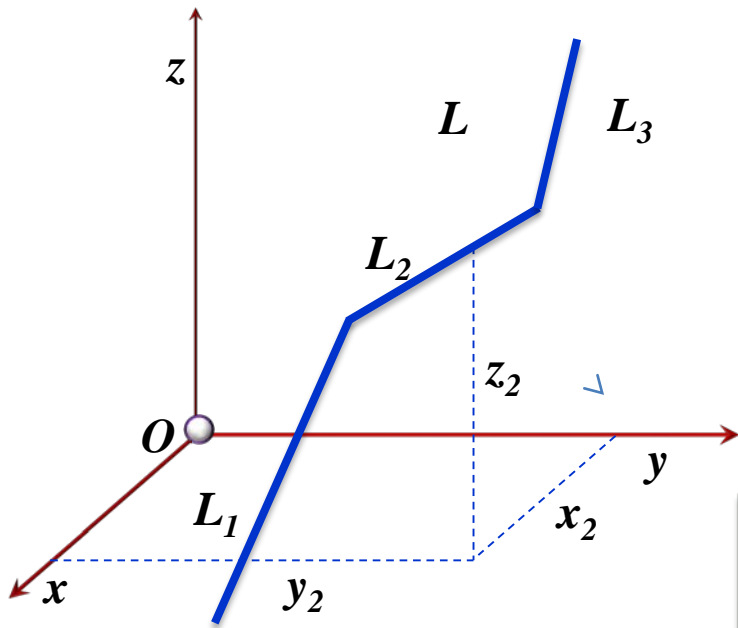


$$x_c = \frac{1}{A} \int_A x dA$$

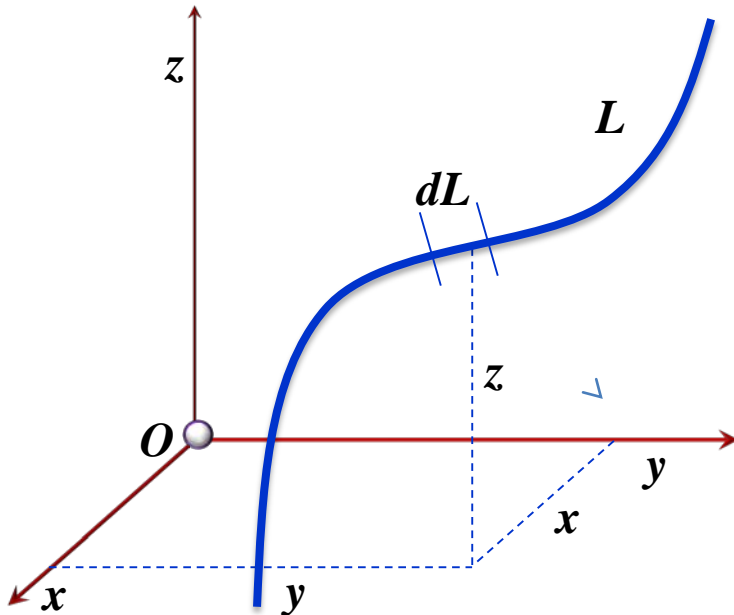
$$y_c = \frac{1}{A} \int_A y dA$$

QËNDRA E RËNDESËS SË VIJËS

Koordinatat e qendrës së rëndesës së vijës me gjatësi L nese ajo mundë të ndahët në pjesë gjatësit e të cilave janë ΔL_i



$$x_C = \frac{\sum \Delta L_i x_i}{L}$$
$$y_C = \frac{\sum \Delta L_i y_i}{L}$$
$$z_C = \frac{\sum \Delta L_i z_i}{L}$$



$$x_C = \frac{1}{L} \int_L x dL$$

$$y_C = \frac{1}{L} \int_L y dL$$

$$z_C = \frac{1}{L} \int_L z dL$$

Qendra e rëndesës së trupit të ngurt përcaktohet si qendra e rëndesës së vëllimit, sipërfaqës dhe vijave përkatëse.

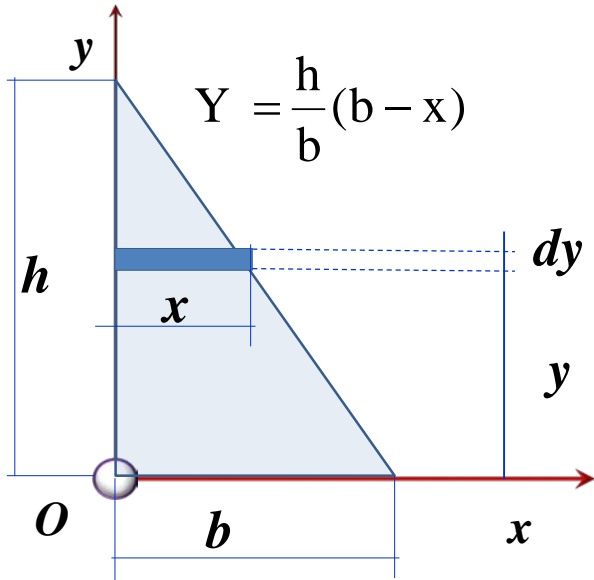
$$x_C = \frac{1}{V} \int_V x dV$$
$$y_C = \frac{1}{V} \int_V y dV$$
$$z_C = \frac{1}{V} \int_V z dV$$

$$x_C = \frac{1}{A} \int_A x dA$$
$$y_C = \frac{1}{A} \int_A y dA$$

$$x_C = \frac{1}{L} \int_L x dL$$
$$y_C = \frac{1}{L} \int_L y dL$$
$$z_C = \frac{1}{L} \int_L z dL$$

QËNDRA E RËNDESËS TË DISA FIGURAVE HOMOJENE

Shembull 1: Të caktohet qendra e rëndesës së trekëndëshit të dhënë në figurë.



$$dA = xdy = \frac{h}{b}(h - y)dy$$

$$b : h = x : (h - y)$$

Koordinatat e qendrës së rëndesës Y_c janë:

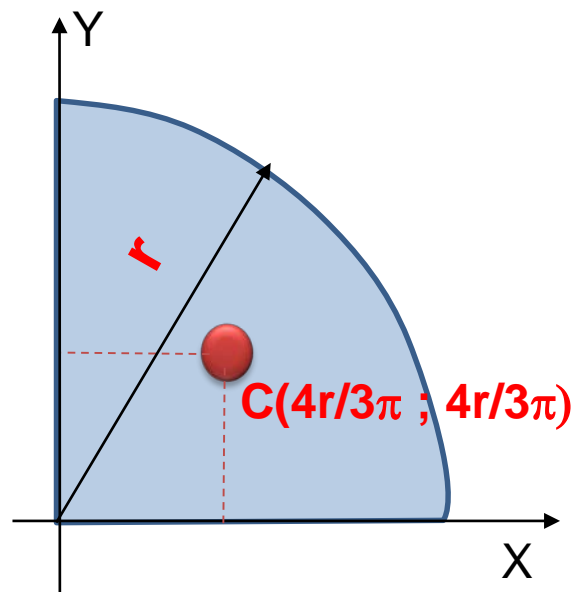
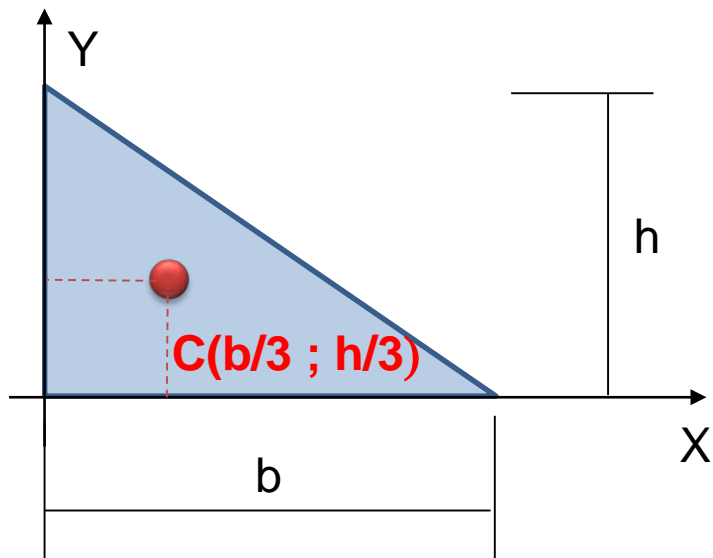
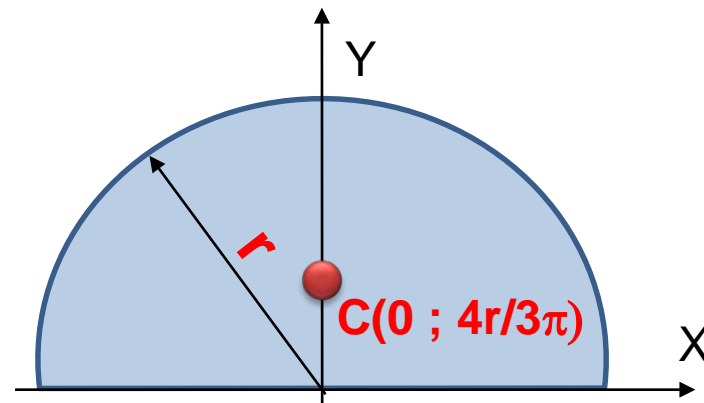
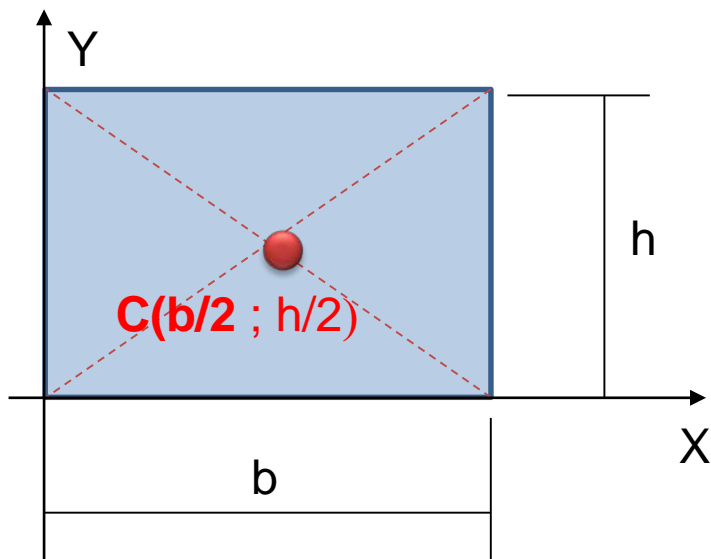
$$y_c = \frac{\frac{1}{A} \int y dA}{\int y dA} = \frac{\int_0^h y dA}{\int_0^h dA} = \frac{\int_0^h y x dy}{\int_0^h x dy} = \frac{\int_0^h y \frac{b}{h} (h - y) dy}{\int_0^h \frac{b}{h} (h - y) dy} = \frac{\frac{1}{6} b h^2}{\frac{1}{2} b h} = \frac{h}{3}$$

$$y_c = \frac{h}{3}$$

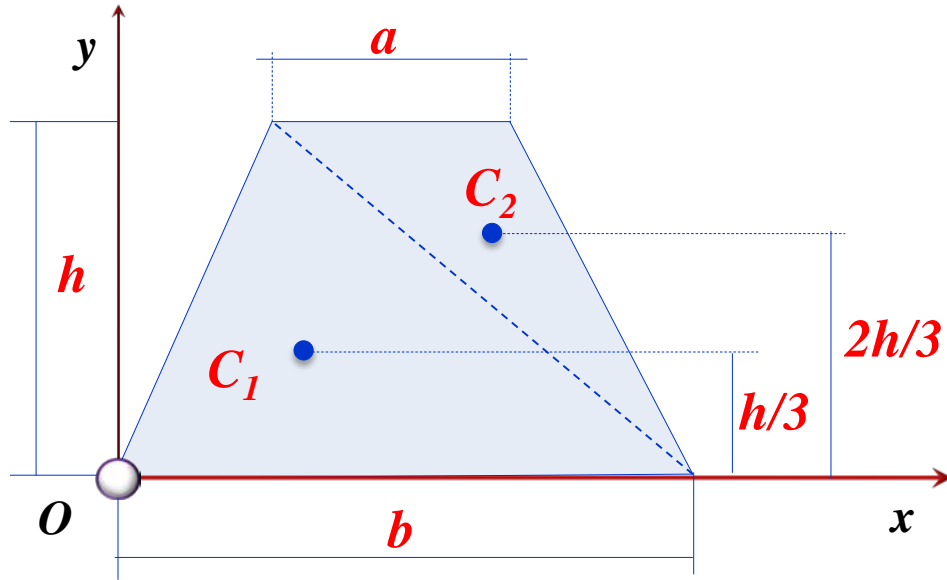
Në mënyrë analoge fitojmë:

$$x_c = \frac{b}{3}$$

QËNDRA E RËNDESËS TË DISA FIGURAVE TË RREGULLTA GJEOMETRIKE



Shembull 2: Të caktohet qendra e rëndesës Y_c të trapezit të dhënë në figurë.



Trapezi mundë të ndahët në dy trkëndësja ose në katerkëndësh dhe trekëndësh.

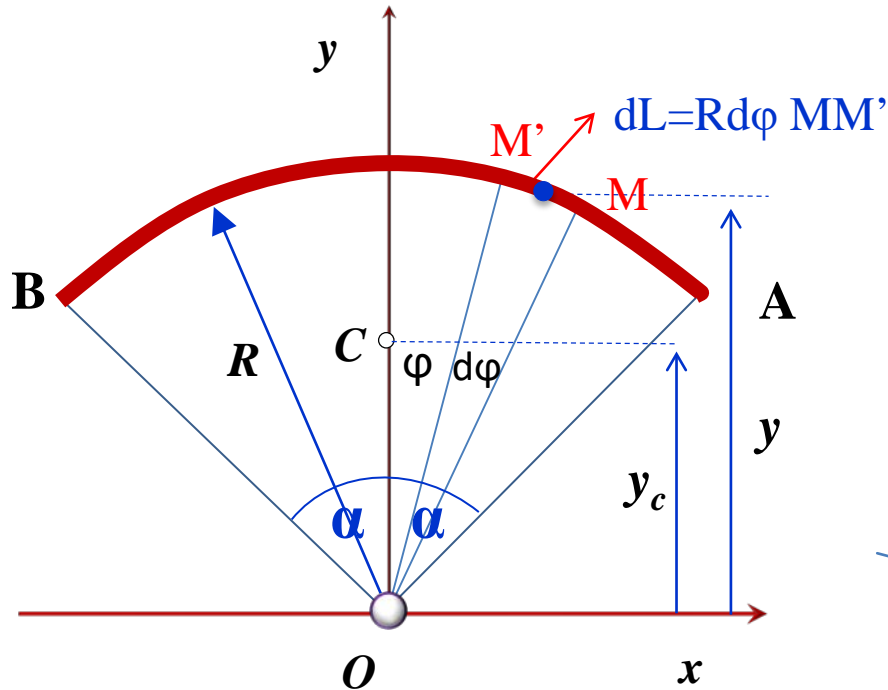
$$A_1 = \frac{1}{2}bh; \quad y_1 = \frac{1}{3}h$$

$$A_2 = \frac{1}{2}ah \quad y_2 = \frac{2}{3}h$$

$$y_c = \frac{\sum A_i Y_i}{A} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = \frac{\frac{1}{2}bh \frac{1}{3}h + \frac{1}{2}ah \frac{2}{3}h}{\frac{1}{2}bh + \frac{1}{2}ah} = \frac{h}{3} \frac{b + 2a}{b + a}$$

$$y_c = \frac{h}{3} \frac{b + 2a}{b + a}$$

Shembull 3: Të caktohet qendra e rëndesës pjesës së harkut të dhënë në figurë.



$$y = R \cos \varphi$$

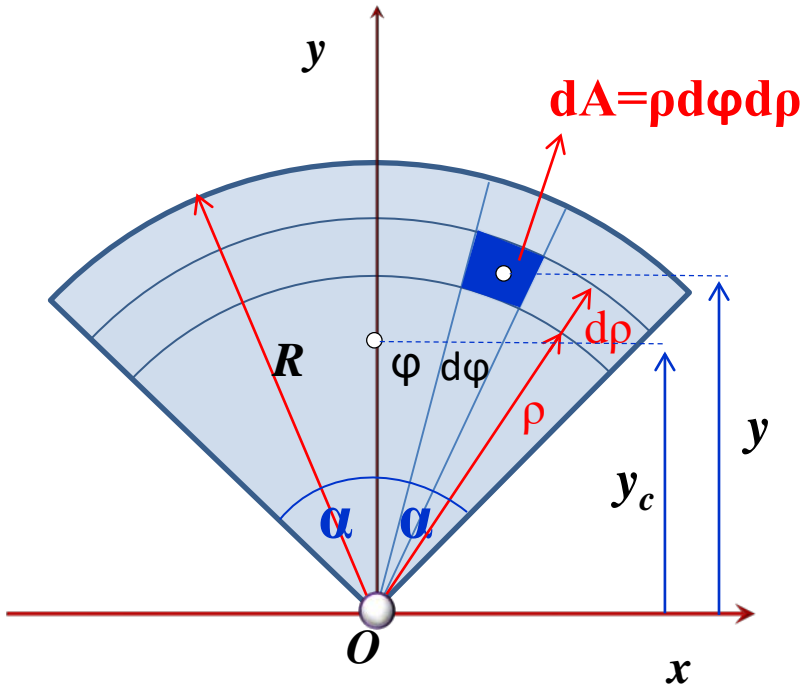
Gjatësia e harkut:

$$L = 2R\alpha$$

$$y_c = \frac{\int_A^B y dL}{L} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} R \cos \varphi R d\varphi}{L} = 2 \frac{R^2}{L} \sin \alpha = 2 \frac{R^2}{2R\alpha} \sin \alpha = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

$$y_c = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

Shembull 4: Të caktohet qendra e rëndesës sektorit të rrethit të dhënë në figurë.



Siperfaqja e pjesës elementare është:

$$dA = \rho d\phi d\rho$$

kooedinata Y siprfaqës elementare:

$$y = \rho \cos \phi$$

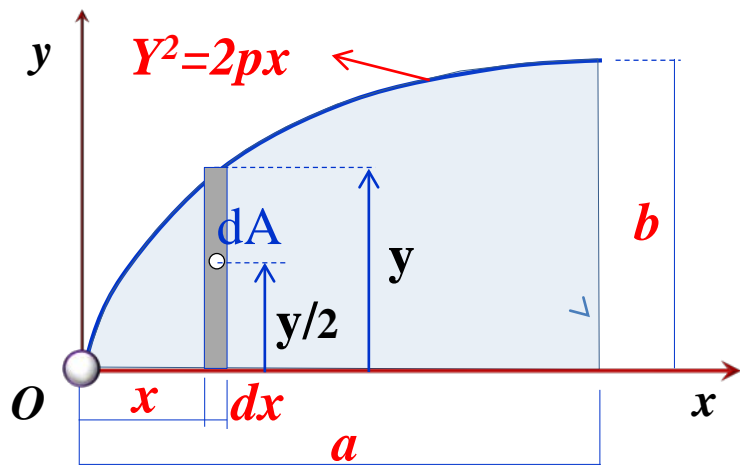
Siperfaqja A e sektorit rrethor caktohet nga proporcioni:

$$R^2\pi : 2\pi = A : 2\alpha$$

$$y_c = \frac{\frac{1}{A} \int y dA}{A} = \frac{\int_0^R \int_{-\alpha}^{\alpha} \rho \cos \phi \rho d\phi d\rho}{R^2\alpha} = \frac{\int_0^R \rho^2 d\rho \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \phi d\phi}{R^2\alpha} = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

$$y_c = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

Shembull 5: Të caktohet qendra e rëndesës për parabolën kuadratike të dhënë në figurë.



Sipërfaqja e pjesës elementare është:
 $dA = ydx$
 koordinatat e qendrës së sipërfaqës
 elementare janë: x dhe $y/2$

$$b^2 = 2pa \Rightarrow 2p = b^2 / a$$

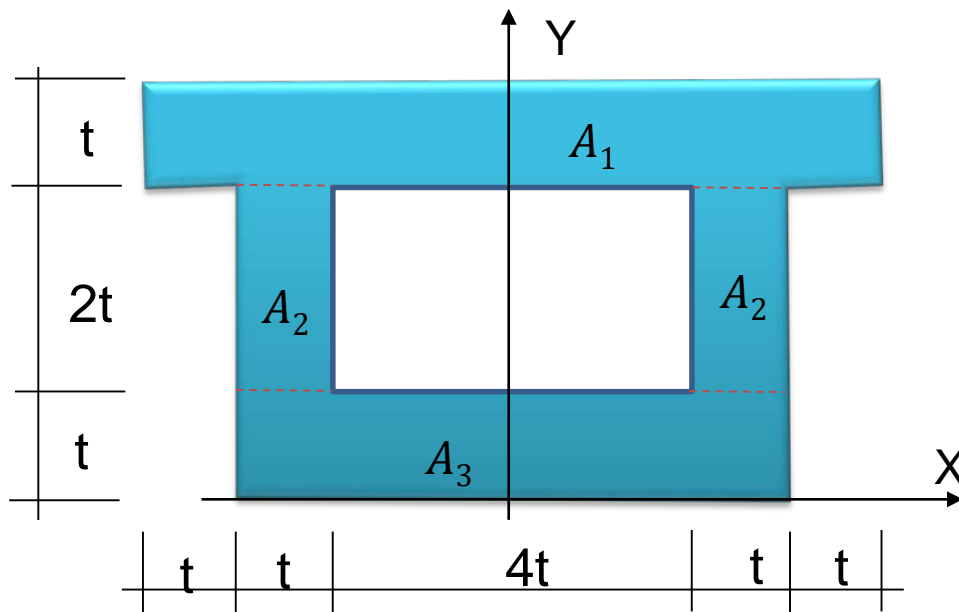
$$x_c = \frac{\int_A x dA}{A} = \frac{\int_0^a xy dx}{\int_0^a y dx} = \frac{\int_0^a x \sqrt{2px} dx}{\int_0^a \sqrt{2px} dx} = \frac{\sqrt{2p} \int_0^a x x^{\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{2p} \int_0^a x^{\frac{1}{2}} dx} = \frac{\frac{2}{5} \sqrt{2p} a^{\frac{5}{2}}}{\frac{2}{3} \sqrt{2p} a^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{5} a$$

$$y_c = \frac{\int_A \frac{1}{2} y dA}{A} = \frac{\int_0^a \frac{1}{2} yy dx}{\int_0^a y dx} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^a 2px dx}{\int_0^a \sqrt{2px} dx} = \frac{p \int_0^a x dx}{\sqrt{2p} \int_0^a x^{\frac{1}{2}} dx} = \frac{\frac{b^2}{2a} x^2 \Big|_0^a}{\frac{2}{3} ab} = \frac{3}{8} b$$

$$x_c = \frac{3}{5} a$$

$$y_c = \frac{3}{8} b$$

Shembull 6: Të caktohet qendra e rëndesës për pllakën e dhënë në figurë.



$t=10\text{cm}$

$$A_1 = 10 * 80 = 800\text{cm}^2 \quad (0 ; 35)$$

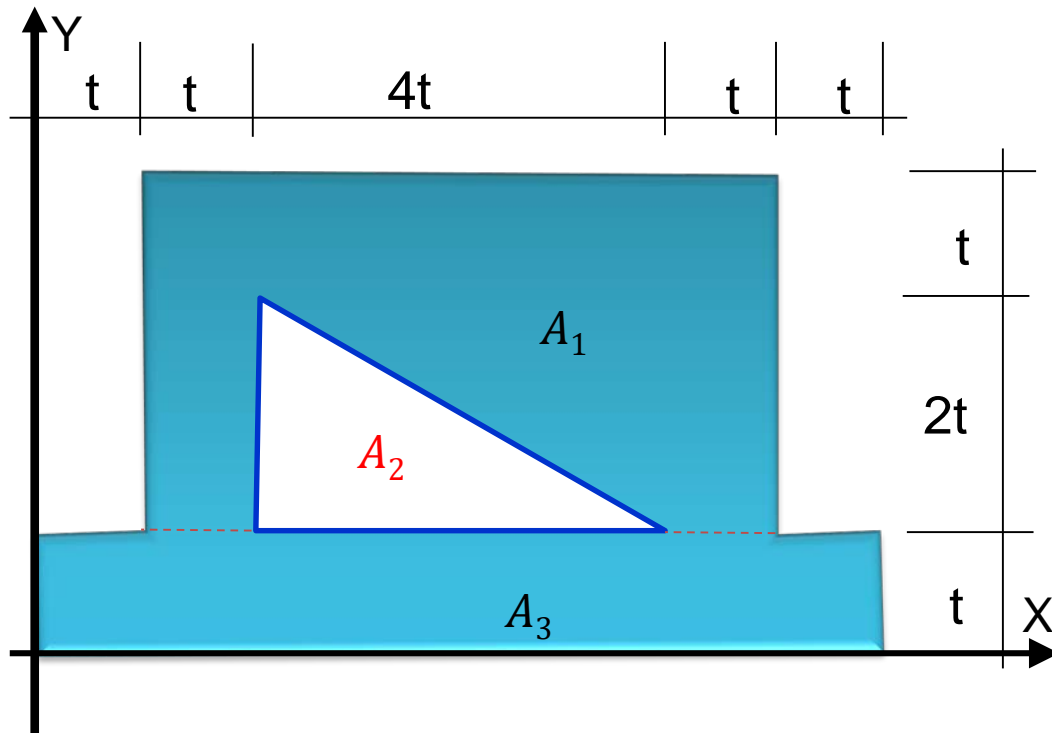
$$A_2 = 10 * 20 = 200\text{cm}^2 \quad (0 ; 20)$$

$$A_3 = 10 * 60 = 600\text{cm}^2 \quad (0 ; 5)$$

$$Y_C = \frac{A_1 * y_1 + 2A_2 * y_2 + A_3 * y_3}{A_1 + 2A_2 + A_3} = \frac{800 * 35 + 2 * 200 * 20 + 600 * 5}{800 + 2 * 200 + 600} = 21.666\text{cm}$$

Shembull 7: Të caktohet qendra e rëndesës për pllakën e dhënë në figurë.

$$t=3\text{cm}$$



$$A_1 = 18 * 9 = 162\text{cm}^2 \quad (12 ; 7.5)$$

$$A_2 = 1/2 * 12 * 6 = 36\text{cm}^2 \quad (10 ; 5)$$

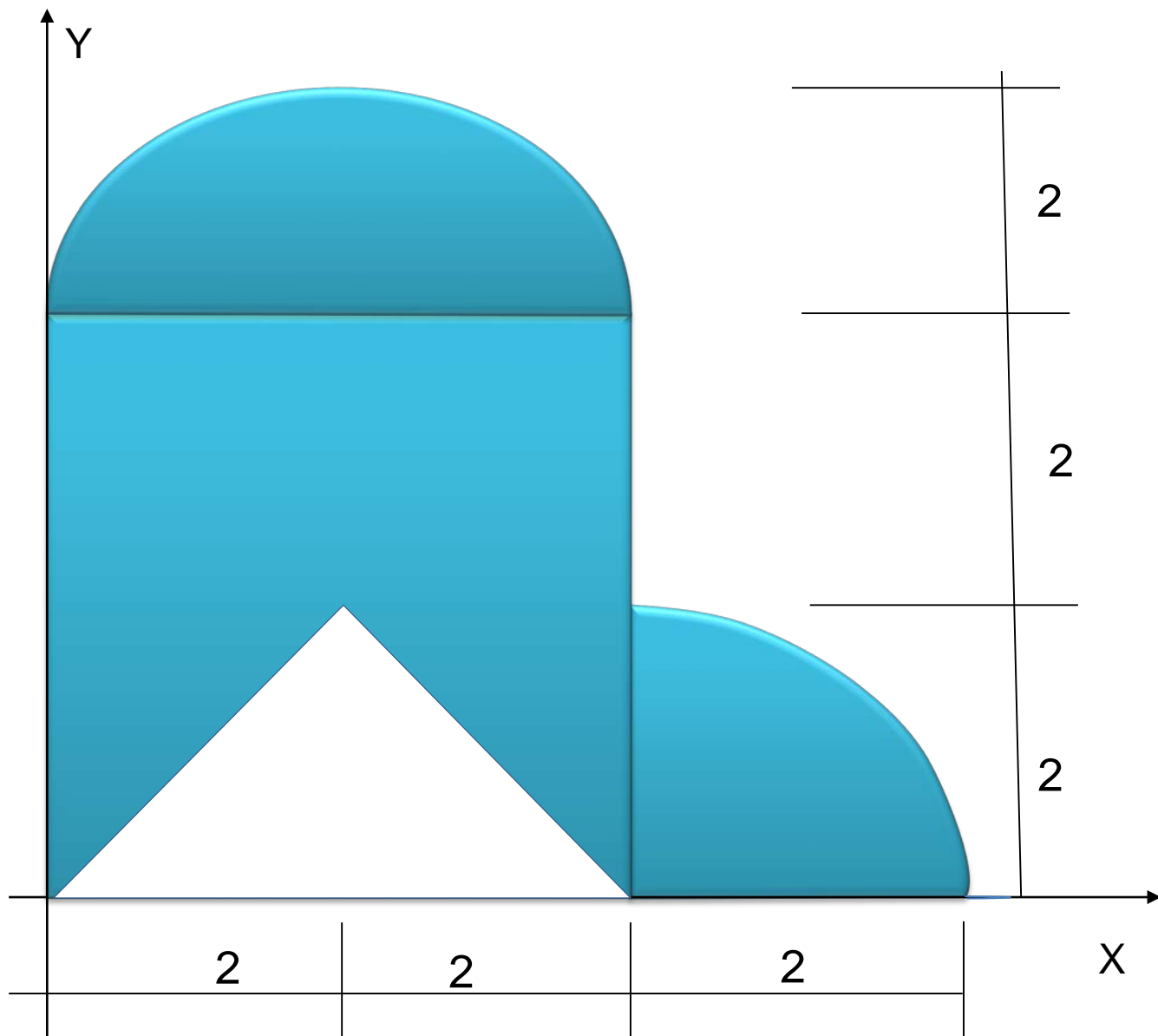
$$A_3 = 24 * 3 = 72\text{cm}^2 \quad (12 ; 1.5)$$

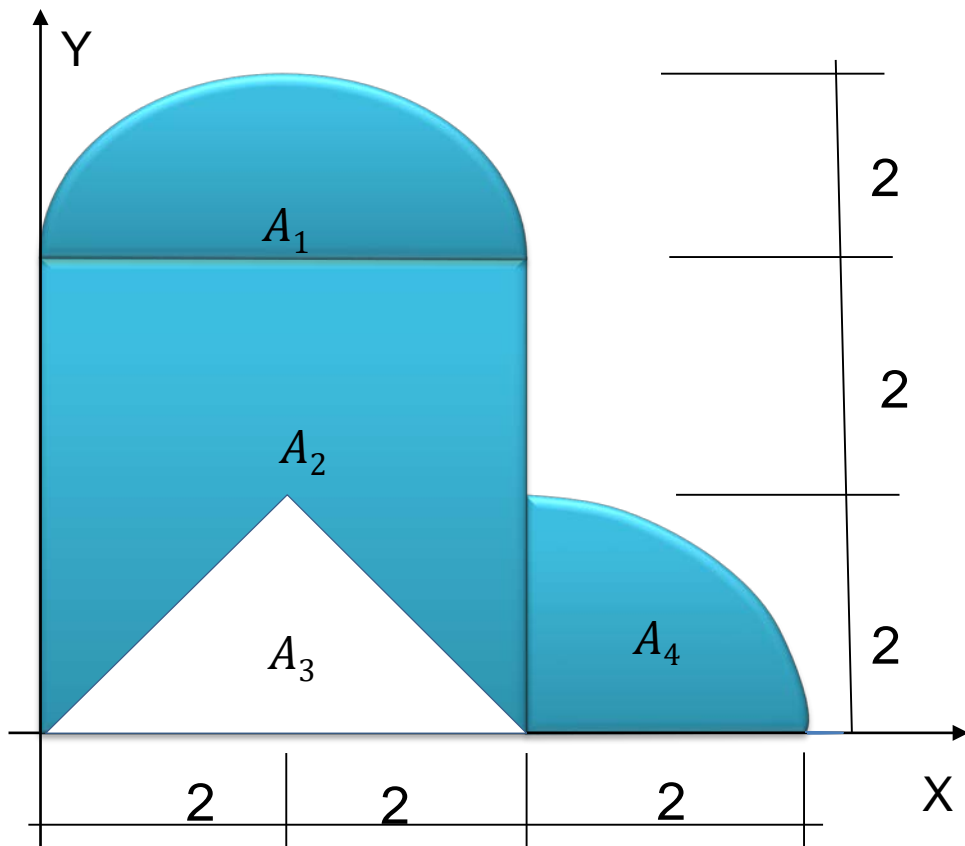
$$A = 198\text{cm}^2$$

$$X_C = \frac{A_1 * x_1 - A_2 * x_2 + A_3 * x_3}{A_1 - A_2 + A_3} = \frac{162 * 12 - 36 * 10 + 72 * 12}{162 - 36 + 72} = \frac{1944 - 360 + 864}{198} = 12.36\text{cm}$$

$$Y_C = \frac{A_1 * y_1 - A_2 * y_2 + A_3 * y_3}{A_1 - A_2 + A_3} = \frac{162 * 7.5 - 36 * 5 + 72 * 1.5}{162 - 36 + 72} = \frac{1215 - 180 + 108}{198} = 5.77\text{cm}$$

Shembull 8: Të caktohet qendra e rëndesës për pllakën e dhënë në figurë.





$$A_1 = 1/2 * \pi * 2^2 = 6.28 \quad (2 ; 4.855)$$

$$A_2 = 4 * 4 = 16m^2 \quad (2 ; 2)$$

$$A_3 = 1/2 * 4 * 2 = 4m^2 \quad (2 ; 2/3)$$

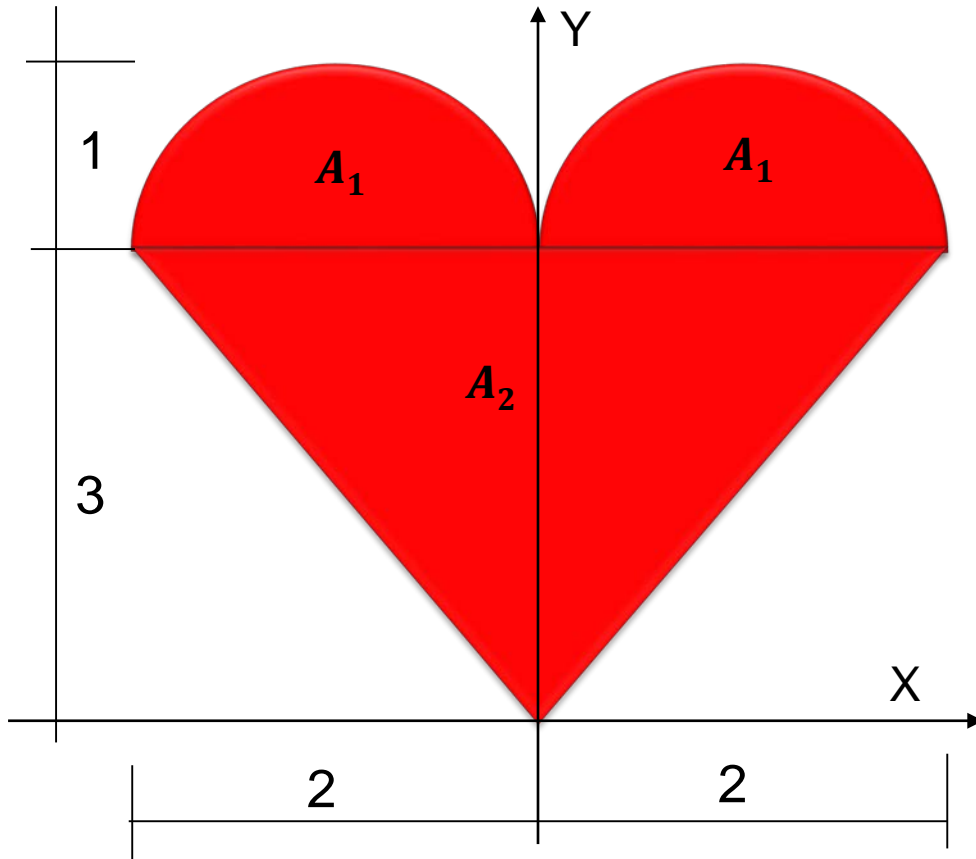
$$A_4 = 1/4 * \pi * 2^2 = 3.14m^2 \quad (4.855 ; 0.855)$$

$$A = 21.42m^2$$

$$X_c = \frac{A_1 * x_1 + A_2 * x_2 - A_3 * x_3 + A_4 * x_4}{A_1 + A_2 - A_3 + A_4} = \frac{6.28 * 2 + 16 * 2 - 4 * 2 + 3.14 * 4.855}{6.28 + 16 - 4 + 3.14} = \frac{12.56 + 32 - 8 + 15.227}{21.42} = 2.42m$$

$$Y_c = \frac{A_1 * y_1 + A_2 * y_2 - A_3 * y_3 + A_4 * y_4}{A_1 + A_2 - A_3 + A_4} = \frac{6.28 * 4.86 + 16 * 2 - 4 * \frac{2}{3} + 3.14 * 0.85}{6.28 + 16 - 4 + 3.14} = \frac{30.45 + 32 - 6 + 2.67}{21.42} = 2.76m$$

Shembull 9: Të caktohet qendra e rëndesës për pllakën e dhënë në figurë.



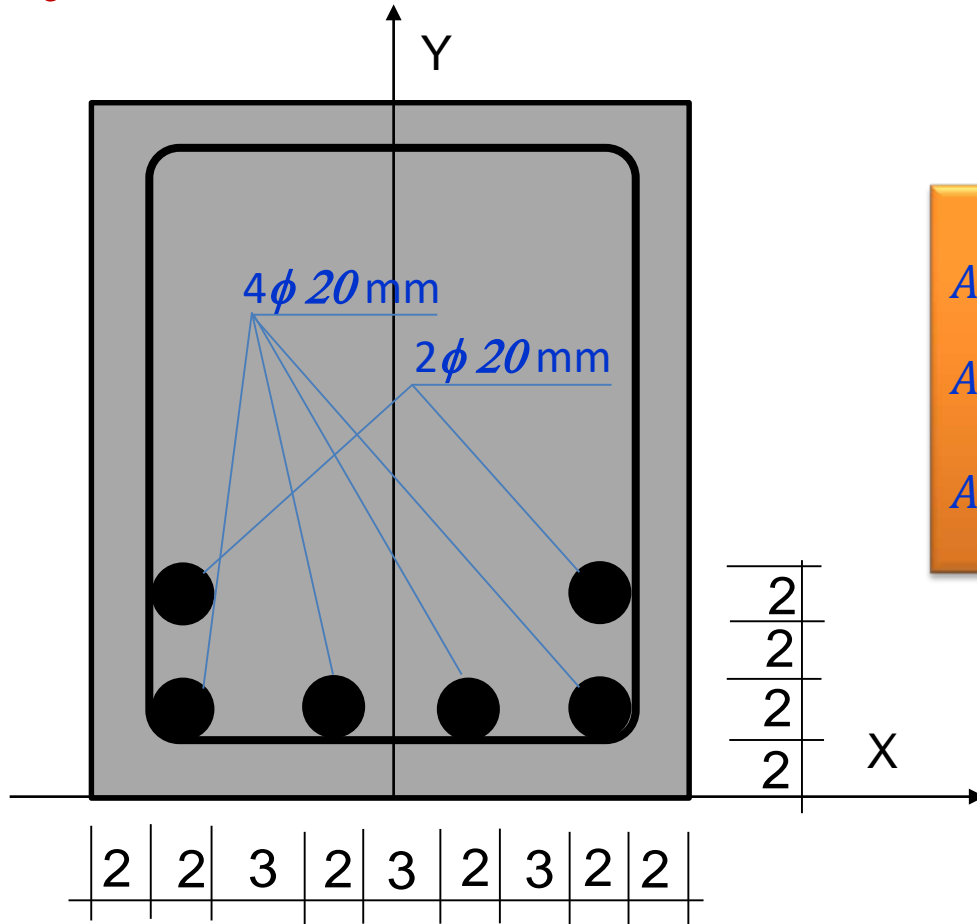
$$A_1 = 1/2 * \pi * 1^2 = 1.57 \quad (0 ; 3.425)$$

$$A_2 = 1/2 * 4 * 3 = 6 \text{m}^2 \quad (0 ; 2)$$

$$A = 9.14 \text{m}^2$$

$$Y_c = \frac{2A_1 * y_1 + A_2 * y_2}{2A_1 + A_2} = \frac{2 * 1.57 * 3.425 + 6 * 2}{2 * 1.57 + 6} = \frac{10.75 + 12}{9.14} = 2.49 \text{m}$$

Shembull 10: Të caktohet qendra e rëndesës për shufrat e armatures në prerjen tërthore të betonit.



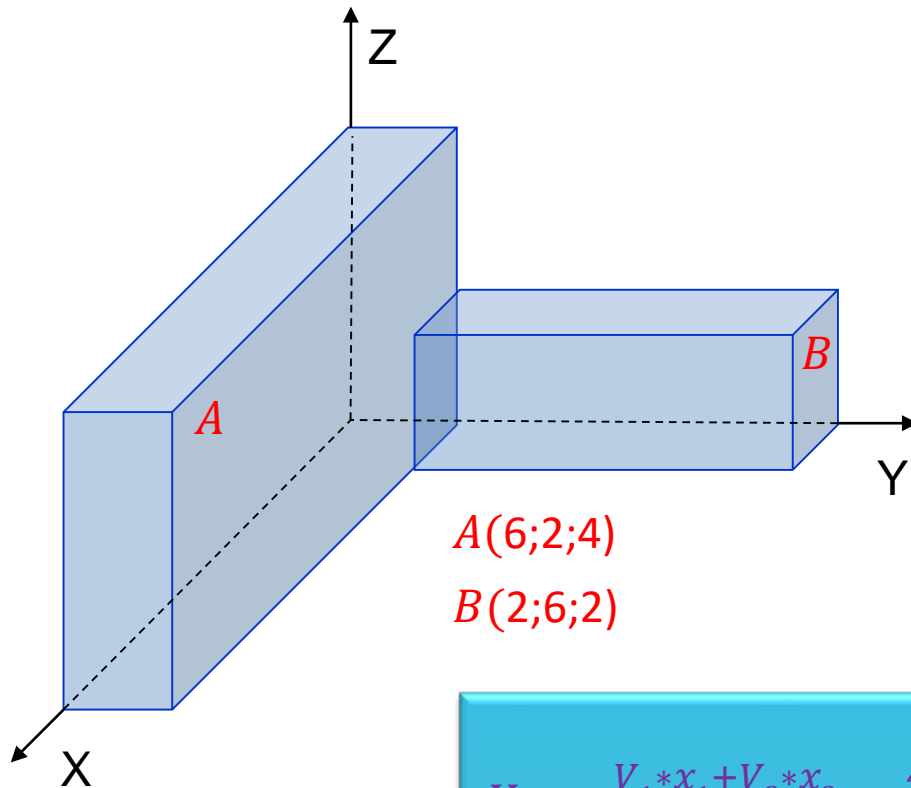
$$A_1 = 4 * \pi * 2^2 / 4 = 12.56 \text{ cm}^2 \quad (0 ; 3)$$

$$A_2 = 2 * \pi * 2^2 / 4 = 6.28 \text{ cm}^2 \quad (0 ; 7)$$

$$A = 18.84 \text{ cm}^2$$

$$Y_c = \frac{A_1 * y_1 + A_2 * y_2}{A_1 + A_2} = \frac{12.56 * 3 + 6.28 * 7}{12.56 + 6.28} = \frac{37.68 + 48.96}{18.84} = 4.33 \text{ cm}$$

Shembull 11: Të caktohet qendra e rëndesës për trupat e dhënë në figurë.



$$V_1 = 6 \cdot 2 \cdot 4 = 48 \text{ m}^3 \quad (3 ; 1 ; 2)$$

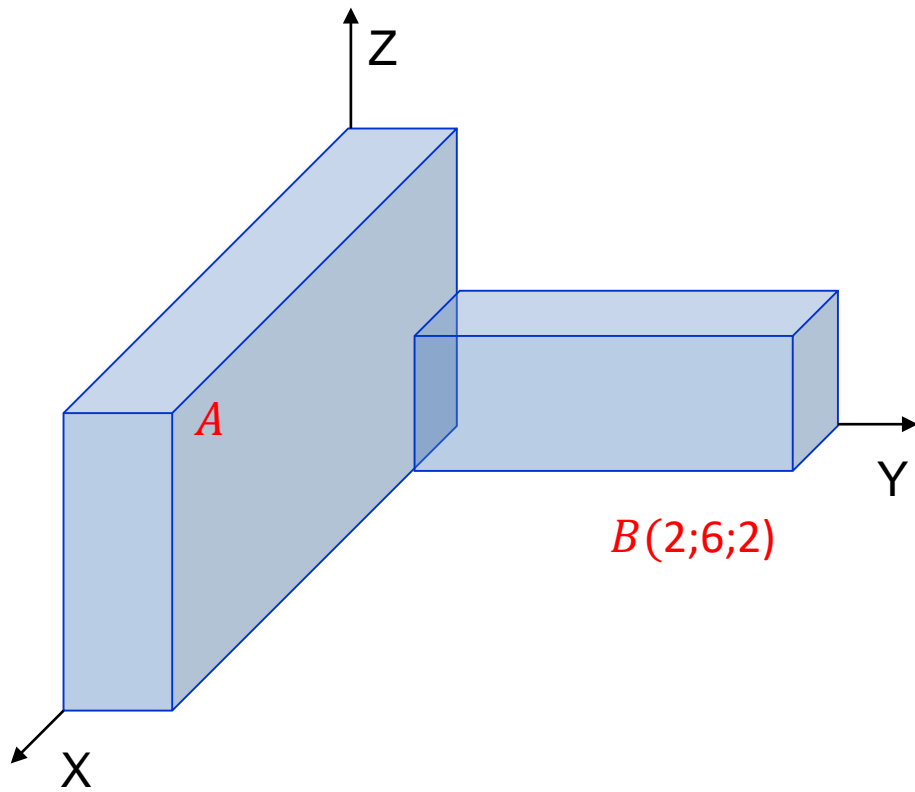
$$V_2 = 2 \cdot 4 \cdot 2 = 16 \text{ m}^3 \quad (1 ; 4 ; 1)$$

$$V = 64 \text{ m}^3$$

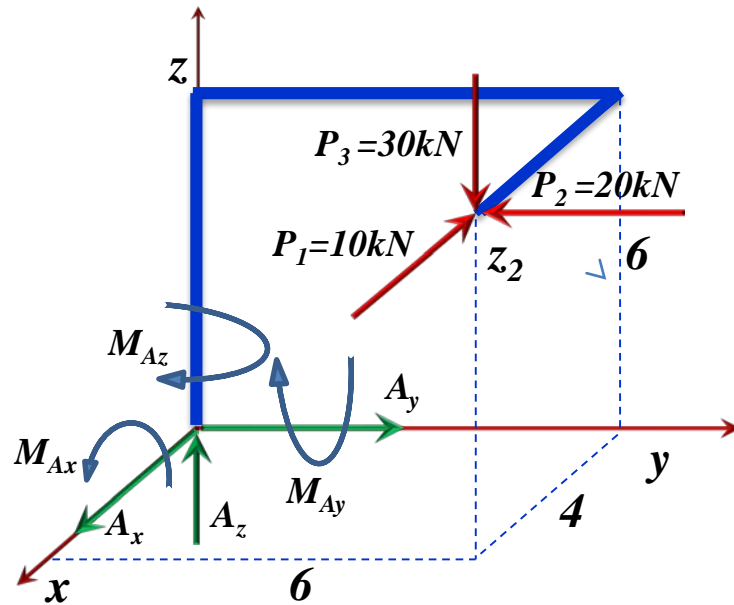
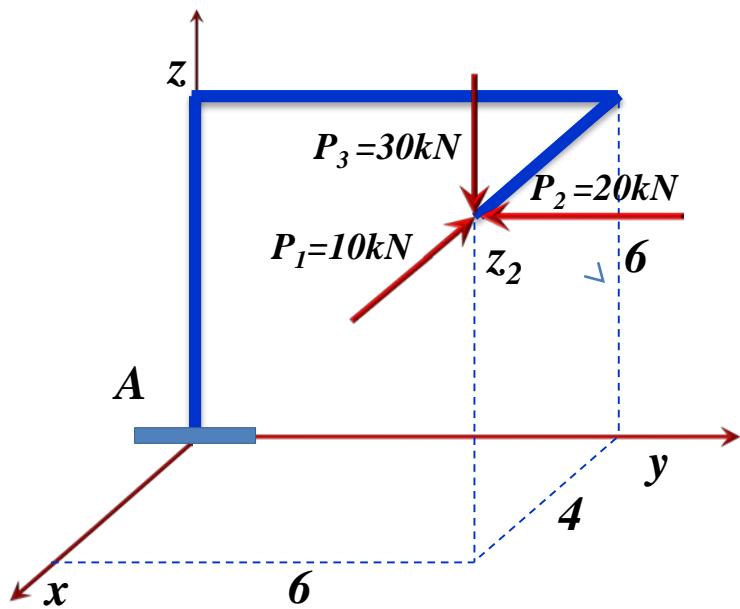
$$X_c = \frac{V_1 \cdot x_1 + V_2 \cdot x_2}{V_1 + V_2} = \frac{48 \cdot 3 + 16 \cdot 1}{48 + 16} = \frac{144 + 16}{64} = \frac{144 + 16}{64} = 2.25 \text{ m}$$

$$Y_c = \frac{V_1 \cdot y_1 + V_2 \cdot y_2}{V_1 + V_2} = \frac{48 \cdot 1 + 16 \cdot 4}{48 + 16} = \frac{48 + 64}{64} = 1.75 \text{ m}$$

$$Z_c = \frac{V_1 \cdot z_1 + V_2 \cdot z_2}{V_1 + V_2} = \frac{48 \cdot 2 + 16 \cdot 1}{48 + 16} = \frac{96 + 16}{64} = 1.75 \text{ m}$$



MBAJTËSIT HAPËSINOR



$$1) \sum X = 0 \Rightarrow A_x - P_1 = 0 \Rightarrow A_x = 10\text{kN}$$

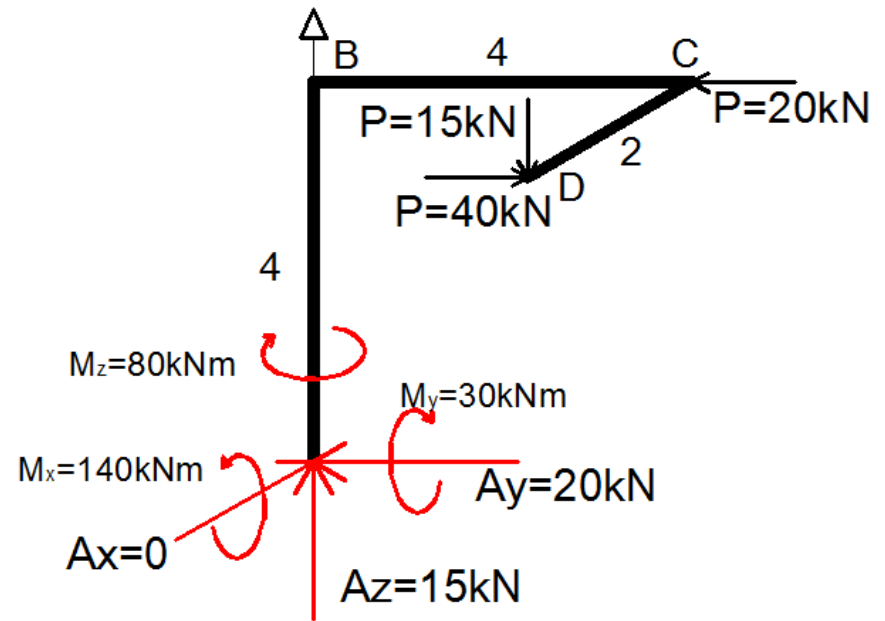
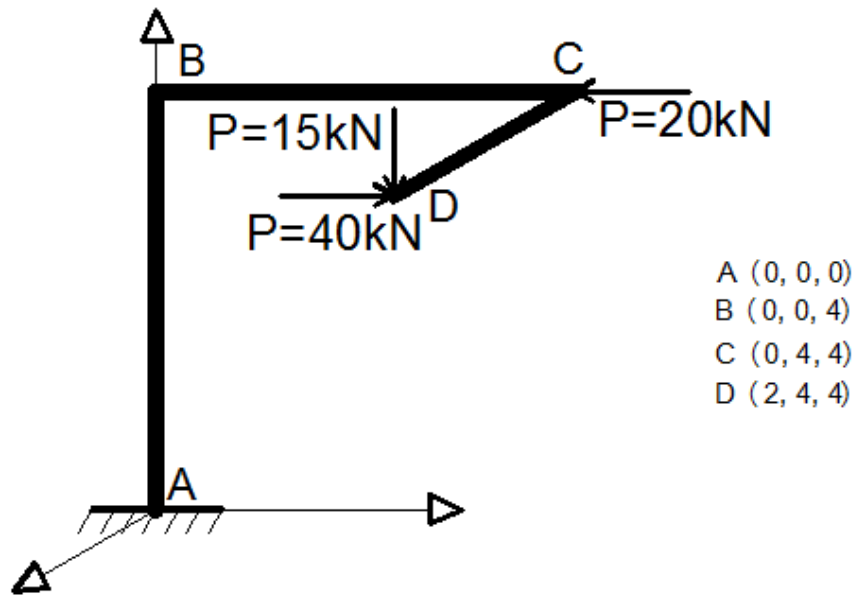
$$2) \sum Y = 0 \Rightarrow A_y - P_2 = 0 \Rightarrow A_y = 20\text{kN}$$

$$2) \sum Z = 0 \Rightarrow A_z - P_3 = 0 \Rightarrow A_z = 30\text{kN},$$

$$4) \sum M_x = 0 \Rightarrow M_{Ax} + P_2 \cdot 6 - P_3 \cdot 6 = 0 \Rightarrow M_{Ax} = 60\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$5) \sum M_y = 0 \Rightarrow M_{Ay} + P_1 \cdot 6 - P_3 \cdot 4 = 0 \Rightarrow M_{Ay} = 60\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$6) \sum M_z = 0 \Rightarrow M_{Az} - P_1 \cdot 6 + P_2 \cdot 4 = 0 \Rightarrow M_{Az} = -20\text{kN} \cdot \text{m}$$



$$1) \sum X = 0 \Rightarrow Ax = 0$$

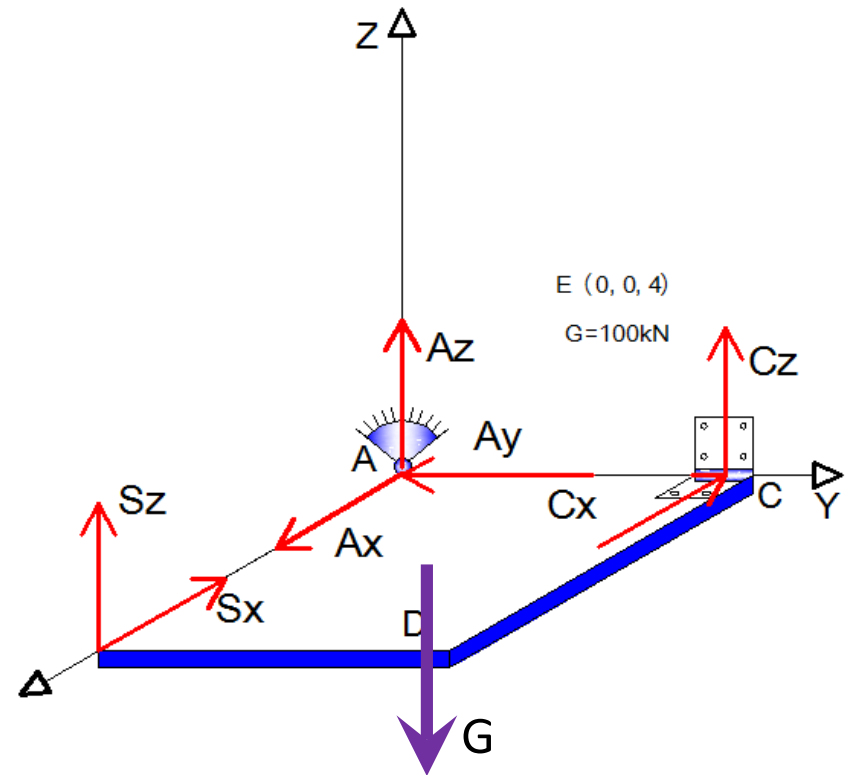
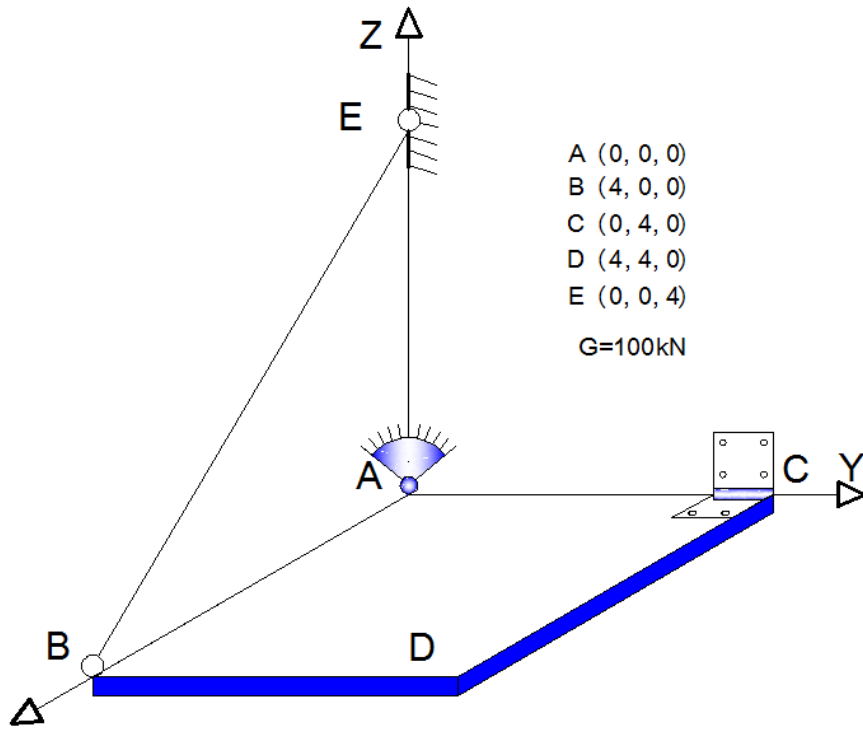
$$2) \sum Y = 0 \Rightarrow -Ay + 40 - 20 = 0 \Rightarrow Ay = 20kN$$

$$2) \sum Z = 0 \Rightarrow Az - 15 = 0 \Rightarrow Az = 15kN$$

$$4) \sum Mx = 0 \Rightarrow Mx - 40 \cdot 4 + 20 \cdot 4 - 15 \cdot 4 = 0 \Rightarrow Mx = 140kN \cdot m$$

$$5) \sum My = 0 \Rightarrow My - 15 \cdot 2 = 0 \Rightarrow My = 30kN \cdot m$$

$$6) \sum Mz = 0 \Rightarrow -Mz + 40 \cdot 2 = 0 \Rightarrow Mz = 80kN \cdot m$$



$$1) \sum X = 0 \Rightarrow Ax - Sx - Cx = 0 \Rightarrow Ax = 50kN$$

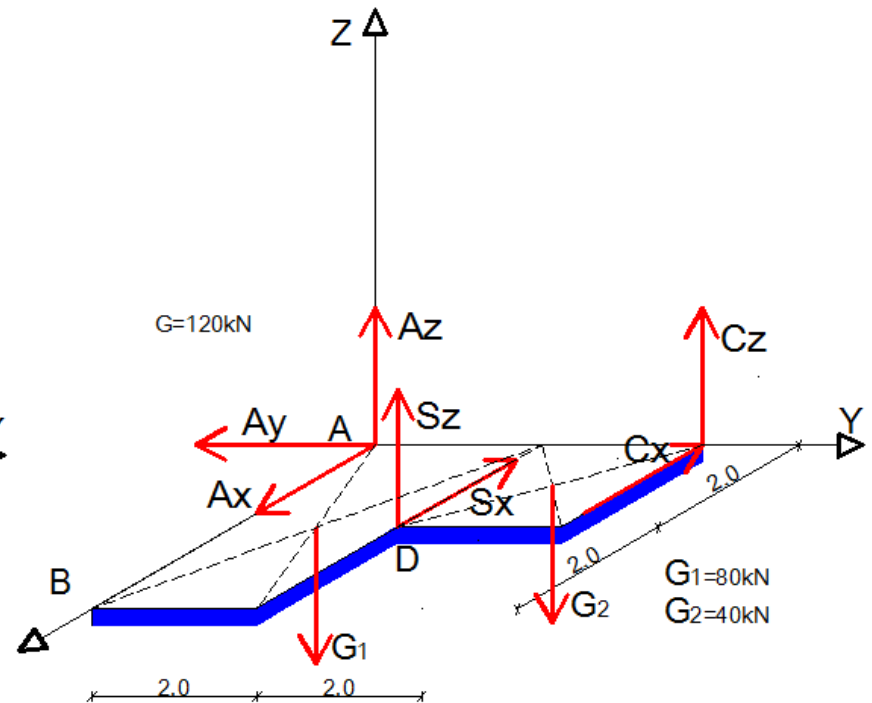
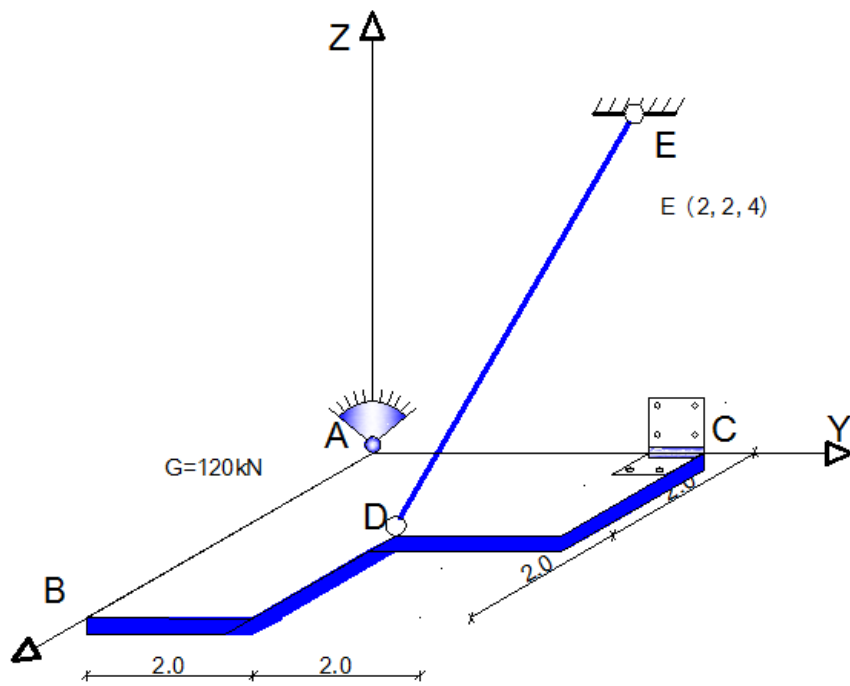
$$2) \sum Y = 0 \Rightarrow Ay = 0$$

$$2) \sum Z = 0 \Rightarrow Az + Sz + Cz - G = 0 \Rightarrow Az = 0$$

$$4) \sum Mx = 0 \Rightarrow Cz \cdot 4 - G \cdot 2 = 0 \Rightarrow Cz = 50kN$$

$$5) \sum My = 0 \Rightarrow Sz \cdot 4 - G \cdot 2 = 0 \Rightarrow Sz = 50kN$$

$$6) \sum Mz = 0 \Rightarrow Cx \cdot 4 = 0 \Rightarrow Cx = 0$$



$$1) \sum X = 0 \Rightarrow Ax - Sx - Cx = 0 \Rightarrow Ax = 25\text{kN}$$

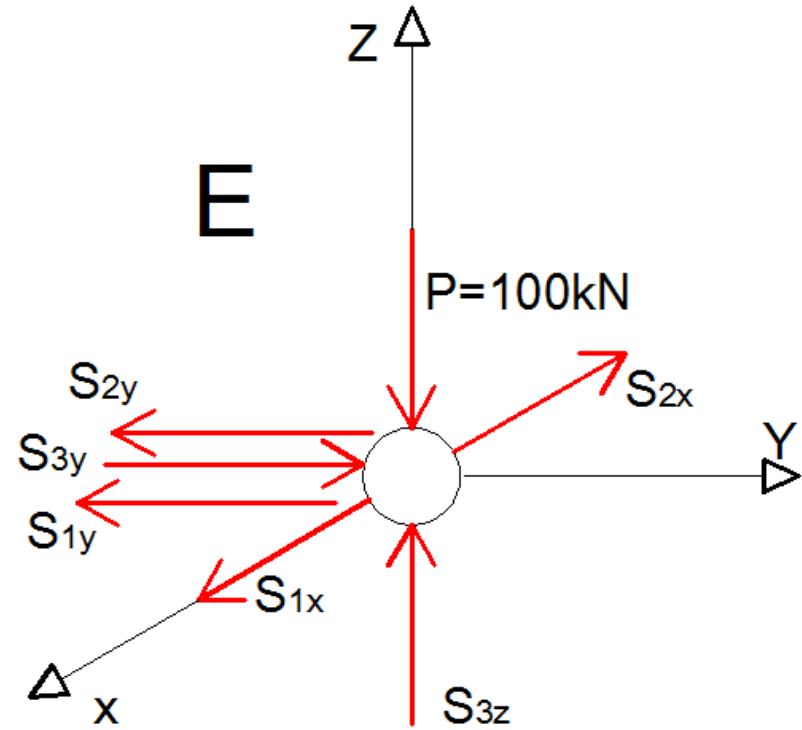
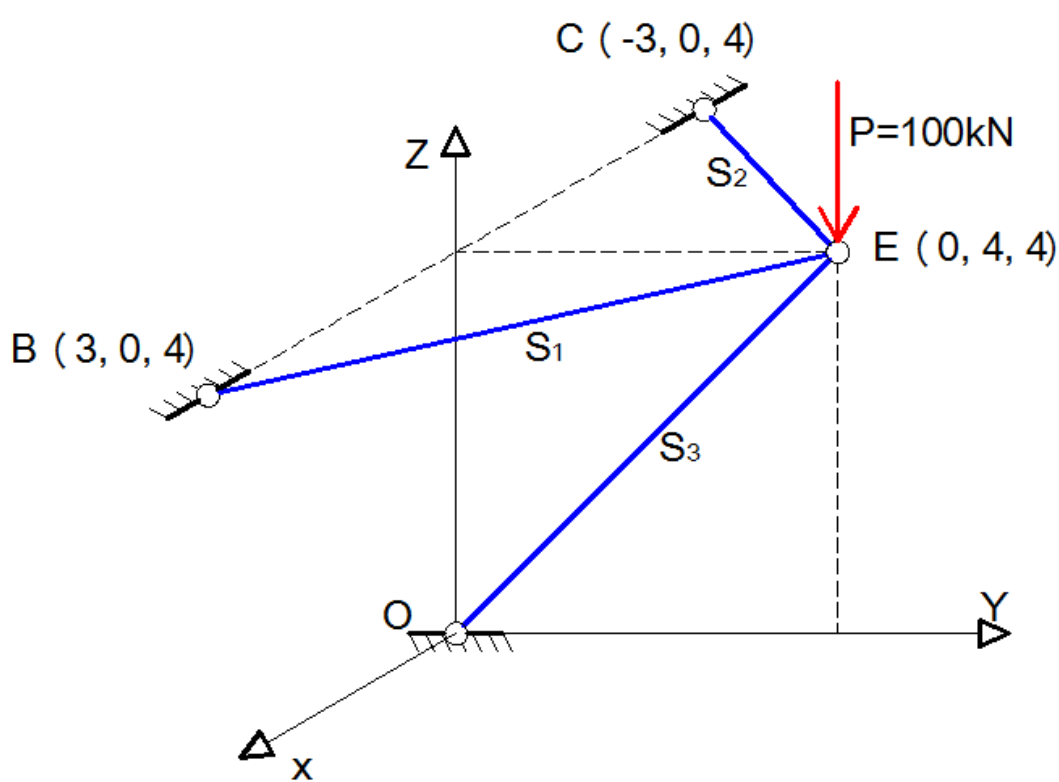
$$2) \sum Y = 0 \Rightarrow Ay = 0$$

$$2) \sum Z = 0 \Rightarrow Az + Sz + Cz - G_1 - G_2 = 0 \Rightarrow Az = -20\text{kN}$$

$$4) \sum M_x = 0 \Rightarrow Cz \cdot 4 - G_1 \cdot 1 - G_2 \cdot 3 + Sz \cdot 2 = 0 \Rightarrow Cz = 0\text{kN}$$

$$5) \sum M_y = 0 \Rightarrow Sz \cdot 2 - G_1 \cdot 2 - G_2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow Sz = 100\text{kN}$$

$$6) \sum M_z = 0 \Rightarrow Cx \cdot 4 + Sx \cdot 2 = 0 \Rightarrow Cx = -25\text{kN}$$



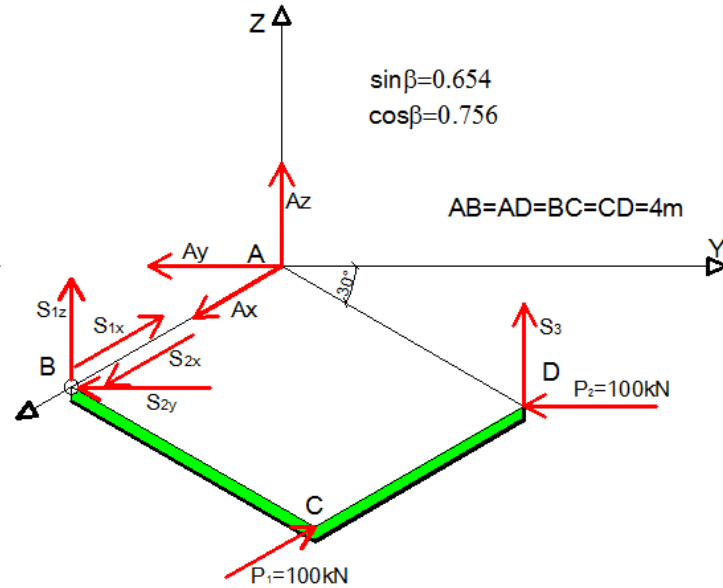
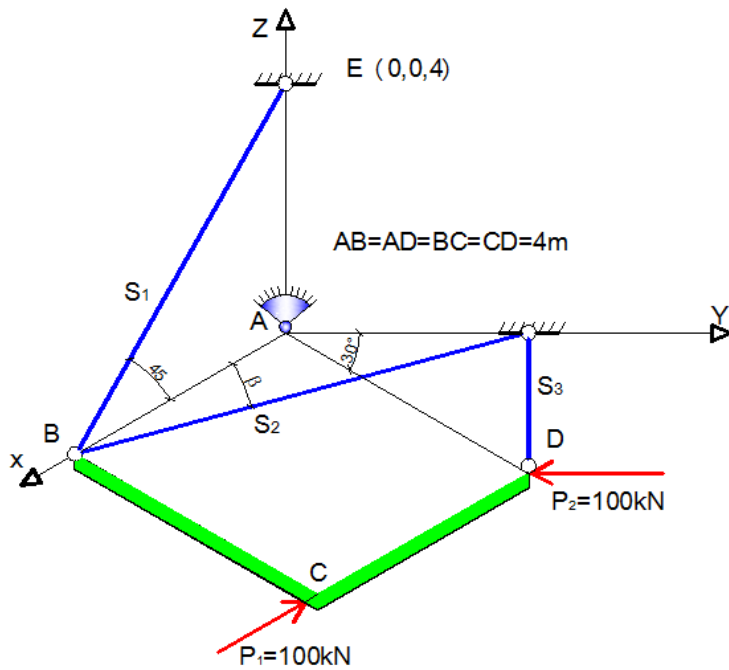
$$S_{1x} = 0.6S_1, S_{1y} = 0.8S_1, S_{2x} = 0.6S_2, S_{2y} = 0.8S_2, S_{3y} = S_{3z} = 0.707S_3$$

$$1) \sum X = 0 \Rightarrow S_{1x} - S_{2x} = 0 \Rightarrow S_{1x} = S_{2x} \Rightarrow S_1 = S_2$$

$$2) \sum Y = 0 \Rightarrow -S_{1y} - S_{2y} + S_{3y} = 0$$

$$2) \sum Z = 0 \Rightarrow S_{3z} - P = 0 \Rightarrow S_{3z} = 100\text{kN} = S_{3y}, \Rightarrow S_3 = 100\sqrt{2}$$

$$2) \Rightarrow 2S_{1y} = S_{3y} \Rightarrow S_{1y} = 50\text{kN} \Rightarrow S_1 = S_2 = 62.5\text{kN}$$



$$1) \sum X = 0 \Rightarrow Ax + S_{2x} - S_{1x} - P_1 = 0 \Rightarrow Ax = -100.11 + 100 + 50 = 49.89 \text{ kN}$$

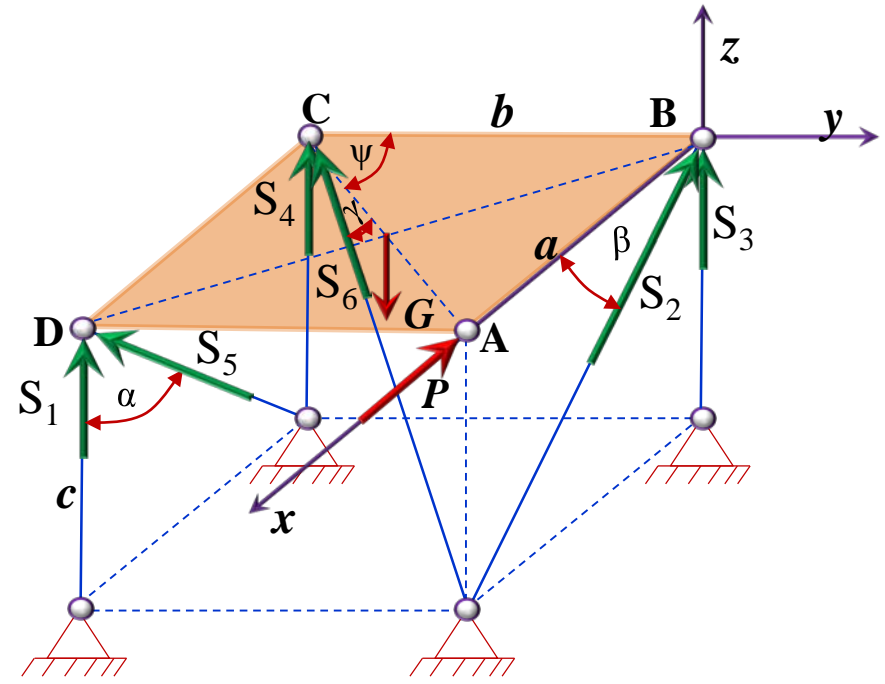
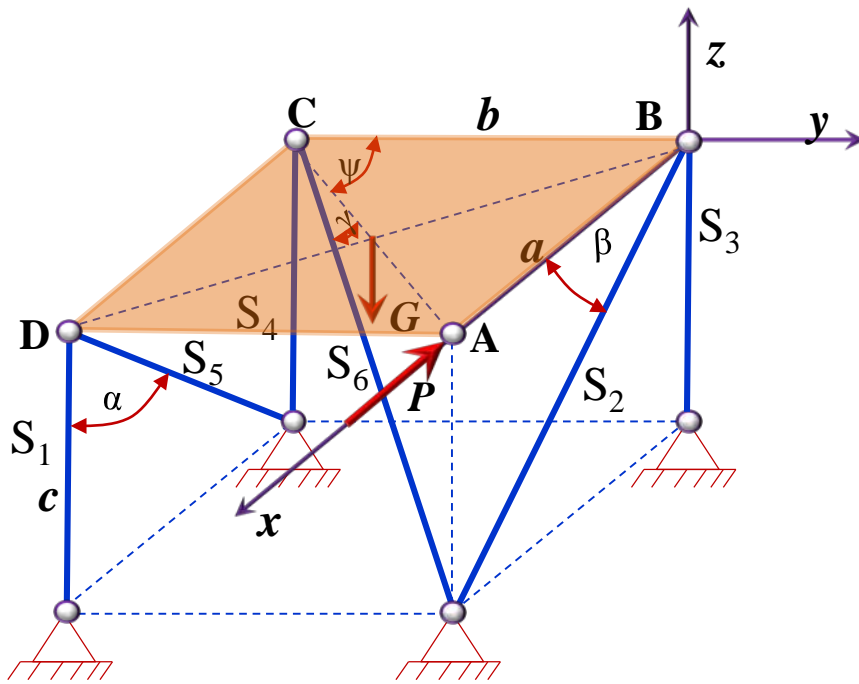
$$2) \sum Y = 0 \Rightarrow Ay + S_{2y} + P_2 = 0 \Rightarrow Ay = -107.74 \text{ kN}$$

$$2) \sum Z = 0 \Rightarrow Az + S_{1z} + S_3 = 0 \Rightarrow Az = -107.74 \text{ kN}$$

$$4) \sum M_x = 0 \Rightarrow S_3 \cdot 2\sqrt{3} - P_2 \cdot 2 = 0 \Rightarrow S_3 = 57.74 \text{ kN}$$

$$5) \sum M_y = 0 \Rightarrow S_{1z} \cdot 4 - P_1 \cdot 2 = 0 \Rightarrow S_{1z} = 50 \text{ kN} \Rightarrow S_1 = 70.71 \text{ kN}$$

$$6) \sum M_z = 0 \Rightarrow S_{2y} \cdot 4 - P_1 \cdot 2\sqrt{3} = 0 \Rightarrow S_{2y} = 50\sqrt{3} \text{ kN} \Rightarrow S_2 = 132.42 \text{ kN}$$



$A(0; 0; 0), B(6; 0; 0), C(0; -8; 0), D(6; -8; 0), P(-P; 0; 0), G(3; -4; 0), G(0; 0; -G)$

$G = 10\text{kN}, a = 6\text{m}, b = 8\text{m}, c = 8\text{m}, P = 20\text{kN}$

$$1) \sum X = 0 \Rightarrow S_{5x} - S_{2x} - S_{6x} - P = 0 \Rightarrow S_{2x} = -20 \Rightarrow S_2 = -33.33\text{kN}$$

$$2) \sum Y = 0 \Rightarrow S_{6y} = 0 \Rightarrow S_6 = 0$$

$$2) \sum Z = 0 \Rightarrow S_1 + S_{2z} + S_3 + S_{5z} + S_4 + S_{6z} - G = 0 \Rightarrow S_3 = S_3 = 31.67\text{kN}$$

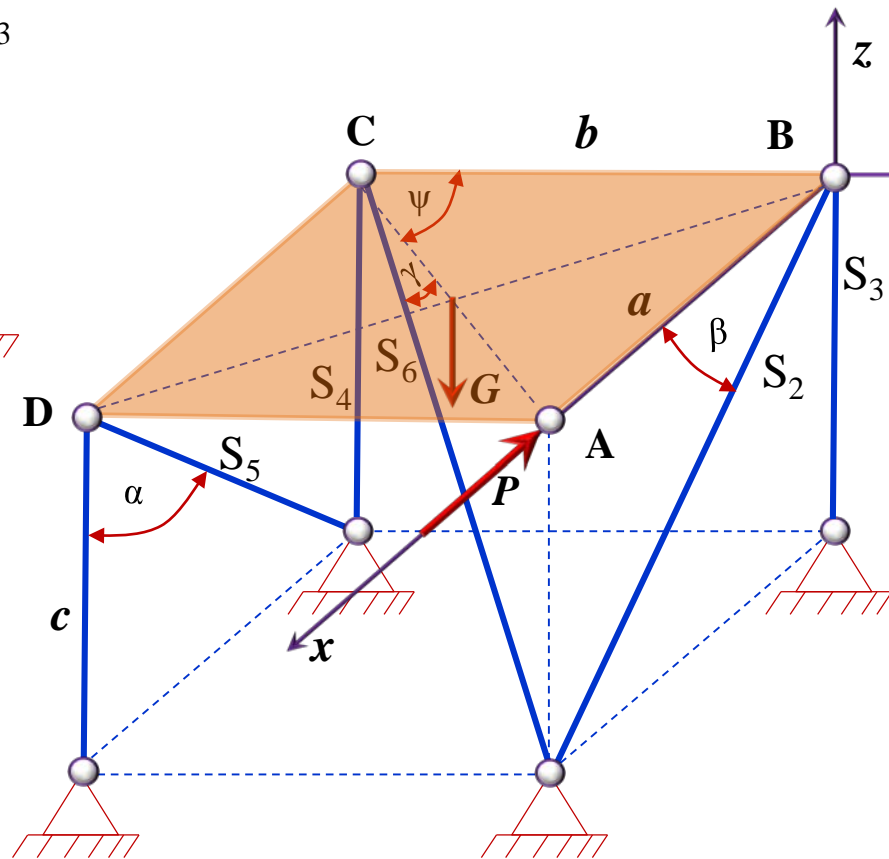
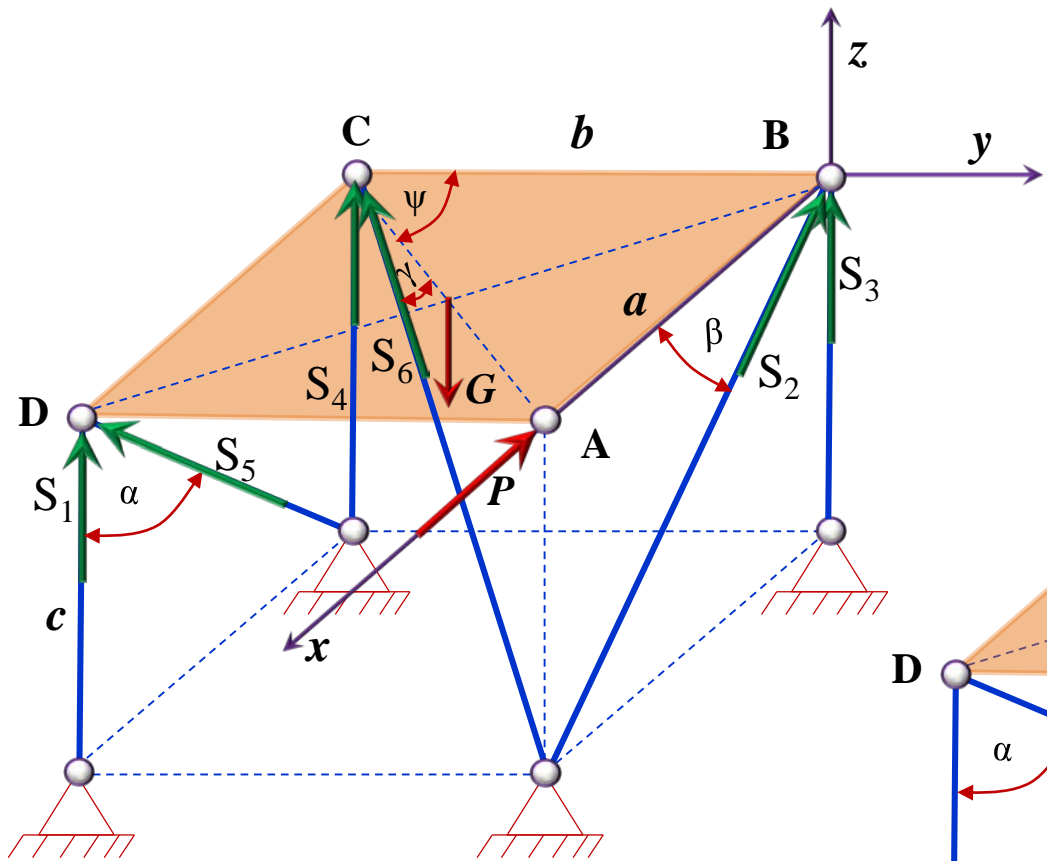
$$4) \sum M_x = 0 \Rightarrow S_1 \cdot 8 + S_4 \cdot 8 + S_{5z} \cdot 8 + S_{6z} \cdot 8 - G \cdot 4 = 0$$

$$5) \sum M_y = 0 \Rightarrow S_1 \cdot 6 + S_{5z} \cdot 6 - G \cdot 3 = 0 \Rightarrow S_1 = 5\text{kN}$$

$$6) \sum M_z = 0 \Rightarrow S_{5x} \cdot 8 = 0 \Rightarrow S_5 = 0$$

$\sin \alpha = 0.6; \cos \alpha = 0.8$
 $\sin \beta = 0.8; \cos \beta = 0.6$
 $\sin \gamma = 0.8; \cos \gamma = 0.6$
 $\sin \psi = 0.6; \cos \psi = 0.8$

$S_1 = 5\text{kN},$
 $S_2 = -33.33\text{kN},$
 $S_3 = 31.67\text{kN},$
 $S_4 = S_5 = S_6 = 0$



$S=70.71\text{kN}$
 $A_x=45\text{kN}$
 $A_y=10\text{kN}$
 $A_z=22.5\text{kN}$
 $E_x=0$
 $E_z=12.5\text{kN}$

$AB=BC=a$
 $AE=CD=4a$
 $ED=2a$

